情報工学実験 I

課題5 カオスとフラクタル

– 第 2 週目 –

担当：池口 徹

TA：菅野嘉隆

tohru@ics.saitama-u.ac.jp

埼玉大学 工学部 情報システム工学科

本実験の内容

- 非線形システムにおいて観測されるカオスとフラクタルについて，MATLAB を用いた数値実験により体験する．
- 解析的に解くことが出来ない非線形システムを対象とする場合，数値シミュレーションの有効性を知る．

前回 (第1週目) の内容

- ロジスティック写像の実験
  1. ロジスティック写像がどのような振る舞いを示すか
  2. MATLAB を用いて，数値計算で確かめる

今週の内容

- カオスと密接な関係にある「フラクタル」について学ぶ.
- フラクタルとは何か?

1. カントール集合
2. コッホ曲線
3. シェルピンスキーギャスケット
4. フラクタル図形の特徴と描画法

複雑なもの

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶成長
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶成長
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶成長
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

↓

一部分を拡大すると，
自分自身と同じ構造が現れる

雲

雲の写真の拡大

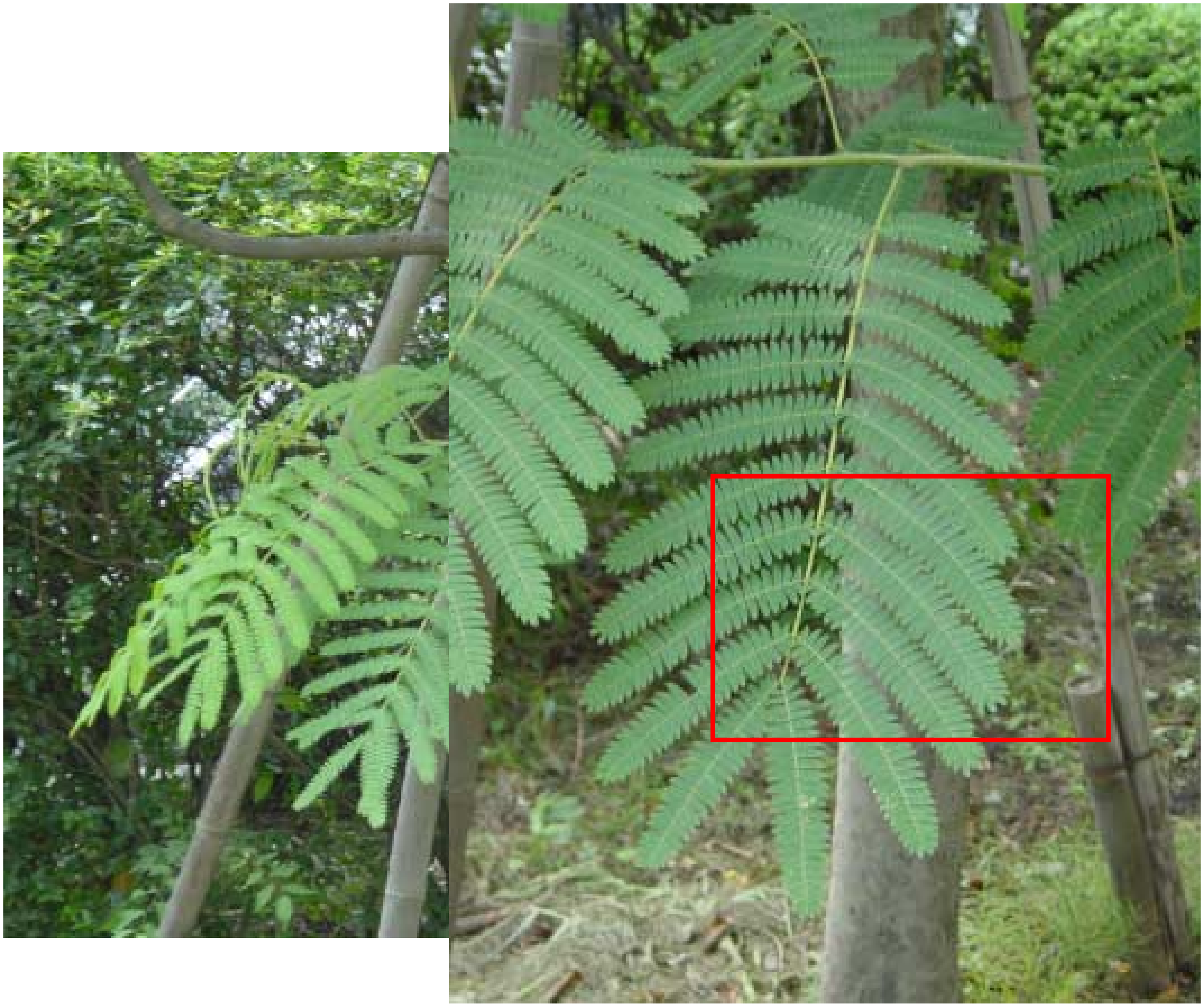
植物

植物の写真の拡大

植物の写真の拡大

植物の写真の拡大

植物の写真の拡大



植物の写真の拡大

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶成長
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

↓

一部分を拡大すると，
自分自身と同じ構造が現れる

↓

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶成長
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

一部分を拡大すると，
自分自身と同じ構造が現れる

フラクタル (自己相似， self-similar)

フラクタル (自己相似) とは

フラクタル (自己相似) とは

- 図形 (集合) の一部分を拡大すると，その図形と同じ構造が現れる
- 語源
  - Fractal – Benoit Mandelbrot, 1975
  - frangere → fractus ラテン語
- ニュートン的図形観 (拡大すれば直線や平面が現れる) とは異なる

フラクタル (自己相似) とは

- 図形 (集合) の一部分を拡大すると，その図形と同じ構造が現れる
- 語源
  - Fractal – Benoit Mandelbrot, 1975
  - frangere → fractus ラテン語
- ニュートン的図形観 (拡大すれば直線や平面が現れる) とは異なる

フラクタルな形状を数値的に表現したい

↓

どのような尺度を使うか？

フラクタル図形の例

- カントール集合 (Cantor set)
- コッホ曲線 (von Koch curve)
- シェルピンスキーのギャスケット (Sierpiński gasket)

フラクタル図形の例

- カントール集合 (Cantor set)
- コッホ曲線 (von Koch curve)
- シェルピンスキーのギャスケット (Sierpiński gasket)

考えてほしいこと

1. これらの図形は，どのように作られるか?
2. これらの図形の形状の特徴を数値化するには，どのような尺度を用いれば良いか?

長さ?面積?体積? $\cdots$ 別の尺度?

カントール集合

カントール集合

- 長さ 1 の線分

カントール集合

- 長さ 1 の線分 の中央部 [1/3, 2/3] を切り抜く

カントール集合

- 長さ 1 の線分 の中央部 [1/3, 2/3] を切り抜く
- 残った部分の中央を更に切り抜く

カントール集合

- 長さ 1 の線分 の中央部 [1/3, 2/3] を切り抜く
- 残った部分の中央を更に切り抜く
- 無限回繰り返す

カントール集合

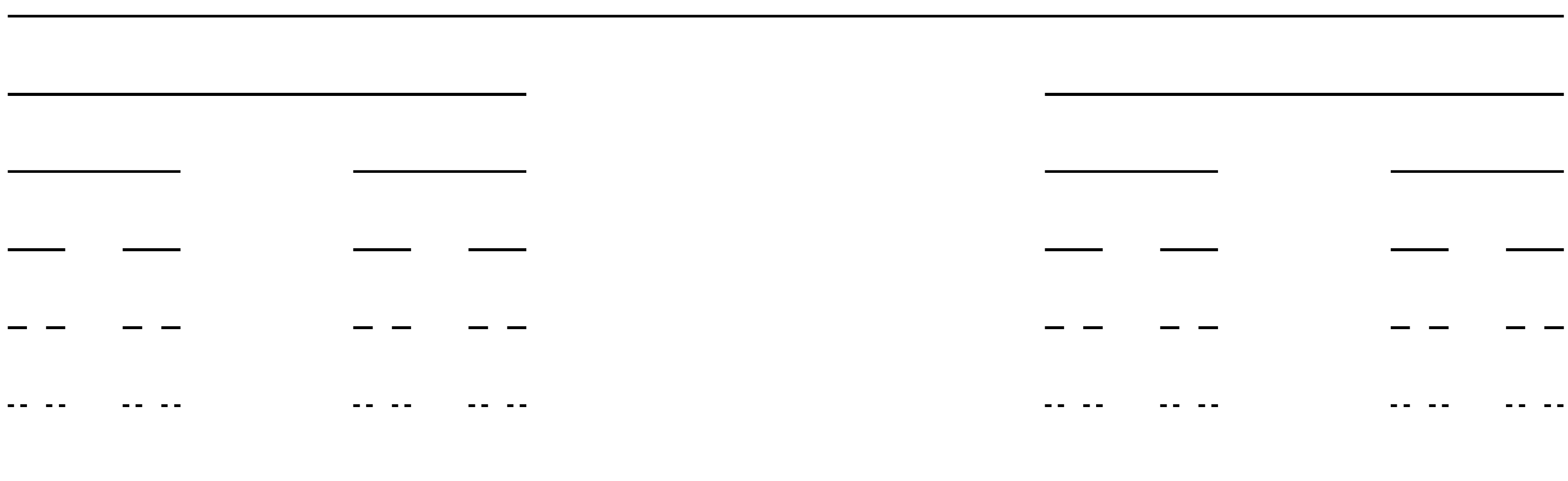
- 長さ 1 の線分 の中央部 [1/3, 2/3] を切り抜く
- 残った部分の中央を更に切り抜く
- 無限回繰り返す

カントール集合

- 長さ 1 の線分 の中央部 [1/3, 2/3] を切り抜く
- 残った部分の中央を更に切り抜く
- 無限回繰り返す

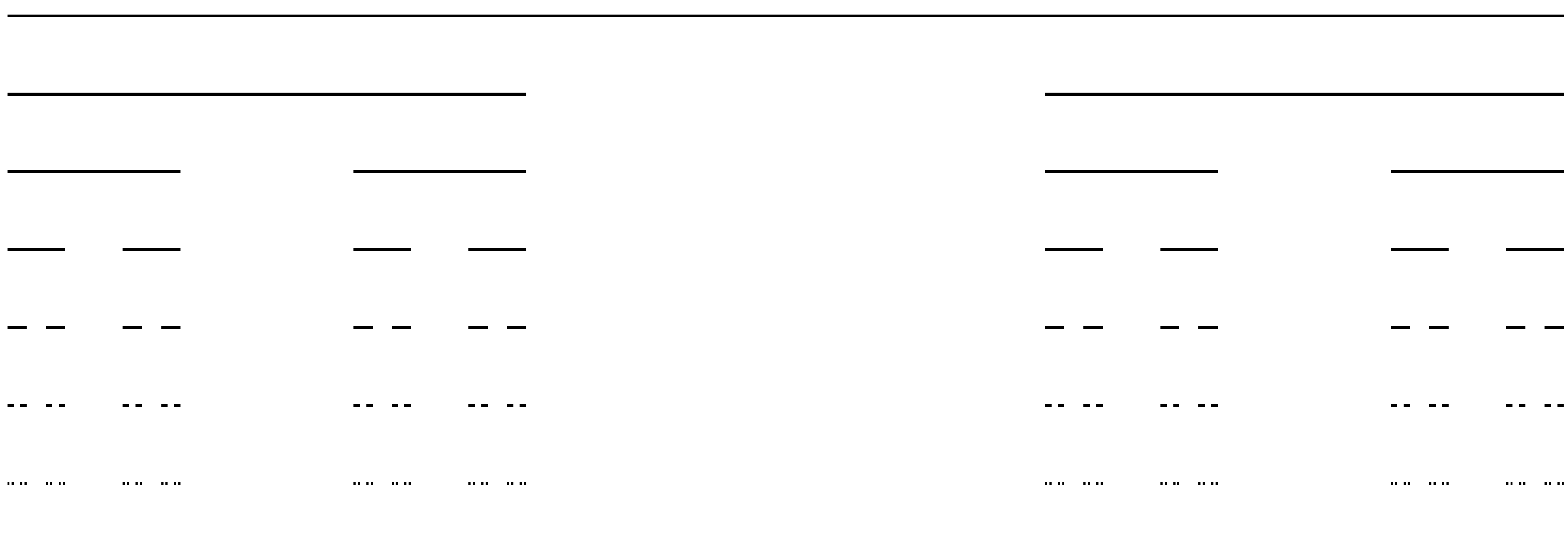
カントール集合

- 長さ 1 の線分 の中央部 [1/3, 2/3] を切り抜く
- 残った部分の中央を更に切り抜く
- 無限回繰り返す



カントール集合

- 長さ 1 の線分 の中央部 [1/3, 2/3] を切り抜く
- 残った部分の中央を更に切り抜く
- 無限回繰り返す



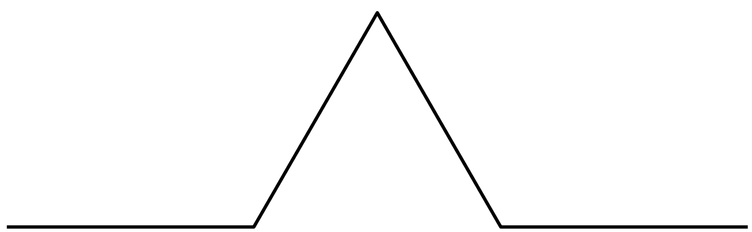
コッホ曲線

コッホ曲線

- 長さ 1 の線分の中央 $[1/3, 2/3]$ を山にした帽子

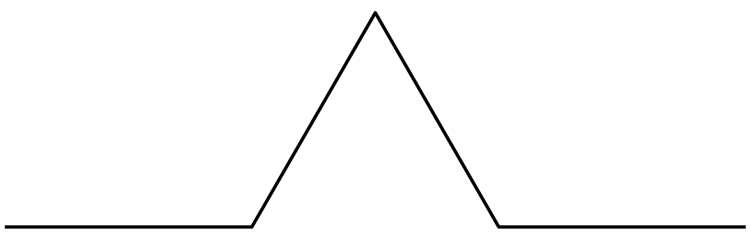
コッホ曲線

- 長さ 1 の線分の中央 $[1/3, 2/3]$ を山にした帽子
- $1/3$ に縮小し，4 つの辺を置き換える



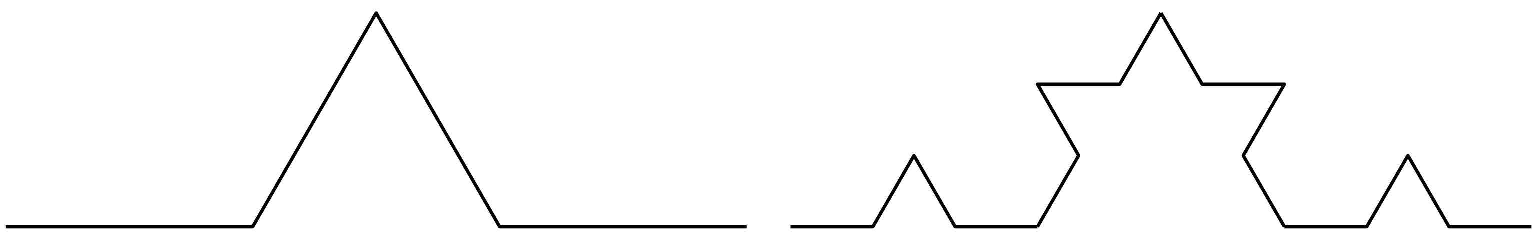
コッホ曲線

- 長さ 1 の線分の中央 $[1/3, 2/3]$ を山にした帽子
- 1/3 に縮小し，4 つの辺を置き換える



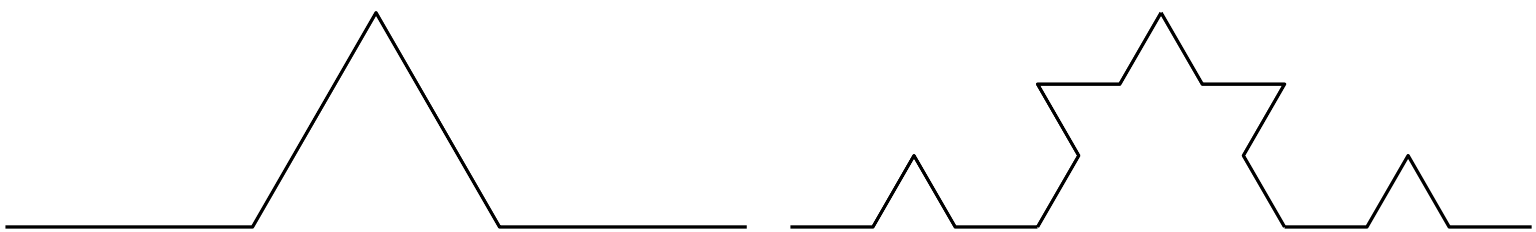
コッホ曲線

- 長さ 1 の線分の中央 $[1/3, 2/3]$ を山にした帽子
- $1/3$ に縮小し，4 つの辺を置き換える



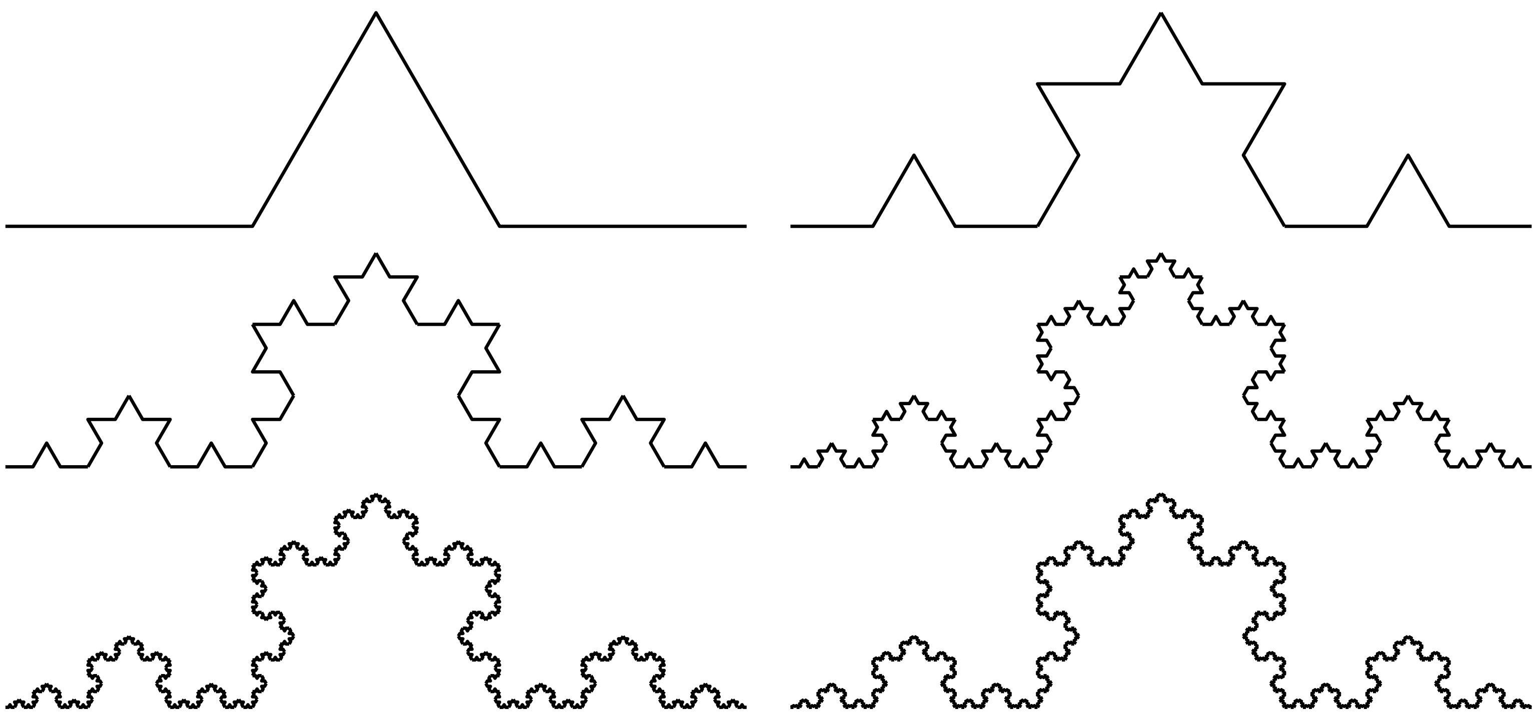
コッホ曲線

- 長さ 1 の線分の中央 [1/3, 2/3] を山にした帽子
- 1/3 に縮小し，4 つの辺を置き換える
- 無限回繰り返す



コッホ曲線

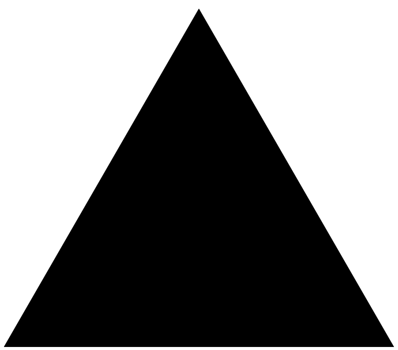
- 長さ 1 の線分の中央 [1/3, 2/3] を山にした帽子
- 1/3 に縮小し，4 つの辺を置き換える
- 無限回繰り返す



シェルピンスキーのギャスケット

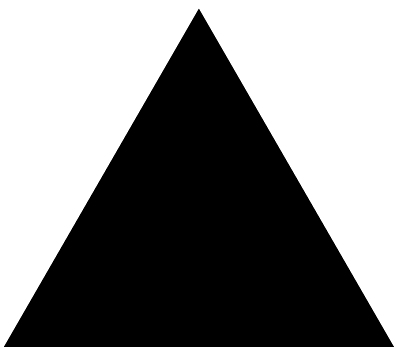
シェルピンスキーのギャスケット

- 正三角形



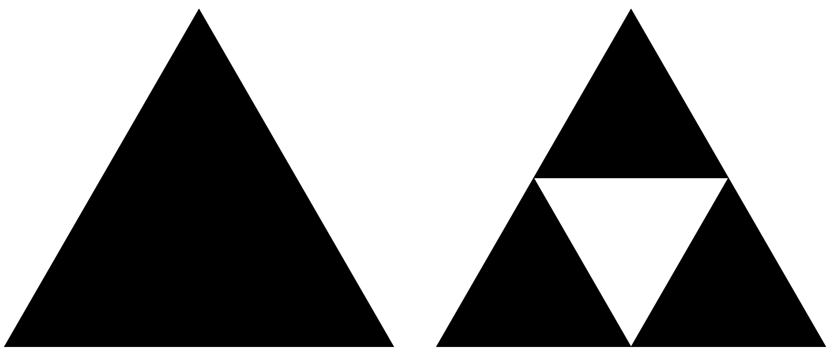
シェルピンスキーのギャスケット

- 正三角形 の中央を切り取る



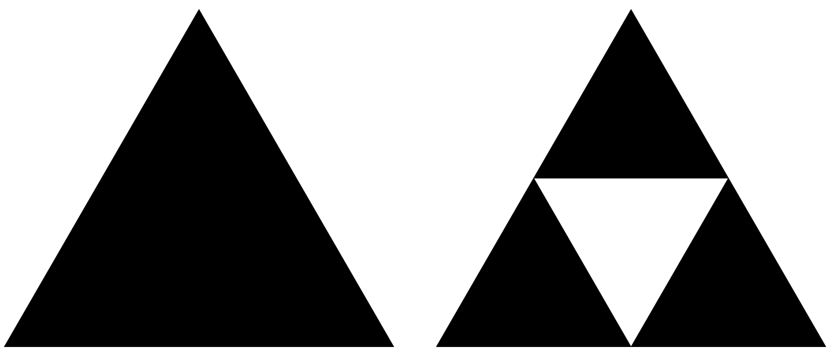
シェルピンスキーのギャスケット

- 正三角形 の中央を切り取る



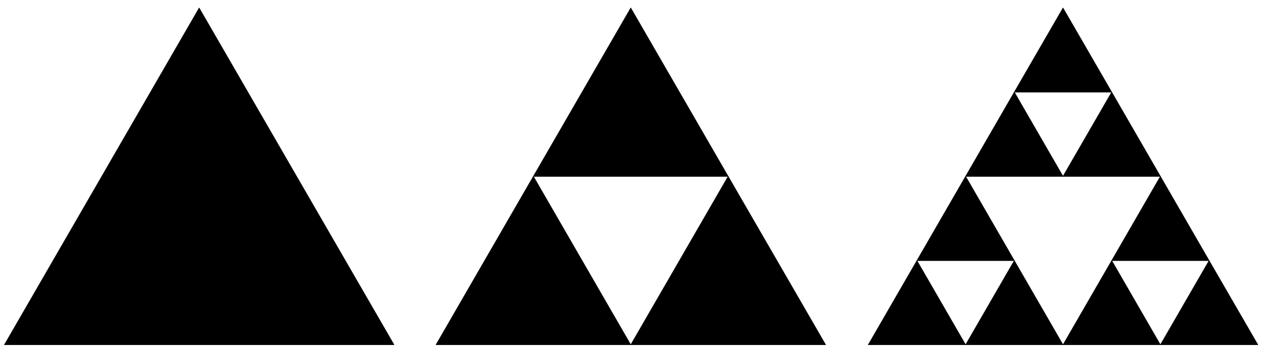
シェルピンスキーのギャスケット

- 正三角形 の中央を切り取る
- 残った正三角形の中央をさらに切り取る



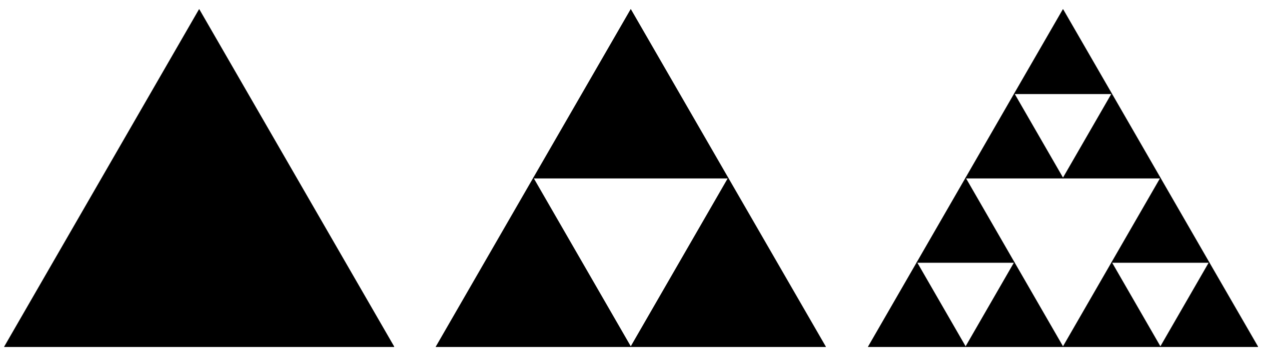
シェルピンスキーのギャスケット

- 正三角形 の中央を切り取る
- 残った正三角形の中央をさらに切り取る



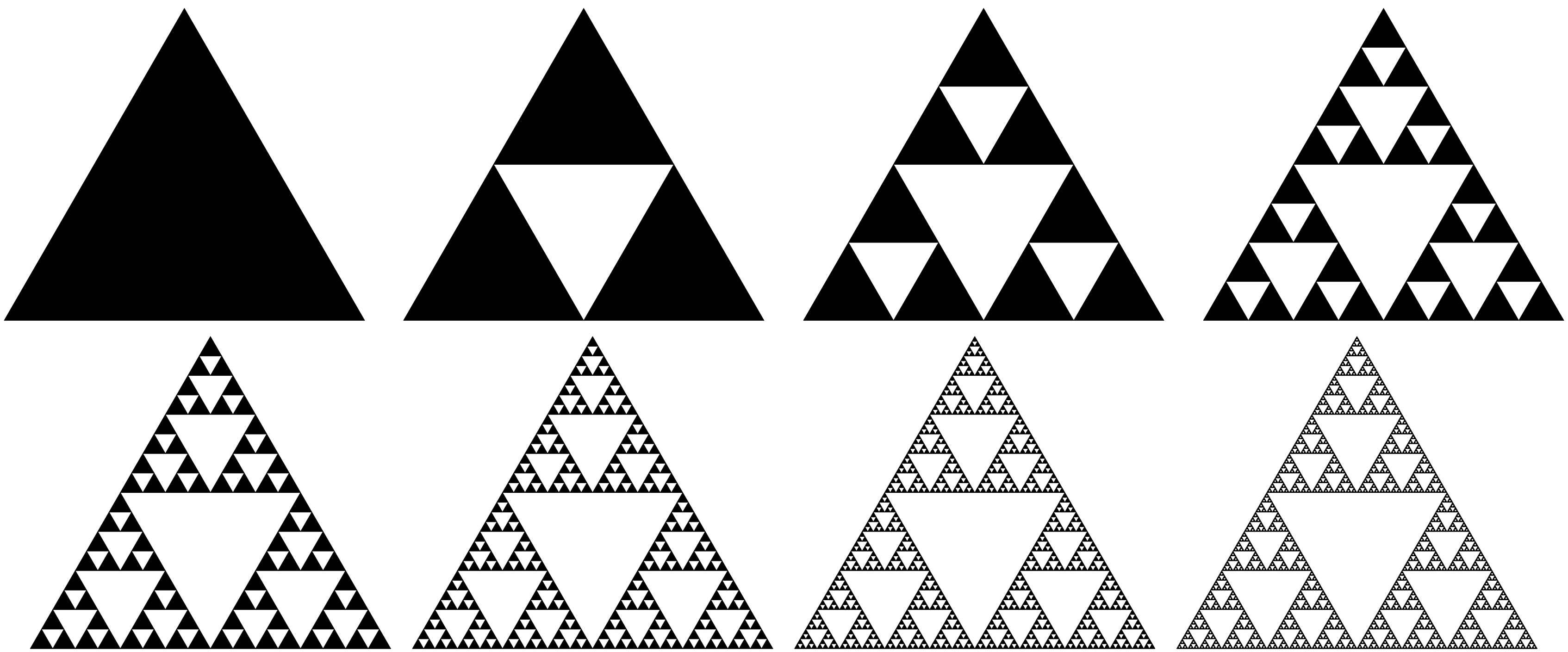
シェルピンスキーのギャスケット

- 正三角形 の中央を切り取る
- 残った正三角形の中央をさらに切り取る
- 無限回繰り返す



シェルピンスキーのギャスケット

- 正三角形 の中央を切り取る
- 残った正三角形の中央をさらに切り取る
- 無限回繰り返す



フラクタル図形の特徴を測る

長さ，面積，体積などの尺度から始めよう!

カントール集合は，線分 (1 次元) からスタート

↓

1 次元空間での尺度は「長さ」

↓

カントール集合の長さは?

カントール集合の長さは?

- 1 回目の操作で取り除かれる長さは $\dfrac{1}{3}$
- 2 回目の操作で取り除かれる長さは $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times 2$
- 3 回目の操作で取り除かれる長さは $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times 4 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 \times 2^2$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 2^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 2^{n-1} + \cdots \\
&\qquad = \frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right\}
\end{aligned}$$

初項 a 公比 r の等比数列の和

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} \\ rS_n &= ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \end{aligned}$$

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$r < 1$ の時,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a \cdot \frac{1}{1-r}$$

カントール集合の長さは?

操作を無限回繰り返すと，取り除かれる長さは,

初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列の和の極限

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 2^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \times 2^{n-1} + \cdots \\
= \quad & \frac{1}{3}\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{2}{3}} = 1
\end{aligned}
$$

つまり，カントール集合の長さは，$1 - 1 = 0$

カントール集合の長さが 0？

カントール集合の長さが 0？

$[0, 1]$ 区間のスカスカな点の集まり?

↓

直感に反する奇妙な結果...

カントール集合の長さが 0 ?

[0, 1] 区間のスカスカな点の集まり?

直感に反する奇妙な結果...

- カントール集合を作るときには，全ての線分を取るわけではない.
- 両側の線分を残している.
- これは，何回操作を施しても同じ.

カントール集合の濃度 (点の数) は?

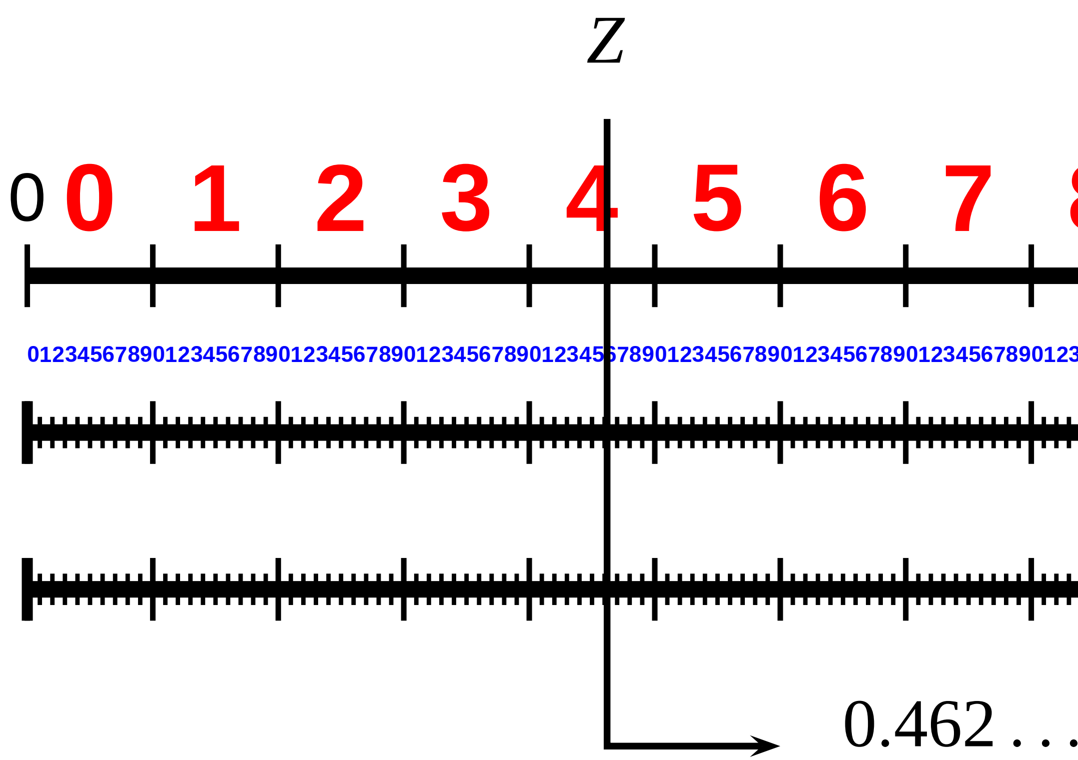
- $[0, 1]$ 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1 z_2 z_3 z_4 \cdots, \text{ 但し } z_i = \{0, 1, 2\}$$

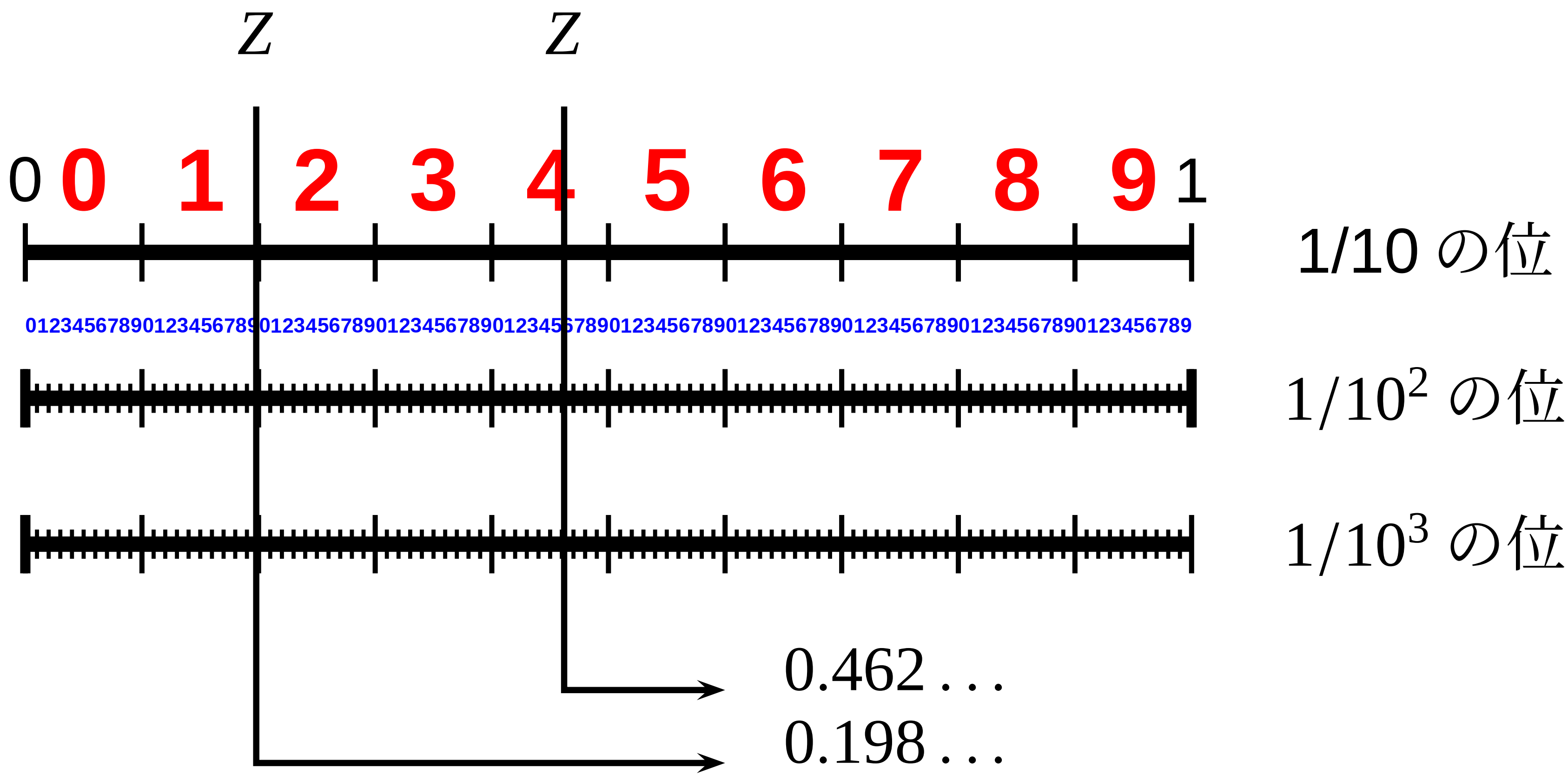
区間 $[0,1]$ における実数の **10** 進法表現

区間 [0, 1] における実数の **10** 進法表現

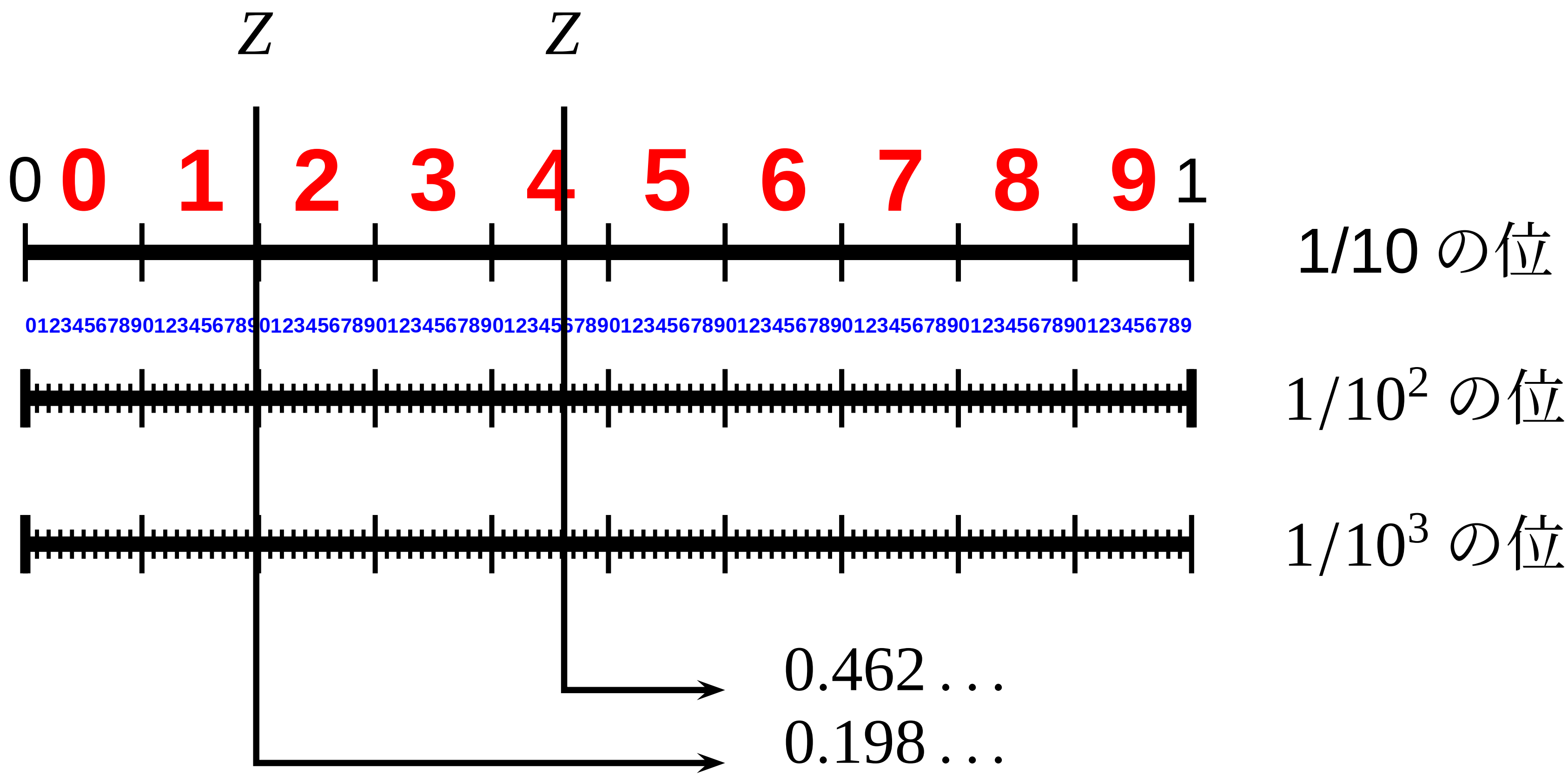
区間 [0, 1] における実数の 10 進法表現



区間 [0, 1] における実数の **10** 進法表現



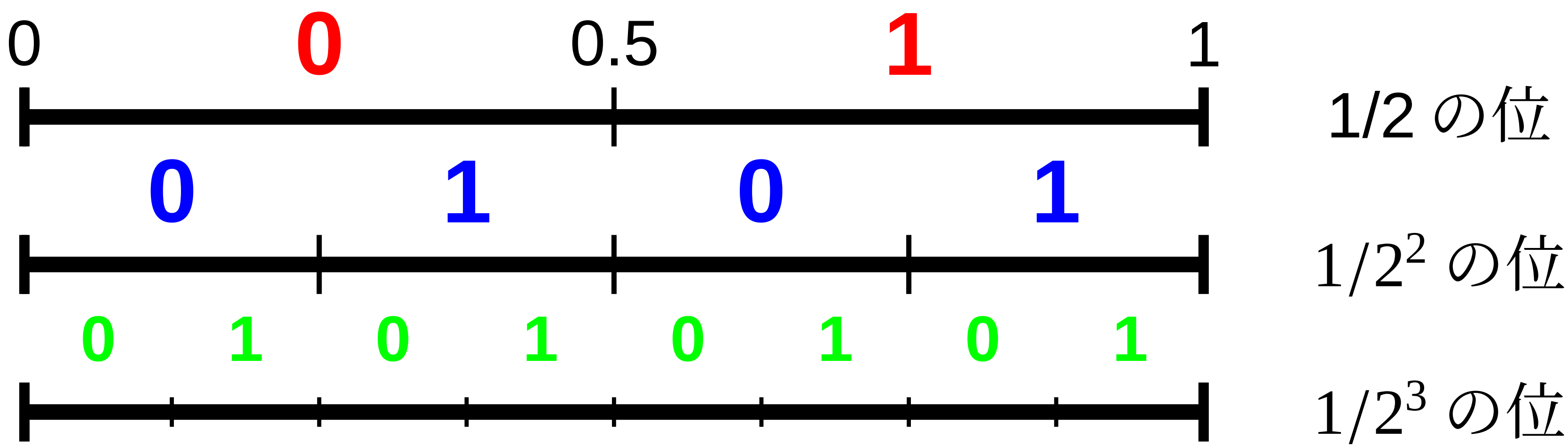
区間 $[0,1]$ における実数の 10 進法表現



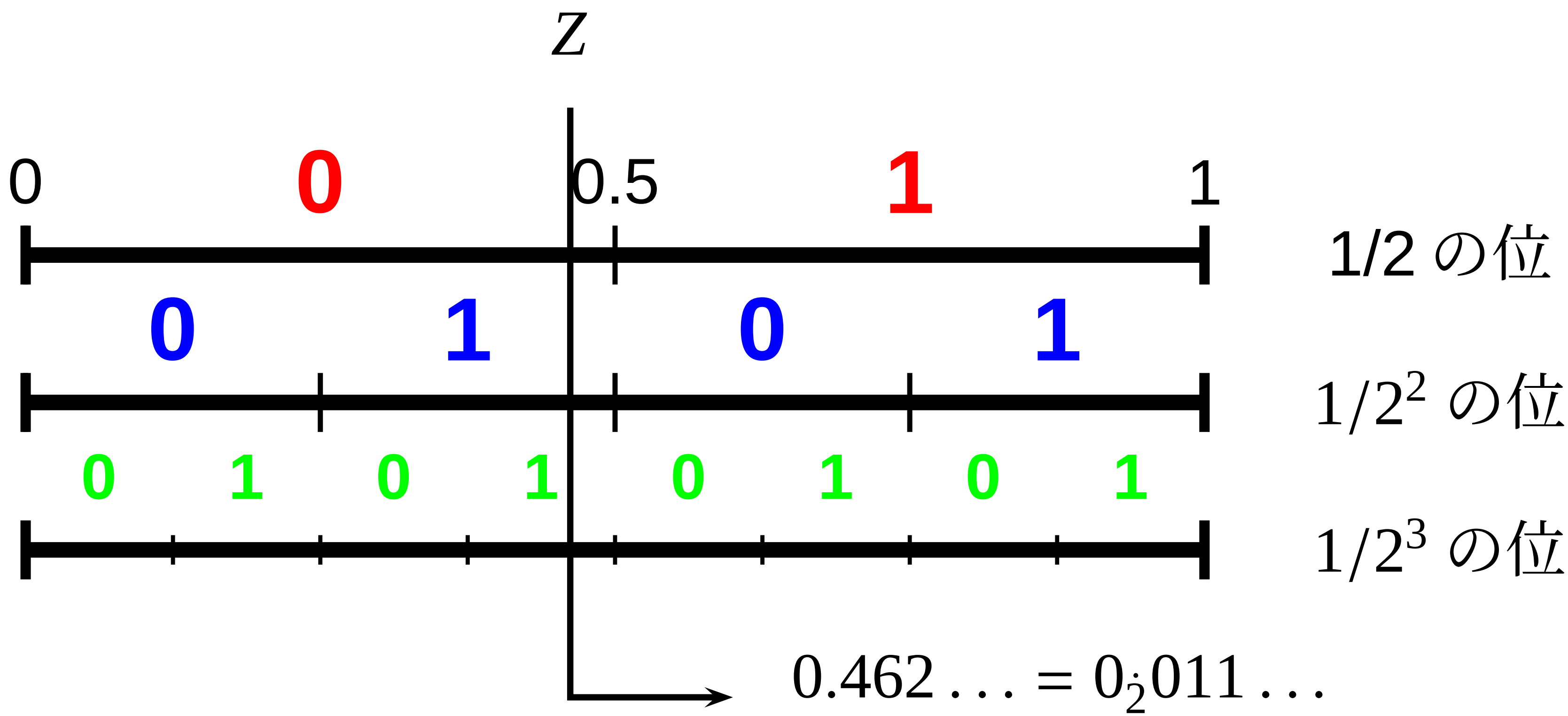
$$Z = 0.d_1d_2d_3d_4\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \cdots$$

区間 $[0, 1]$ における実数の **2** 進法表現

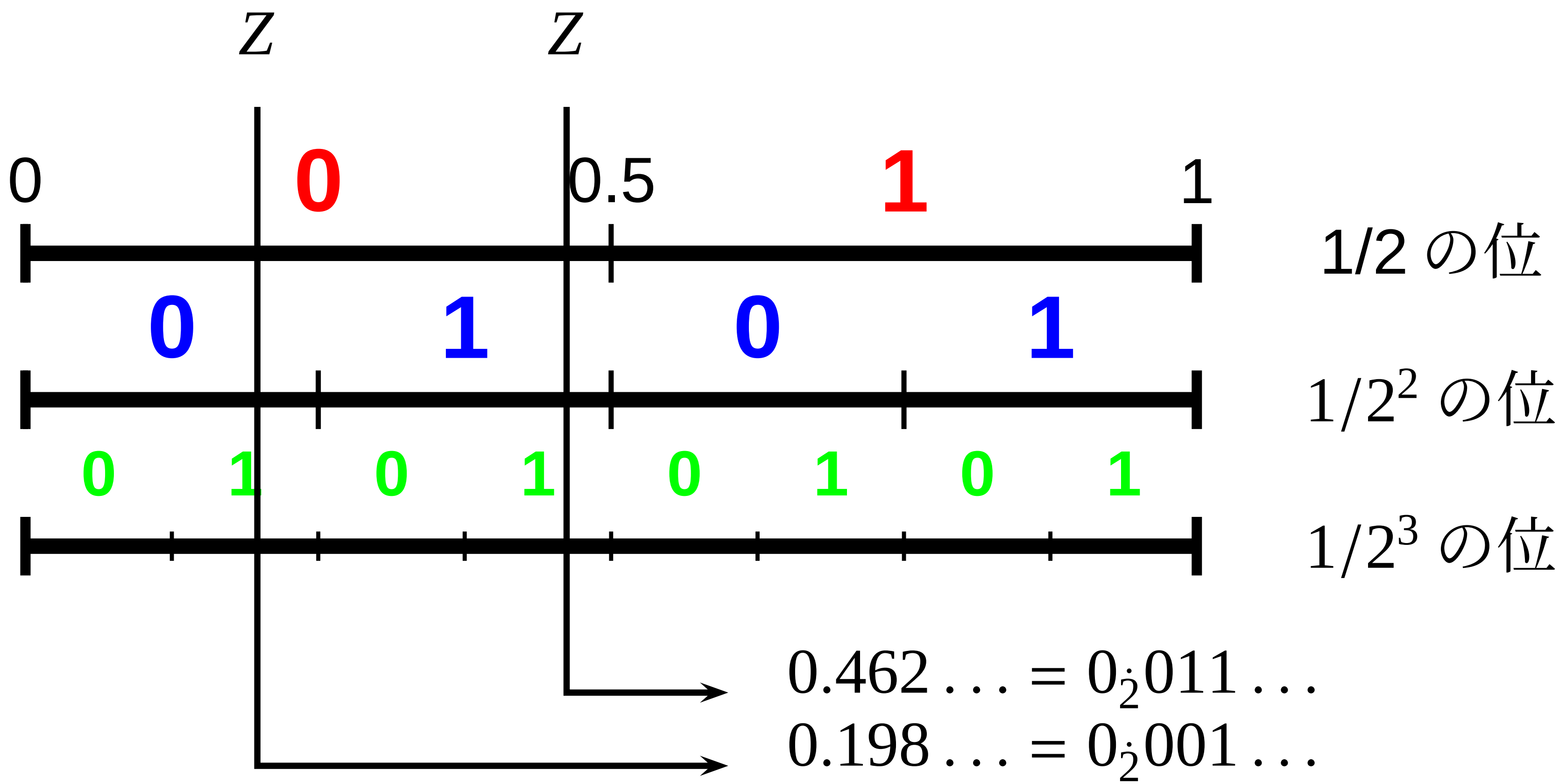
区間 $[0, 1]$ における実数の 2 進法表現



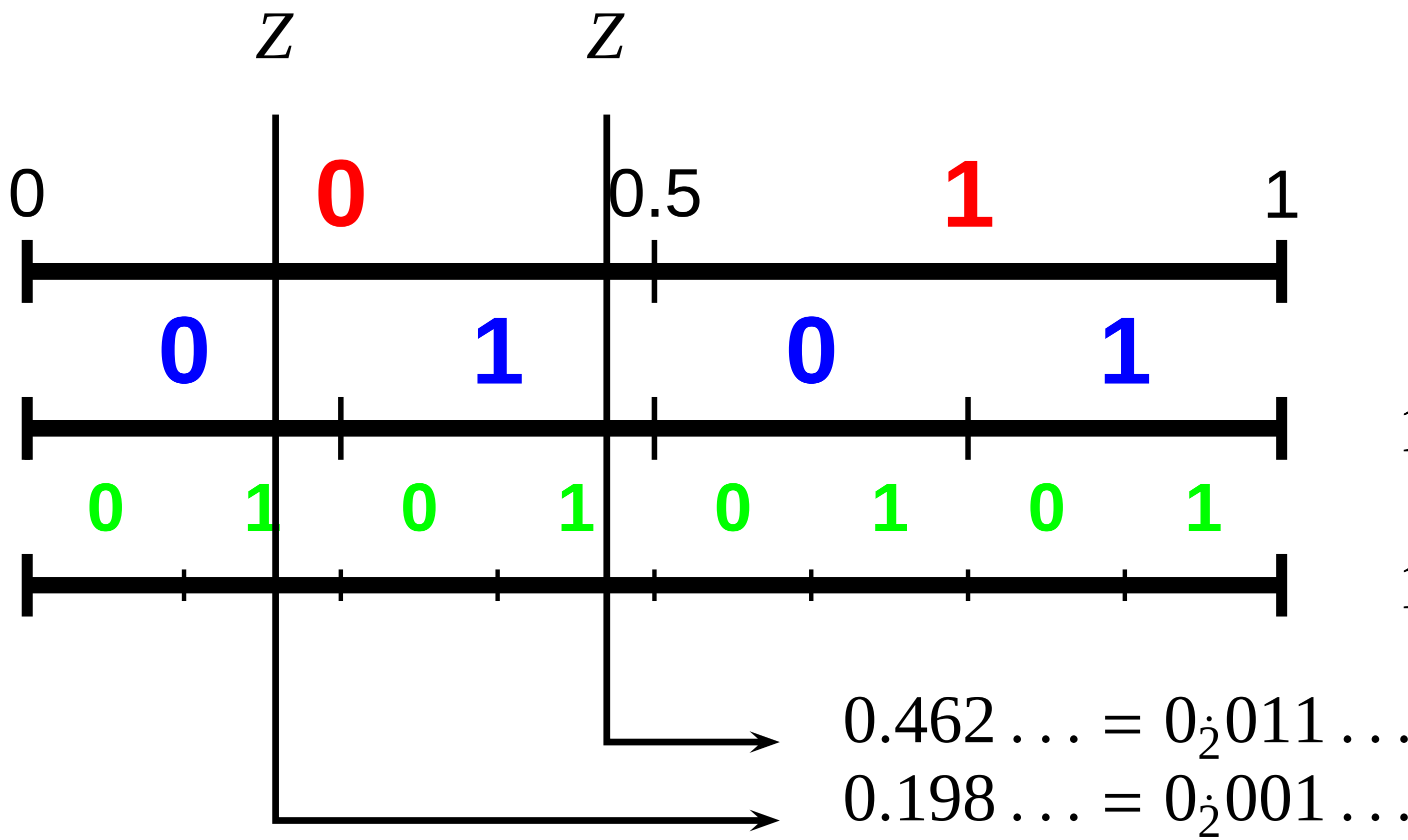
区間 $[0,1]$ における実数の 2 進法表現



区間 [0, 1] における実数の 2 進法表現



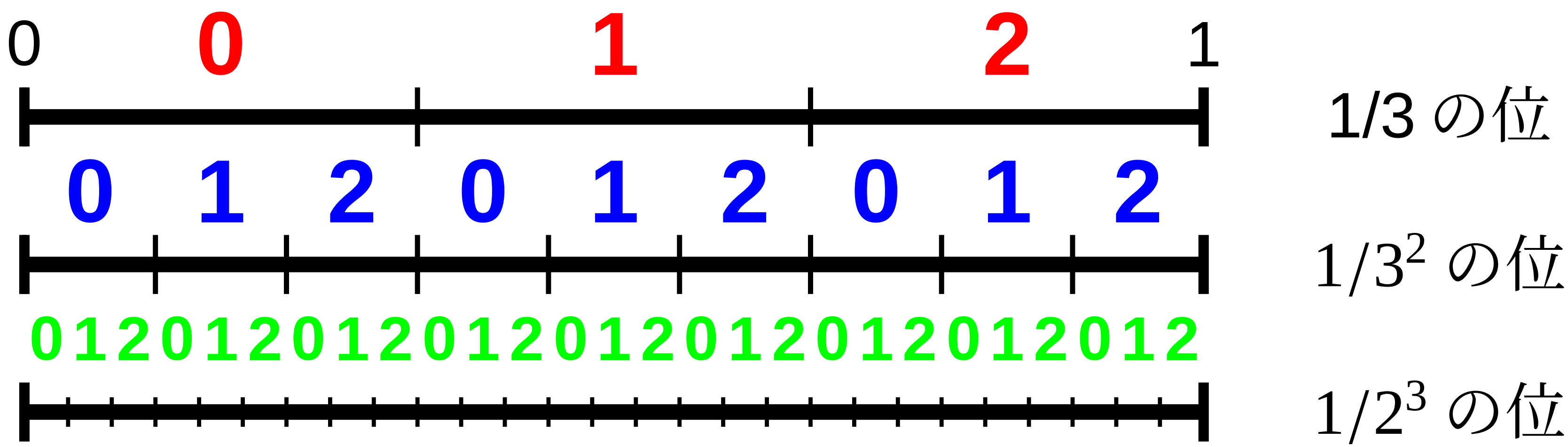
区間 $[0,1]$ における実数の 2 進法表現



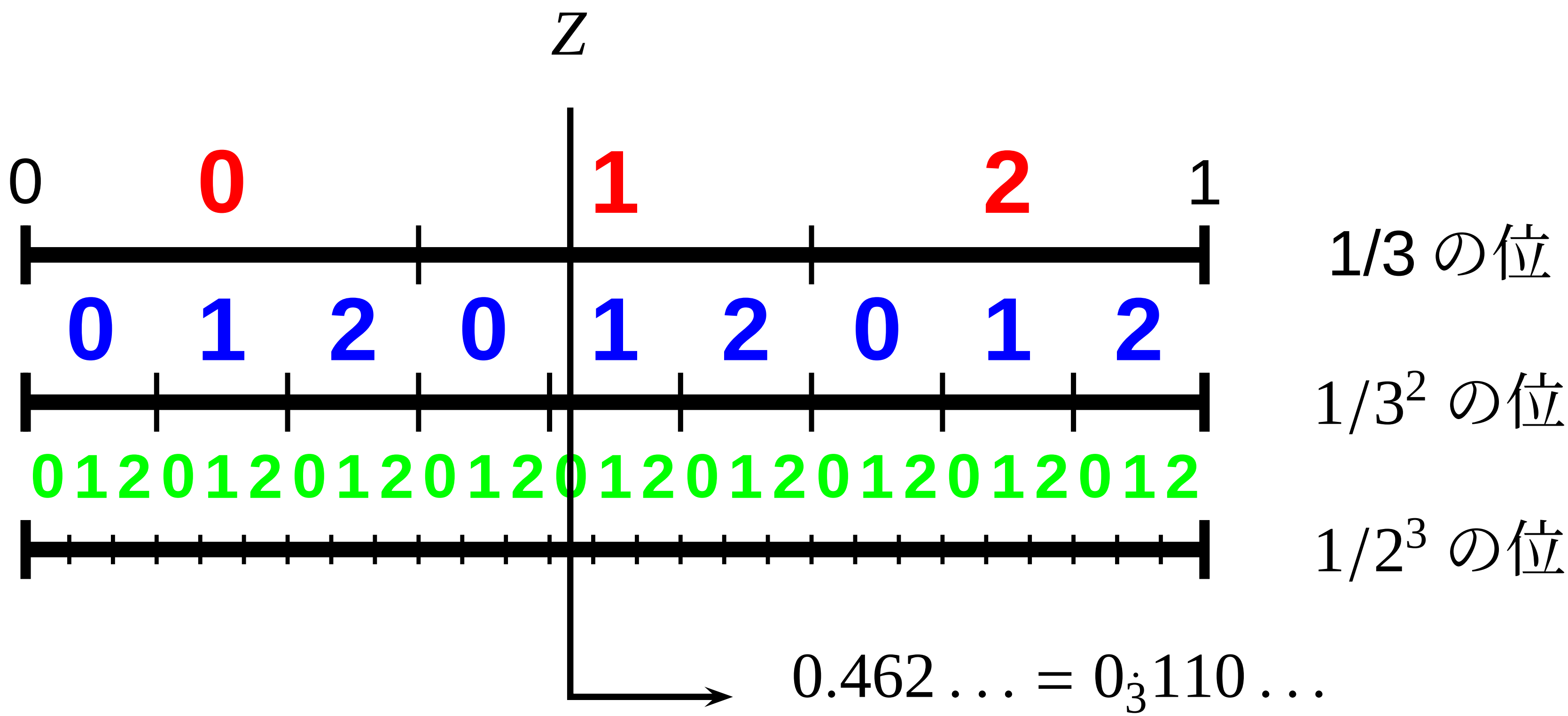
$$Z = 0.b_1b_2b_3b_4\ldots = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \cdots (b_i = 0, 1)$$

区間 $[0, 1]$ における実数の **3** 進法表現

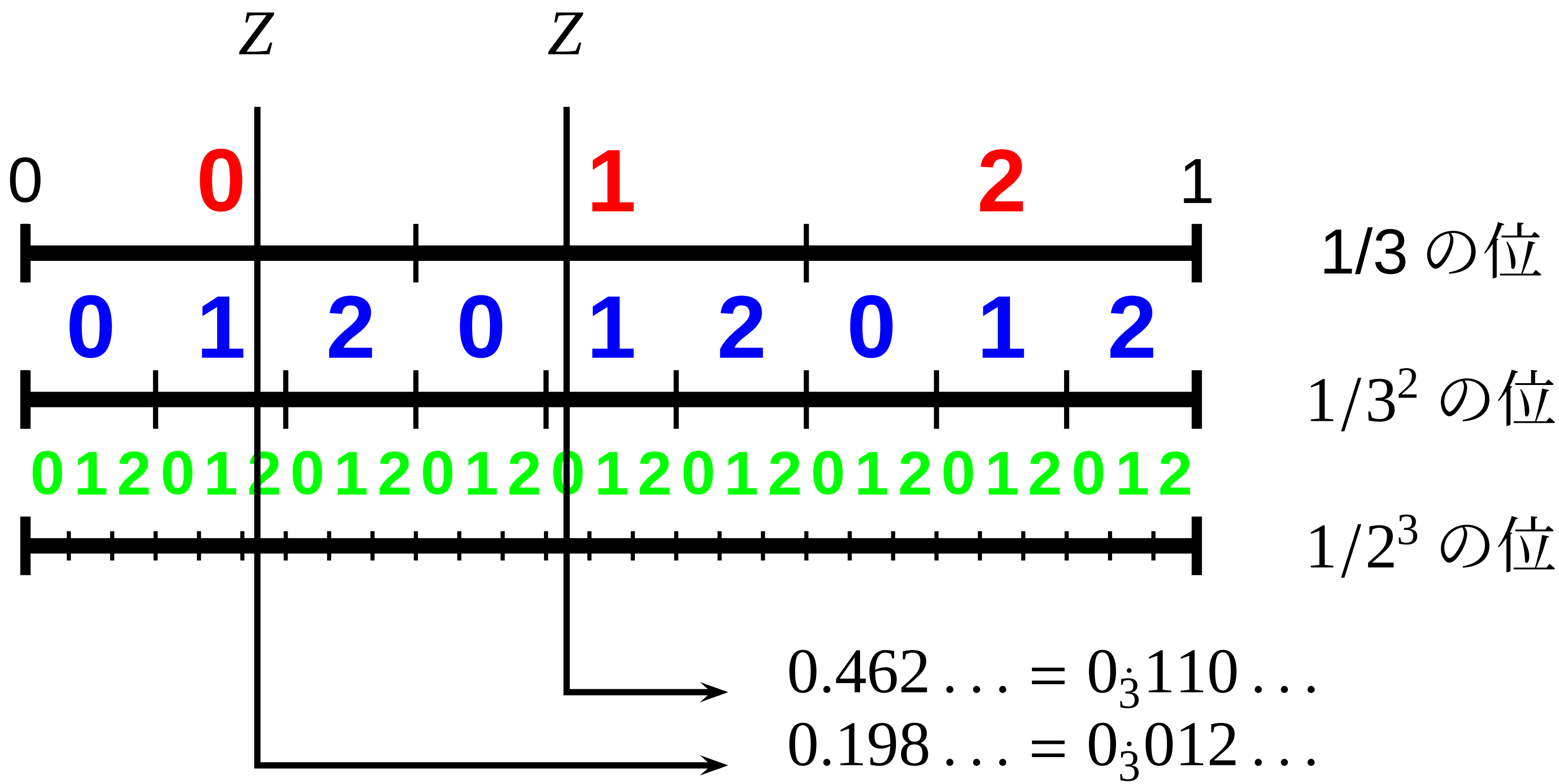
区間 $[0, 1]$ における実数の **3** 進法表現



区間 [0, 1] における実数の 3 進法表現



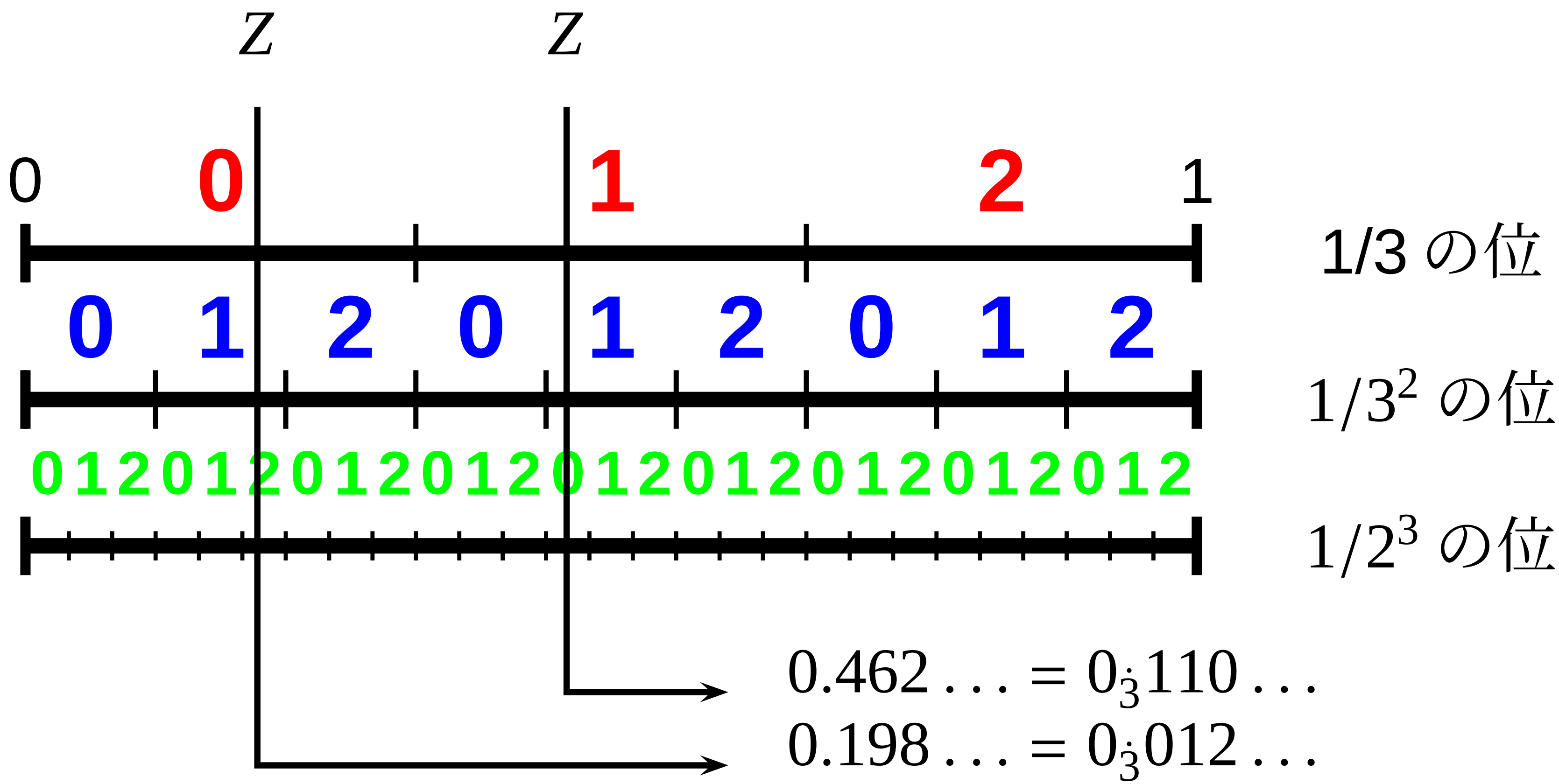
区間 [0, 1] における実数の 3 進法表現



$0.462\ldots = 0_{\dot{3}}110\ldots$

$0.198\ldots = 0_{\dot{3}}012\ldots$

区間 $[0, 1]$ における実数の 3 進法表現



$$Z = 0.z_1z_2z_3z_4\ldots = \frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{3^2} + \frac{z_3}{3^3} + \cdots (z_i = 0, 1, 2)$$

カントール集合の濃度は?

- $[0,1]$ 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1 z_2 z_3 z_4 \cdots, \ \text{但し}\ z_i = \{0,1,2\}$$

カントール集合の濃度は?

- $[0,1]$ 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1z_2z_3z_4\cdots,\quad \text{但し } z_i = \{0,1,2\}$$

- カントール集合では中央部分が無いので,
$z_i = 1$ という値はとらず, z_i は 0 か 2 のみである.

カントール集合の濃度は?

- $[0,1]$ 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1z_2z_3z_4\cdots,\quad \text{但し } z_i = \{0,1,2\}$$

- カントール集合では中央部分が無いので，
$z_i = 1$ という値はとらず，z_i は 0 か 2 のみである．
- $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えてやると...

カントール集合の濃度は?

- [0, 1] 区間の実数を 3 進法で表現すると ⋯

$$0.z_1z_2z_3z_4\cdots,\ \text{但し}\ z_i = \{0, 1, 2\}$$

- カントール集合では中央部分が無いので,
  $z_i = 1$ という値はとらず, z_i は 0 か 2 のみである.
- $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えてやると...
- $z_i = 0, 1$ となるので,

カントール集合の濃度は?

- $[0, 1]$ 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1 z_2 z_3 z_4 \cdots, \quad \text{但し } z_i = \{0, 1, 2\}$$

- カントール集合では中央部分が無いので, $z_i = 1$ という値はとらず, z_i は 0 か 2 のみである.
- $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えてやると...
- $z_i = 0, 1$ となるので,
- $[0, 1]$ 区間上の実数の 2 進法表現と 1 対 1 対応がつく

カントール集合の濃度は?

- [0, 1] 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1 z_2 z_3 z_4 \cdots, \text{ 但し } z_i = \{0, 1, 2\}$$

- カントール集合では中央部分が無いので,
  $z_i = 1$ という値はとらず, z_i は 0 か 2 のみである.
- $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えてやると...
- $z_i = 0, 1$ となるので,
- [0, 1] 区間上の実数の 2 進法表現と 1 対 1 対応がつく

カントール集合の濃度は実数濃度と同じ,
つまり [0, 1] 区間に点が無限個存在する

カントール集合の濃度は?

- $[0,1]$ 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1z_2z_3z_4\cdots, \quad \text{但し } z_i = \{0,1,2\}$$

- カントール集合では中央部分が無いので,
  $z_i = 1$ という値はとらず, z_i は 0 か 2 のみである.
- $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えてやると...
- $z_i = 0, 1$ となるので,
- $[0,1]$ 区間上の実数の 2 進法表現と 1 対 1 対応がつく

カントール集合の濃度は実数濃度と同じ,
つまり $[0,1]$ 区間に点が無限個存在する

$L_n \to 0$ という結果と合わない...

フラクタル図形を特徴付けるには?

- 長さ・面積・体積などの尺度では,
うまく測れないようである.

↓

- フラクタル次元という新しい尺度を用いて，フラクタル図形の特徴を数値化する

↓

フラクタル次元とは? どのようにして測るのか?

次元とは? –直感的解釈–

線は 1 次元，面は 2 次元，立体は 3 次元

↓

次元とは? –直感的解釈–

線は 1 次元，面は 2 次元，立体は 3 次元

↓

「被覆」するという方法で確かめてみよう

線分を被覆する

線分を被覆する

線分を被覆する

線分を被覆する

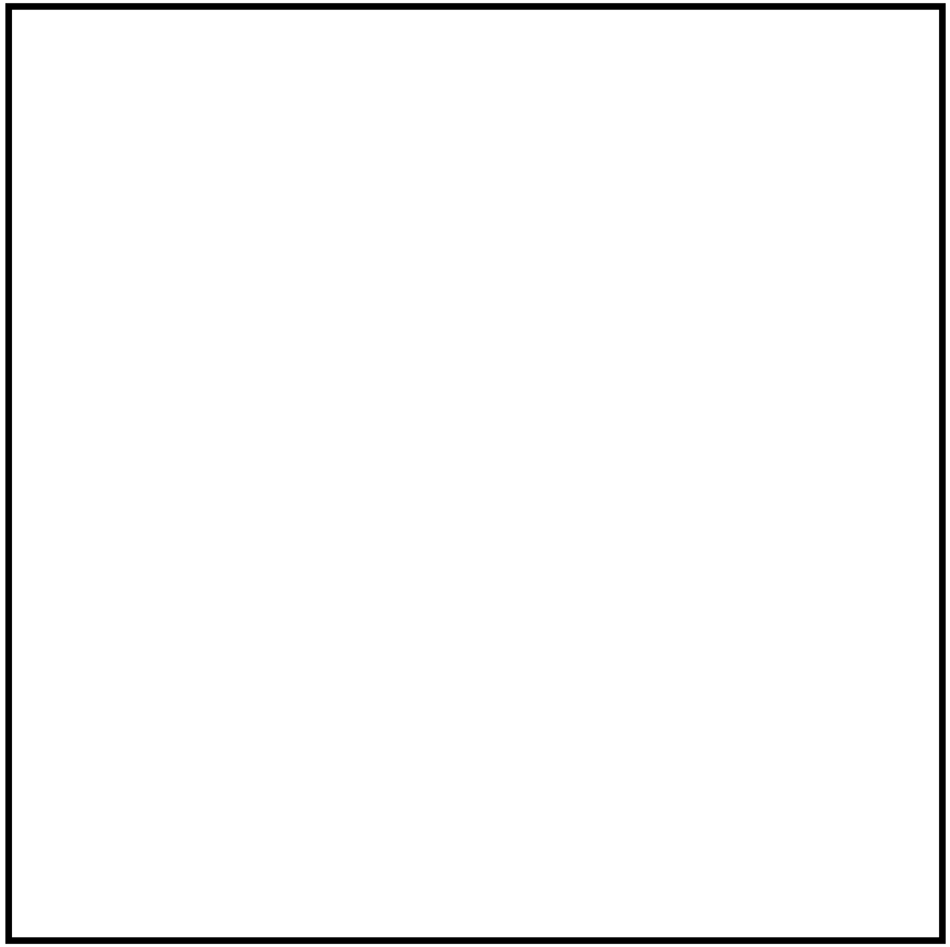
線分を被覆する

被覆に必要な小線分 (縮小比 $\frac{1}{2}$) の数 $= 2$

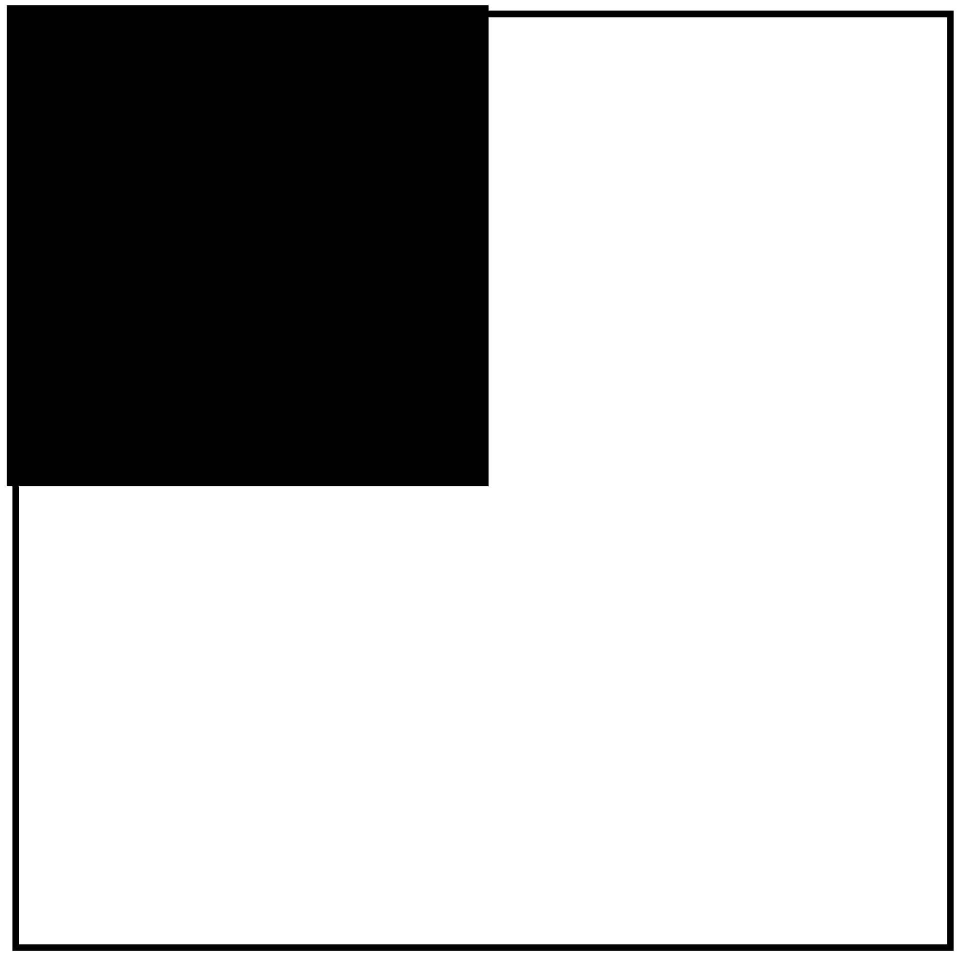
但し，無駄がないように被覆する．

正方形を被覆する

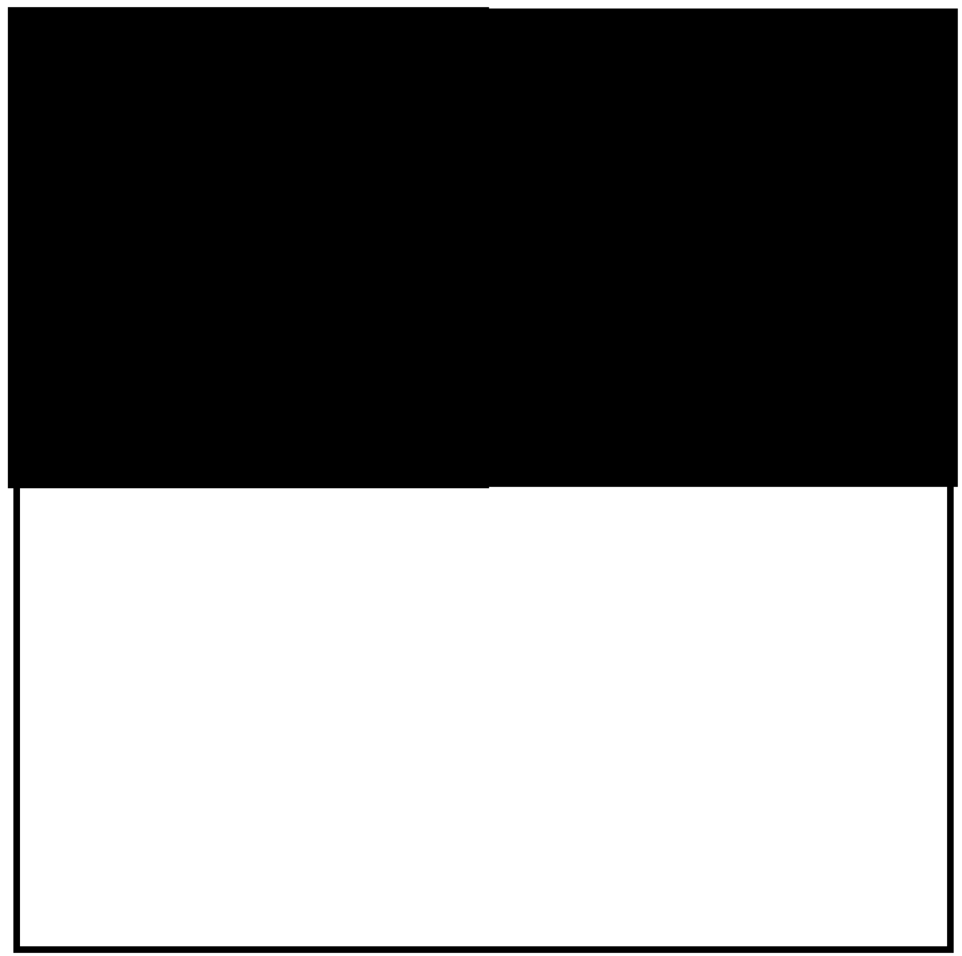
正方形を被覆する



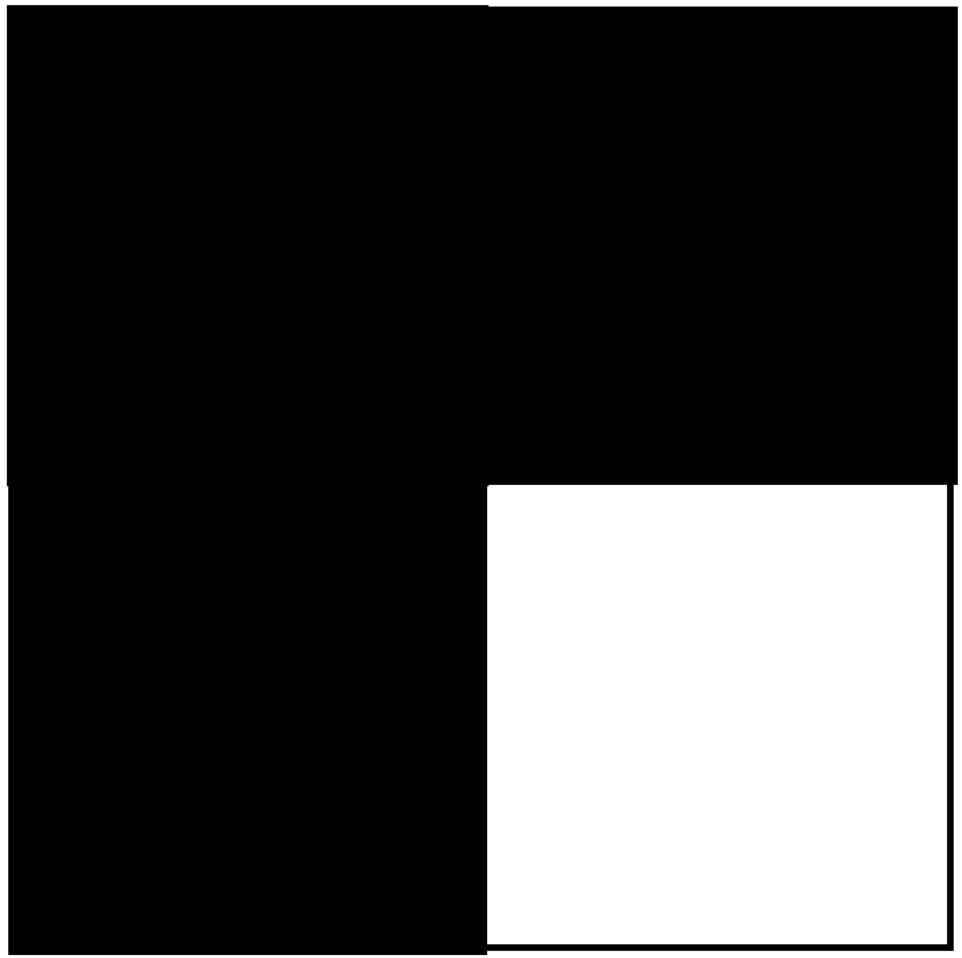
正方形を被覆する



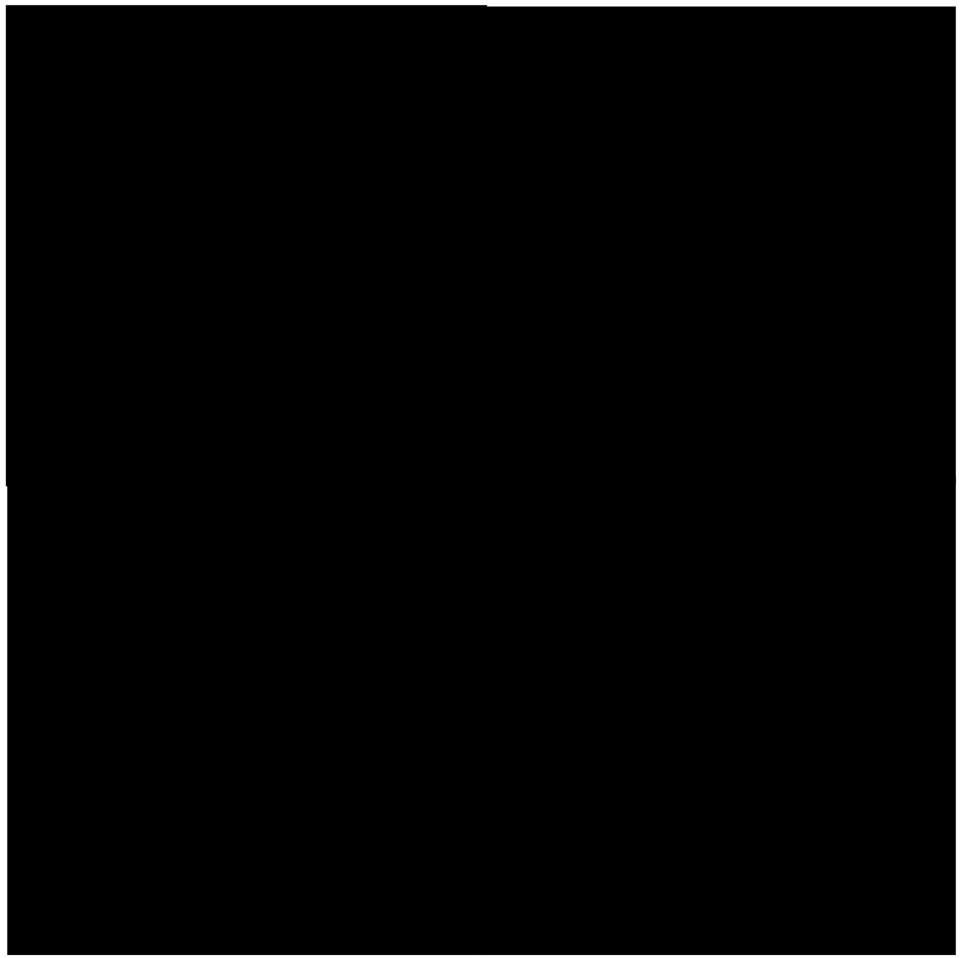
正方形を被覆する



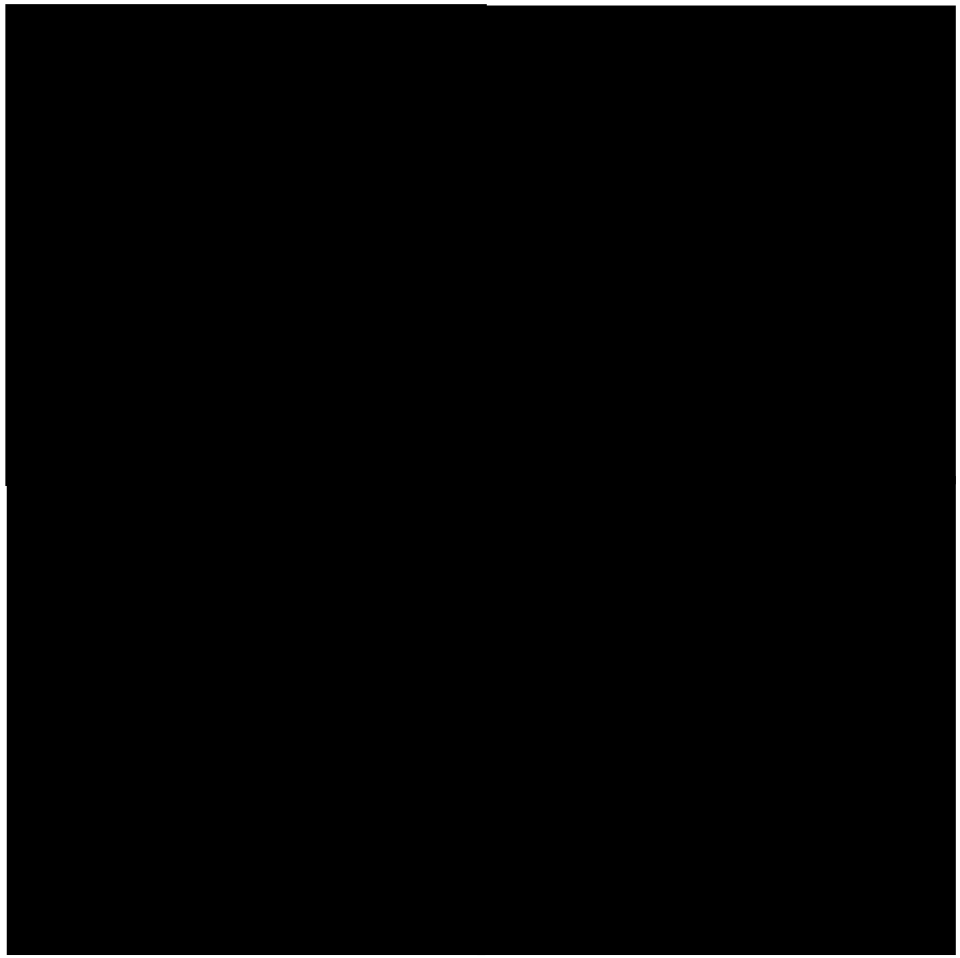
正方形を被覆する



正方形を被覆する



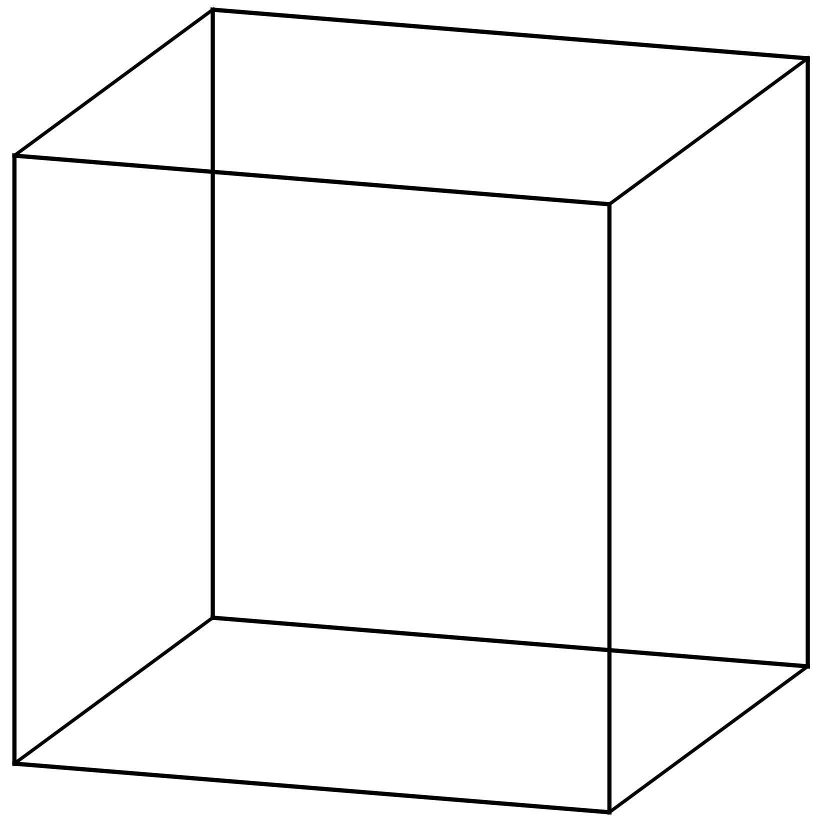
正方形を被覆する



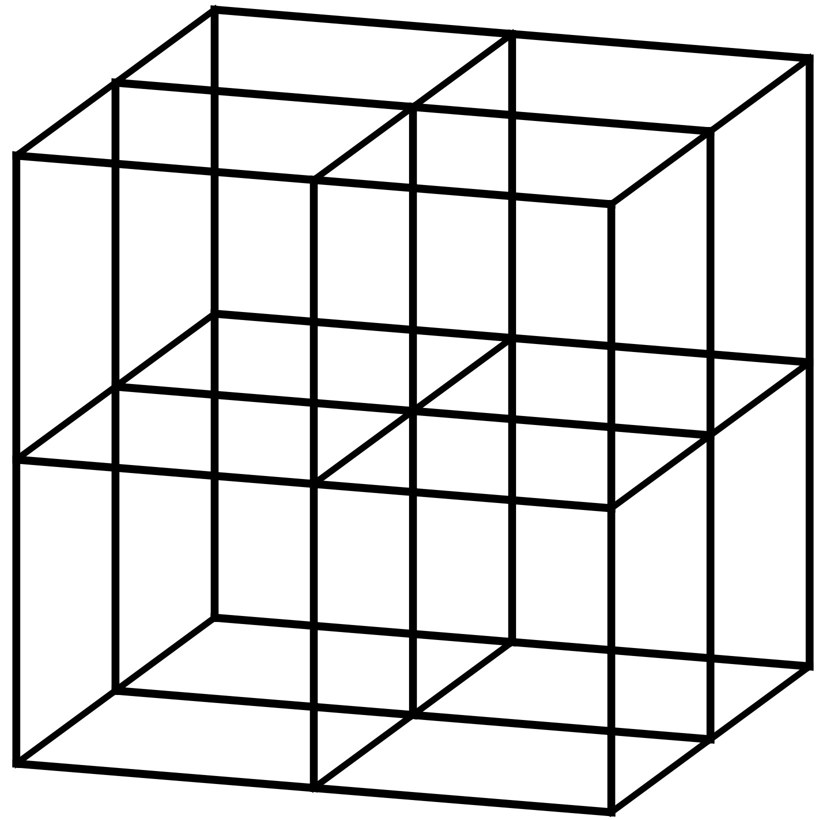
被覆に必要な小正方形 (縮小比 $\frac{1}{2}$) の数 $= 4$

立方体を被覆する

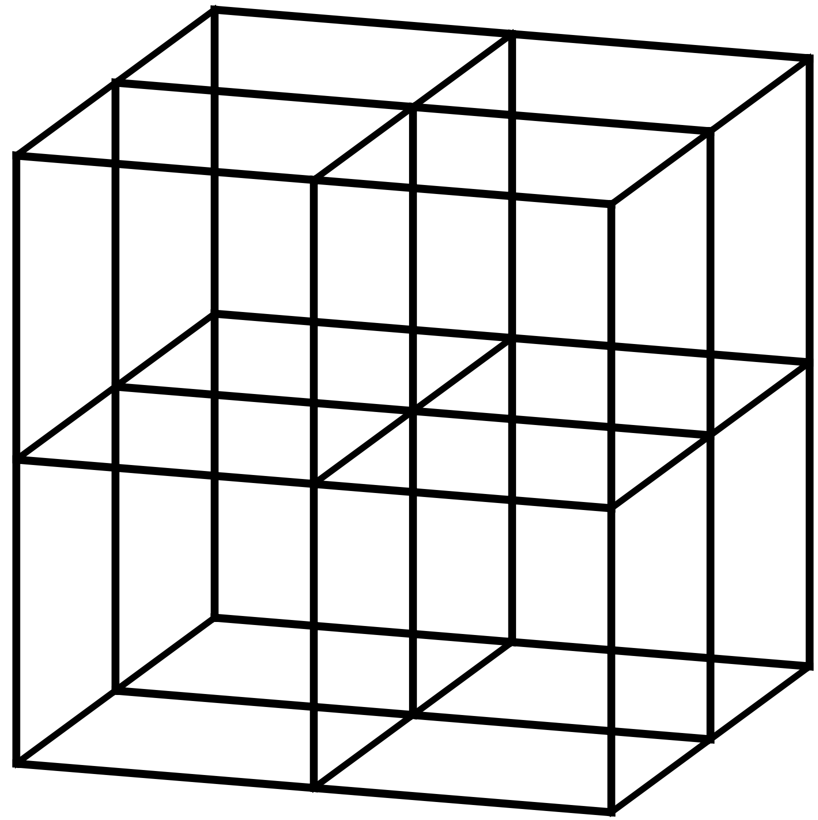
立方体を被覆する



立方体を被覆する



立方体を被覆する



被覆に必要な小立方体 (縮小比 $\frac{1}{2}$) の数 $= 8$

被覆により次元を測る

	縮小比	個数
線 分	1/2	2
正方形	1/2	4
立方体	1/2	8

被覆により次元を測る

	縮小比	個数
線 分	1/2	$2 = 2^1$
正方形	1/2	4
立方体	1/2	8

被覆により次元を測る

	縮小比	個数
線 分	$1/2$	$2 = 2^1$
正方形	$1/2$	$4 = 2^2$
立方体	$1/2$	8

被覆により次元を測る

	縮小比	個数
線 分	$1/2$	$2 = 2^1$
正方形	$1/2$	$4 = 2^2$
立方体	$1/2$	$8 = 2^3$

被覆により次元を測る

	縮小比	個数
線 分	$1/2$	$2 = 2^1$
正方形	$1/2$	$4 = 2^2$
立方体	$1/2$	$8 = 2^3$
一般化	$1/\epsilon$	$N(\epsilon) = \epsilon^D$

$$N(\epsilon) = \epsilon^D$$

被覆による次元の定義

被覆による次元の定義

- ある図形の次元 D を，その図形を $1/\epsilon$ に縮小した小図形で，元の図形を被覆するのに必要な数 $N(\epsilon)$ を用いて，

$$N(\epsilon) = \epsilon^D$$

と定義する．すなわち，

$$\boxed{D = \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}}$$

被覆による次元の定義

- ある図形の次元 D を，その図形を $1/\epsilon$ に縮小した小図形で，元の図形を被覆するのに必要な数 $N(\epsilon)$ を用いて，

$$N(\epsilon) = \epsilon^{D}$$

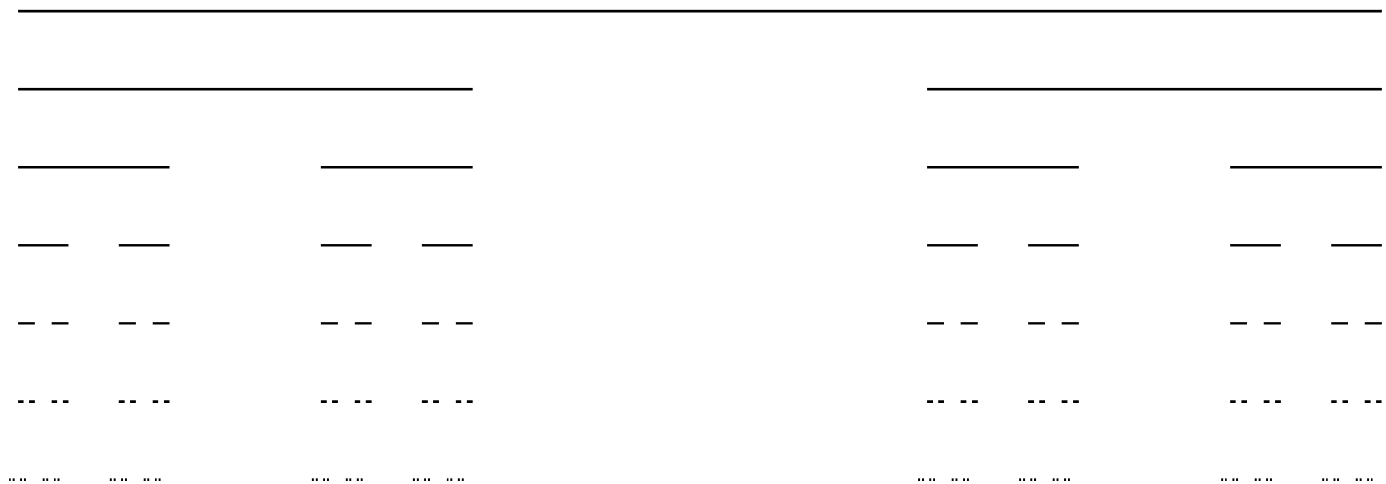
と定義する．すなわち，

$$\boxed{D = \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon}}$$

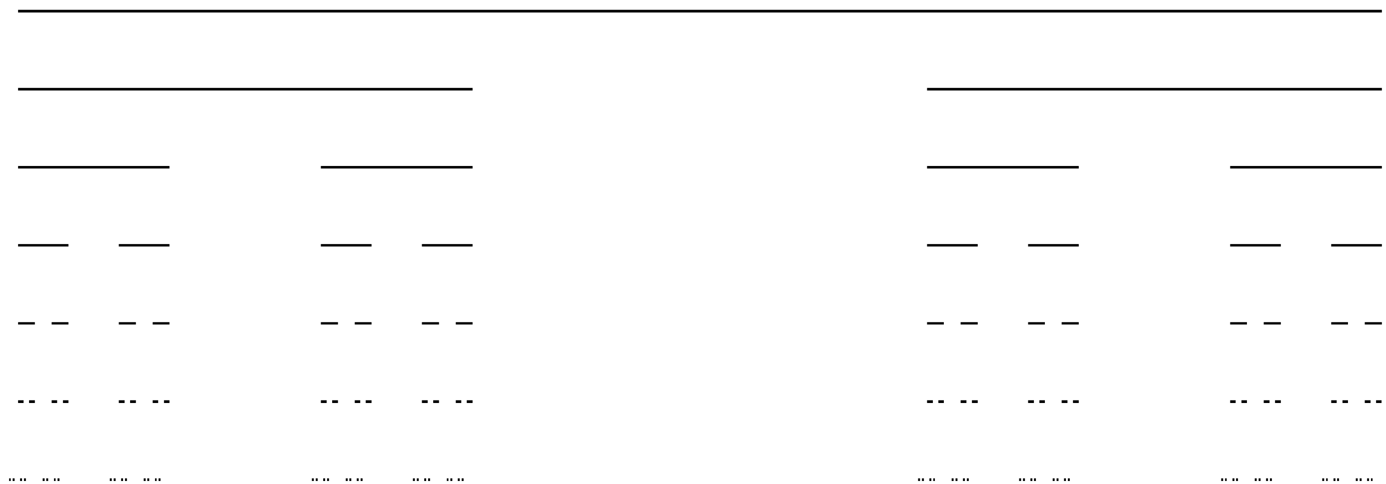
- この次元の定義を用いて，カントール集合の次元を測るとどうなるだろうか?

カントール集合の次元 D_{Cantor} は**?**

カントール集合の次元 D_{Cantor} は?



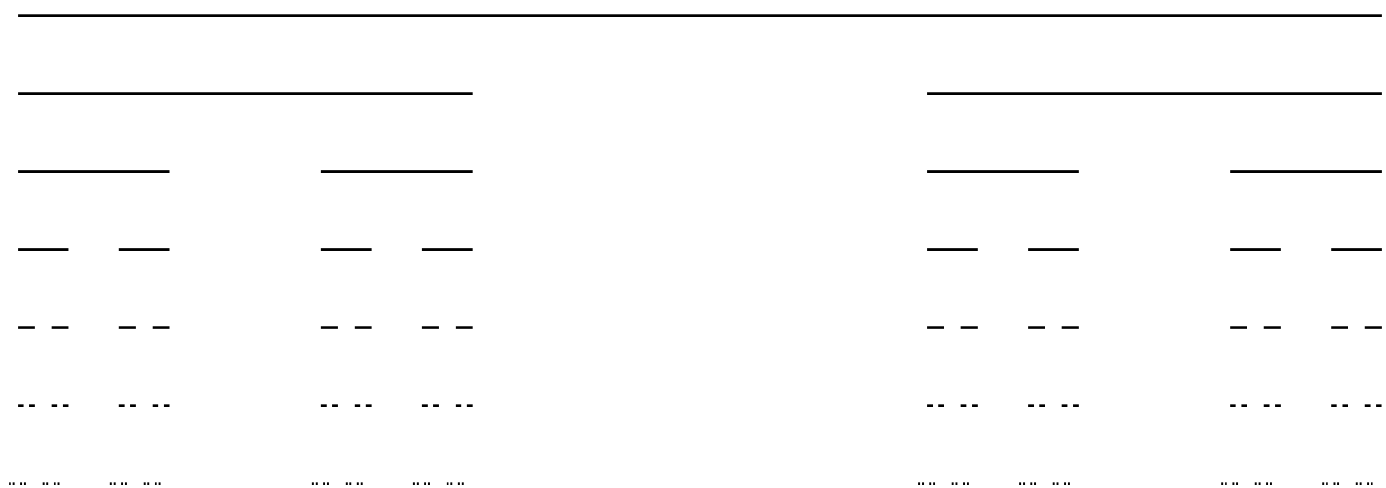
カントール集合の次元 D_{Cantor} は?



$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{3}, N(\epsilon) = 2 \text{ なので},$$

$$\boxed{D_{\mathrm{Cantor}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.630929754\cdots}$$

カントール集合の次元 D_{Cantor} は?



$$\frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{3}, N(\epsilon) = 2 \text{ なので,}$$

$$\boxed{D_{\mathrm{Cantor}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.630929754\cdots}$$

$\longrightarrow$ 次元値が非整数

非整数次元の意味

	D	濃度	長さ	面積	体積
点	0	N	0	0	0
線分	1	∞	L	0	0
正方形	2	∞	∞	S	0
立方体	3	∞	∞	∞	V

1. 各図形の次元に対応した尺度 $\rightarrow N, L, V, S$ に収束
2. それ以外は 0 あるいは ∞ に発散

$0, \infty$ にならない尺度の次元値 = その図形の次元値

カントール集合の複雑さ

	D	濃度	長さ	面積	体積
点	0	N	0	0	0
カントール集合	0.6309	∞	0	0	0
線分	1	∞	L	0	0
正方形	2	∞	∞	S	0
立方体	3	∞	∞	∞	V

- カントール集合にとって 0 にも ∞ にもならない尺度
- その尺度の次元値が $0.6309\ldots$ 次元
- 複雑さが 0 次元と 1 次元の中間

実験の内容 (第 2 週目)

- フラクタル図形の作り方を理解する.

  カントール集合,
  コッホ曲線,
  シェルピンスキーギャスケット

- フラクタル図形を描画してみよう.
  実験サポートページ
  http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru/Lectures/ 参照
- フラクタル図形の次元値を計算してみよう.

カントール集合を描く

1. まずは線分を描くことが必要.
2. 左と右の短い (1/3 倍) の線分を描く
3. 繰り返し

関数 m– ファイル `drawLine.m`

drawLine.m

```
function l=drawLine(x0,y0,x1,y1)
% DRAWLINE draws a line
% between (x0,y0) and (x1,y1).

if nargin<1,x0=0; end
if nargin<2,y0=0; end
if nargin<3,x1=1; end
if nargin<4,y1=0; end

l=plot([x0 x1],[y0 y1],'Color',[0 0 0],'LineWidth',3.2);
```

drawCantorSet.m

```
function drawCantorSet(x, L, t)
% DRAWCANTORSET draws the Cantor Set.
% from x on the vertical axis with the length L
% t is the number of iteration.
% Usage drawCantorSet(x,L,t).

% Default values.
if nargin<1, x=0; end
if nargin<2, L=1; end
if nargin<3, t=0; end

if t==0,
    drawLine(x,0,x+L,0);
else
    hold on
    drawCantorSet(      x, L/3, t-1);
    drawCantorSet(x+2*L/3, L/3, t-1);
    hold off
end

axis square, axis off
```

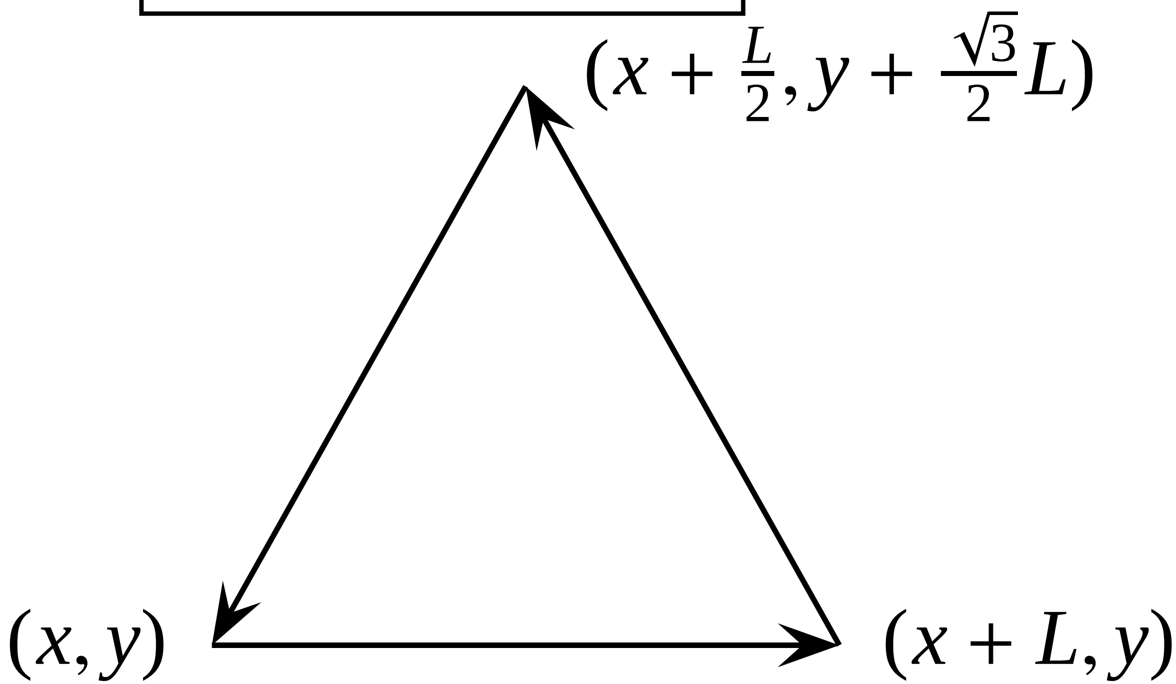
drawTriangle.m

```
function s=drawTriangle(x,y,L)
% DRAWTRIANGLE draws an equilateral triangle
% at (x,y) with the length L
% Usage: s=drawTriangle(x,y,L)

% Default Values
if nargin<1,x=0; end
if nargin<2,y=0; end
if nargin<3,L=1; end

% Draw an equilateral triangle and
% fill its inside in black.
s=fill([x x+L x+L/2 x],[y y y+sqrt(3)/2*L y],'k');
```

fill コマンドの使い方

```
s=fill([x x+L x+L/2 x],[y y y+sqrt(3)/2*L y],'k');
```

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+L \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x+\dfrac{L}{2} \\ y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}L \end{pmatrix}$$



drawGasket.m

```
function s=drawGasket(x,y,L,t)
% DRAWGASKET draws Sierpinski Gasket
% at (x,y) with the length L.
% t is the number of iteration.

if nargin<1, x=0; end
if nargin<2, y=0; end
if nargin<3, L=1; end
if nargin<4, t=0; end

if t==0,
    drawTriangle(x,y,L);
else
    hold on
    ここに，再帰的な命令を 3 回書く
    hold off
end

axis square
axis off
```

drawChapeau.m 前半部分

```
function l=drawChapeau(x0,y0,x1,y1)
% DRAWCHAPEAU draws a shape of "Mexican hat,"
% in 2-dimensional plane between (x0,y0) and (x1,y1).
% Usage : drawChapeau(x0,y0,x1,y1)

% Default values
if nargin<1,x0=0;end
if nargin<2,y0=0;end
if nargin<3,x1=1;end
if nargin<4,y1=0;end

L=sqrt((x0-x1)^2+(y0-y1)^2);
A=[0 L/3 L/2 L*2/3 L; 0 0 L*sqrt(3)/6 0 0];
[n,m]=size(A);
T = [x0*ones(1,m); y0*ones(1,m)];
theta=acos(dot([1 0],[x1-x0 y1-y0])/norm([x1-x0 y1-y0]));
if y1<y0,theta=-theta;end
```

drawChapeau.m 後半部分

```
if theta ~=0
    R = rotation(theta);
    A = R*A;
end

A=A+T;

l=plot(A(1,:),A(2,:),'LineWidth',2);
```

drawKoch.m 前半部分

```
function drawKoch(x0,y0,x1,y1,t)
% DRAWKOCH draws von Koch curve between (x0,y0) and (x1,y1).
% t is the number of iteration.

if nargin<1,x0=0;end
if nargin<2,y0=0;end
if nargin<3,x1=1;end
if nargin<4,y1=0;end
if nargin<5,t=0; end

L=sqrt((x0-x1)^2+(y0-y1)^2);
```

drawKoch.m 後半部分

```
if t==0,
  drawChapeau(x0,y0,x1,y1);
else
    theta=pi/3;
    XL=rotation(theta)*[(x1-x0)/3 (y1-y0)/3]'...
      +[(x1+2*x0)/3 (y1+2*y0)/3]';
    XR=rotation(-theta)*[(x1-x0)/3 (y1-y0)/3]'+XL;

    hold on
    ここに，再帰的な命令を 4 回書く
    hold off
end

axis equal
axis off
```