

平成 15 年度 ICS 前期入試問題を斬る!

～ カオス学への招待 ～

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻
工学部 情報システム工学科

338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048-858-3577, Fax : 048-858-3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru/>

Copyright ©2003, Tohru Ikeguchi, Saitama University. All rights reserved.

今日の講義の内容

- ◀ 平成 15 年度 埼玉大学 個別学力検査 (前期日程) 小論文 工学部 情報システム工学科 第 2 問 において興味深い内容の出題があった。

平成 15 年度 埼玉大学個別学力検査 (前期日程)

小論文

工学部 情報システム工学科

問題冊子 3 ページ 答案用紙 2 枚 下書用紙 2 枚

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開いてはいけない。
2. 枚数の不足や、印刷不鮮明の場合は申し出ること。
3. 解答は必ず答案用紙の指定された箇所に記入すること。
4. 受験番号は、指定された問題の答案用紙 1 枚ごとに、所定の欄 2 箇所に必ず記入すること。記入を忘れたり、誤った番号を記入したときは失格となることがある。
5. 解答時間は 90 分である。
6. 試験が終了したら解答の記入をやめて、答案用紙を番号順に重ねて机上に置くこと。
7. 退室するときは、問題冊子・下書用紙を持ち帰ること。

H15年度 ICS 前期入試問題

2. 最近、カオス (chaos) という言葉を様々な場面で耳にするようになってきた。情報処理の分野においても種々の応用が期待されている。カオスは通常「混沌」と訳され、この語感からすると、複雑なルールに従うシステムが無秩序かつ大混乱な状態にあるような印象を与えるが、実は、単純なルールに従うシステムにおいてもカオスを観測することができる。

数列を用いた具体例で考えてみよう。図1はある数列 $\{x_n\}$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) を x_0 から x_{40} まで図示したものである。これを見る限り、数列は無秩序で何の規則性も認められないように見えるが、数列のとなり合う2項 x_{n-1}, x_n をそれぞれ横座標、縦座標と見なすことによって得られる平面上の点列 $\{(x_{n-1}, x_n)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots, 40$) を図示してみると、図2に示すように、全ての点は2直線から成る関数

H15年度 ICS 前期入試問題

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2(1-x), & (\frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (1)$$

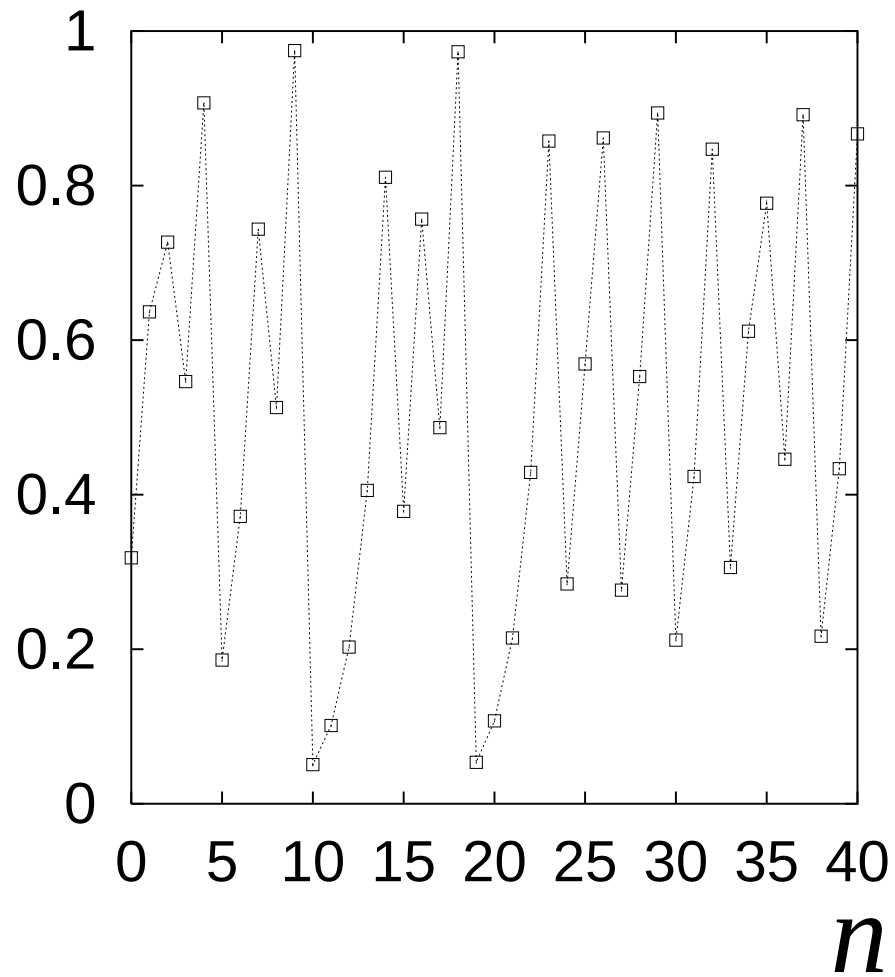
のグラフの上にならっていることがわかる。図1に示した一見無秩序な数列も、実は、初期値を $x_0 = \frac{1}{\pi}$ にとり

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

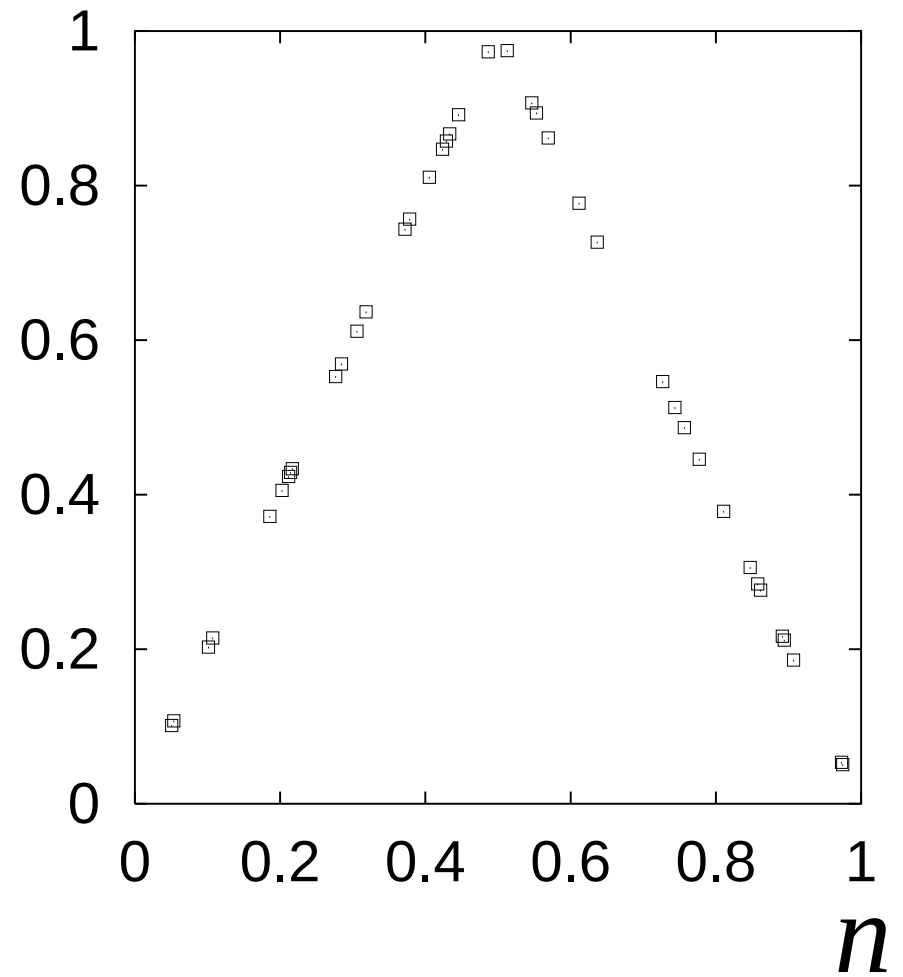
という単純な漸化式に従って生成したものにすぎないのである。

図1と図2

x_n



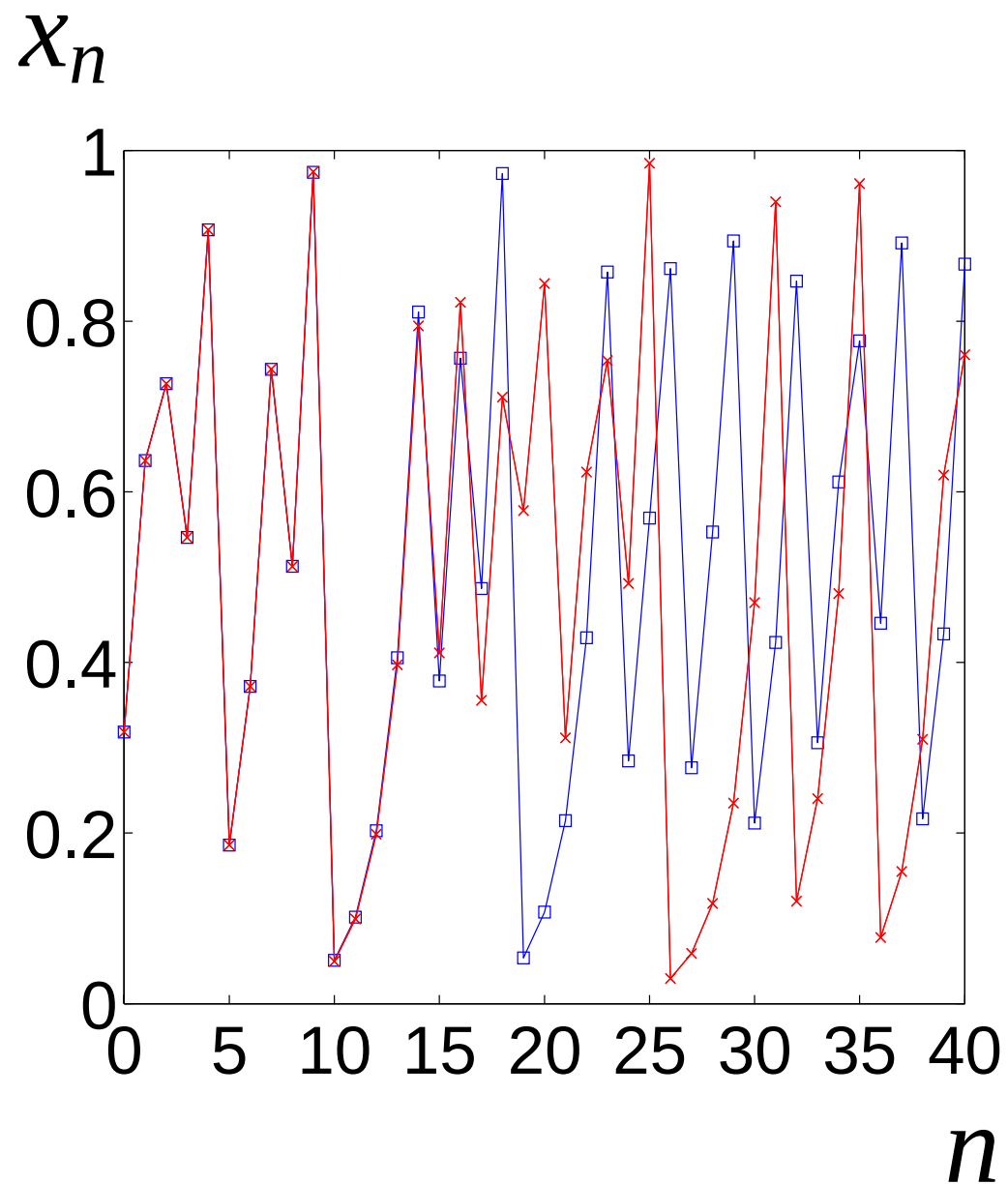
$x_n = f(x_{n-1})$



H15年度 ICS 前期入試問題

さて、カオスの特徴の一つに「初期値敏感性」と呼ばれるものがある。初期値敏感性とは、一言でいえば、初期値がほんのわずかに異なると、最終的に得られる結果が大きく異なることをいう。漸化式 (2) は初期値敏感性を持ち、カオスの最も単純な例になっている。そのことを実際の数値データで示そう。図3は、漸化式 (2) で初期値を $x_0 = \frac{1}{\pi}$ と $x_0 = \frac{1}{\pi} + 1.0 \times 10^{-6}$ とに選んだ場合に得られる2つの数列を重ねて図示したものである。ただし、□が前者、×が後者の数列である。はじめのうちは、これらの2つの数列は同じような振舞いをするが、第20項あたりから両者は全く別々の振舞いをするのが見てとれる。第20項以降の振舞いだけを見ると、初期値がわずかに 10^{-6} だけ異なる数列とはにわかには信じがたいほどに2つの数列の振舞いは異なっている。

図 3



H15年度 ICS 前期入試問題

図3に一例を示したとおり、漸化式(2)はカオスの特徴である初期値敏感性をもつ。漸化式(1)が初期値敏感性を示す理由を理解するために以下の順で検討してみよう。ただし、以下、式(1)で与えられた関数 $f(x)$ を n 回合成した関数を $f_n(x)$ とおくことにする。すなわち、

$$f_n(x) = f(f(\cdots f(f(x))\cdots)) \quad (\text{ただし } f \text{ は } n \text{ 回})$$

である。なお、関数 $f(x)$ の定義域および値域はともに $0 \leq x \leq 1$ であるから、合成関数 $f_n(x)$ の定義域も $0 \leq x \leq 1$ となることに注意せよ。

H15年度 ICS 前期入試問題

問 1 $f_2(x)$, $f_3(x)$ のグラフを図示せよ。

問 2 問 1 を参考にして $f_n(x)$ のグラフの振舞いを、図を用いるなどして説明せよ。

問 3 問 2 に基づき、図 3 で、2 つの数列の振舞いが第 20 項あたりを境に、それ以降、互いに大きく異なる理由を述べよ。

問 4 初期値が微小な正数 h だけ異なる場合、漸化式 (2) に従う 2 つの数列が全く別々の振舞いを始めるのは第何項目あたりと予想されるか説明せよ。

皆さんに考えてほしいこと

- ◀ カオス (chaos) , 混沌?
- ◀ 情報処理の分野においても種々の応用?

皆さんに考えてほしいこと

- ◀ カオス (chaos) , 混沌?
- ◀ 情報処理の分野においても種々の応用?



皆さんに考えてほしいこと

- ◀ カオス (chaos) , 混沌?
- ◀ 情報処理の分野においても種々の応用?



- ◀ カオスとは一体何なんだろうか?

皆さんに考えてほしいこと

- ◀ カオス (chaos) , 混沌?
- ◀ 情報処理の分野においても種々の応用?



- ◀ カオスとは一体何なんだろうか?
☞ 入試問題を例に考えよう.

皆さんに考えてほしいこと

- ◀ カオス (chaos) , 混沌?
- ◀ 情報処理の分野においても種々の応用?



- ◀ カオスとは一体何なんだろうか?
☞ 入試問題を例に考えよう.
- ◀ 何か凄いものなのだろうか?

皆さんに考えてほしいこと

- ◀ カオス (chaos) , 混沌?
- ◀ 情報処理の分野においても種々の応用?



- ◀ カオスとは一体何なんだろうか?
☞ 入試問題を例に考えよう .
- ◀ 何か凄いものなのだろうか?
☞ 相対論 , 量子論と並ぶ 20 世紀の 3 大発見 .

皆さんに考えてほしいこと

- ◀ カオス (chaos) , 混沌?
- ◀ 情報処理の分野においても種々の応用?



- ◀ カオスとは一体何なんだろうか?
☞ 入試問題を例に考えよう .
- ◀ 何か凄いものなのだろうか?
☞ 相対論 , 量子論と並ぶ 20 世紀の 3 大発見 .
- ◀ どんなことに役立つのだろうか?

皆さんに考えてほしいこと

- ◀ カオス (chaos) , 混沌?
- ◀ 情報処理の分野においても種々の応用?



- ◀ カオスとは一体何なんだろうか?
☞ 入試問題を例に考えよう .
- ◀ 何か凄いものなのだろうか?
☞ 相対論 , 量子論と並ぶ 20 世紀の 3 大発見 .
- ◀ どんなことに役立つのだろうか?
☞ 情報処理分野の最先端の研究成果を紹介しよう .

出題中の数列 x_n を生み出す規則

◀ 出題文中の数列 x_n は ,

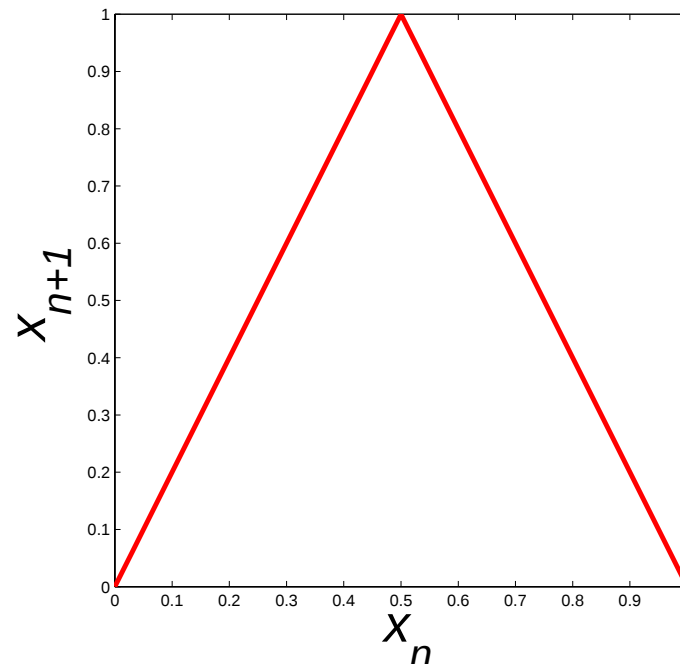
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2(1-x), & (\frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

というグラフの上にのっている .

◀ つまり x_n と x_{n+1} の関係は ,

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & (0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2(1-x_n), & (\frac{1}{2} < x_n \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

テント写像 (Tent map)



◀ ポイント

- ❑ 変数は x_n だけ . 1 次元 or 1 自由度 .
- ❑ x_n が与えられたら x_{n+1} は完全に決定できる
- ❑ 但し , x_n と x_{n+1} の関係は , 非線形 (nonlinear)

それって非線形？

◀ 非線形 (nonlinear) とは？

それって非線形?

◀ 非線形 (nonlinear) とは?

☞ 線形でないものの全て

それって非線形？

◀ 非線形 (nonlinear) とは？

☞ 線形でないものの全て

◀ それでは、線形とは？

□ $y = ax + b$

□ $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$

それって非線形？

◀ 非線形 (nonlinear) とは？

☞ 線形でないものの全て

◀ それでは、線形とは？

□ $y = ax + b$

□ $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$

◀ テント写像は非線形？

それって非線形?

◀ 非線形 (nonlinear) とは?

☞ 線形でないものの全て

◀ それでは、線形とは?

□ $y = ax + b$

□ $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$

◀ テント写像は非線形? ⇒ YES!

それって非線形?

◀ 非線形 (nonlinear) とは?

☞ 線形でないものの全て

◀ それでは、線形とは?

□ $y = ax + b$

□ $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$

◀ テント写像は非線形? ⇒ YES!

∴ 1 種類の 1 次式で表わせないから

それって非線形?

◀ 非線形 (nonlinear) とは?

☞ 線形でないものの全て

◀ それでは、線形とは?

□ $y = ax + b$

□ $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$

◀ テント写像は非線形? ⇒ YES!

∴ 1 種類の 1 次式で表わせないから



☞ 区分線形 (piecewise linear)

カオスって何？

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

カオスって何？

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

1. 少数自由度 $\Rightarrow$ テント写像の変数 $\in \mathbb{R}^1$

カオスって何？

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

1. 少数自由度 $\Rightarrow$ テント写像の変数 $\in \mathbb{R}^1$
2. 決定論的 $\Rightarrow$ テント写像では現状態 x_n が決まれば、
次状態 x_{n+1} を完全に決定できる

カオスって何?

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

1. 少数自由度 $\Rightarrow$ テント写像の変数 $\in \mathbb{R}^1$
2. 決定論的 $\Rightarrow$ テント写像では現状態 x_n が決まれば ,
次状態 x_{n+1} を完全に決定できる
3. 非線形性 $\Rightarrow x_n$ から x_{n+1} の関係は非線形

カオスって何？

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

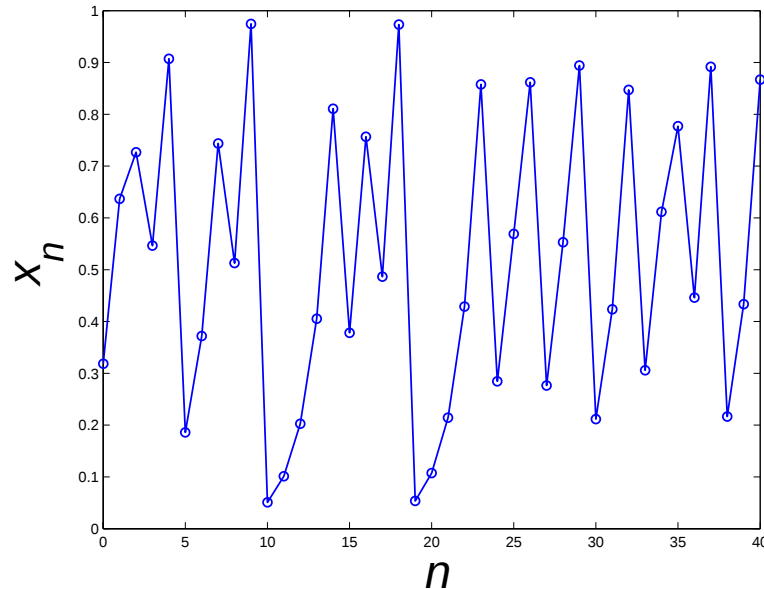
1. 少数自由度 $\Rightarrow$ テント写像の変数 $\in \mathbb{R}^1$
2. 決定論的 $\Rightarrow$ テント写像では現状態 x_n が決まれば、
次状態 x_{n+1} を完全に決定できる
3. 非線形性 $\Rightarrow x_n$ から x_{n+1} の関係は非線形

◀ 疑問

- ❑ 本当に複雑？
- ❑ 本当に予測不可能？

カオスって複雑な現象？

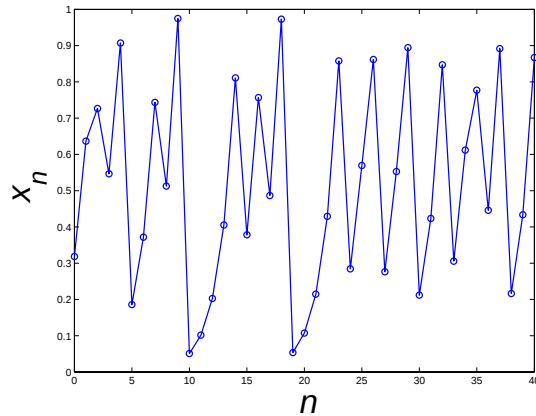
◀ 出題では $n = 40$ までのグラフしか示されていなかった。



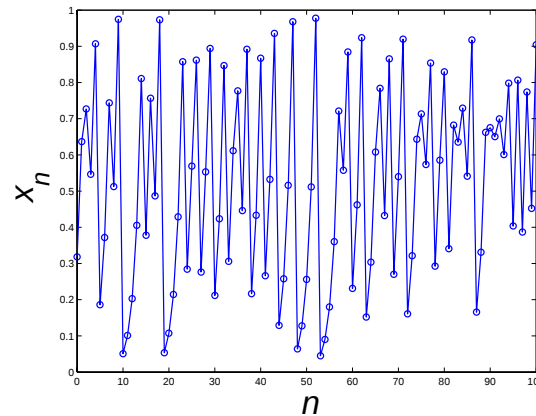
もし n を 40 よりも大きくしたら，

- ❑ ある一定の値に収束したりしないの？ (固定点)
- ❑ 何種類かの値を交互にとるようになったりしないの？ (周期点)

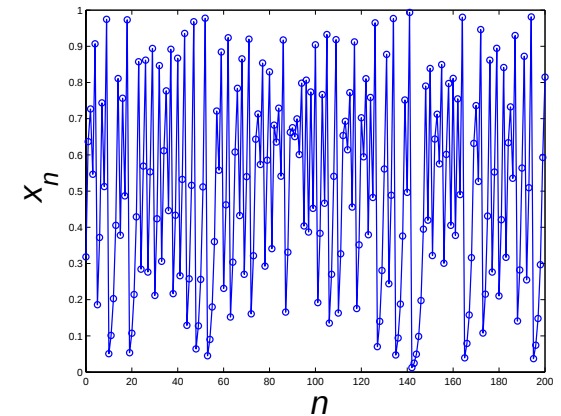
テント写像は複雑らしい



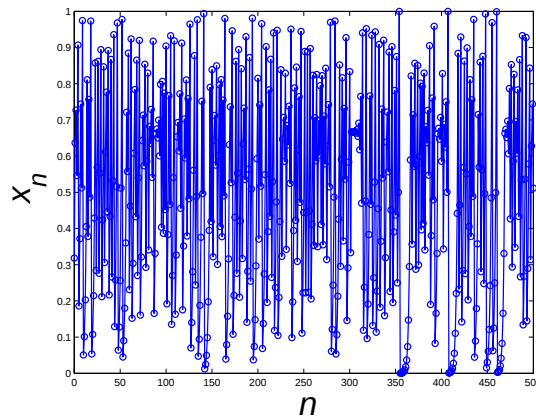
$$0 \leq n \leq 40$$



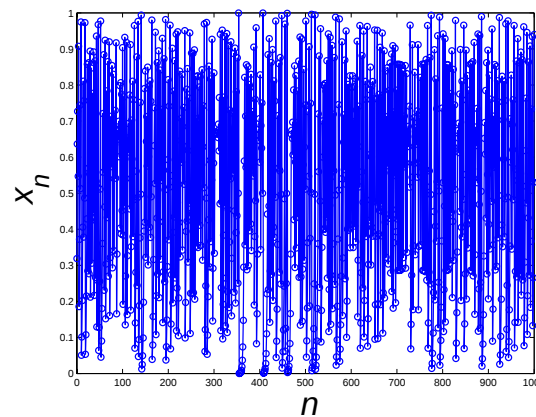
$$0 \leq n \leq 100$$



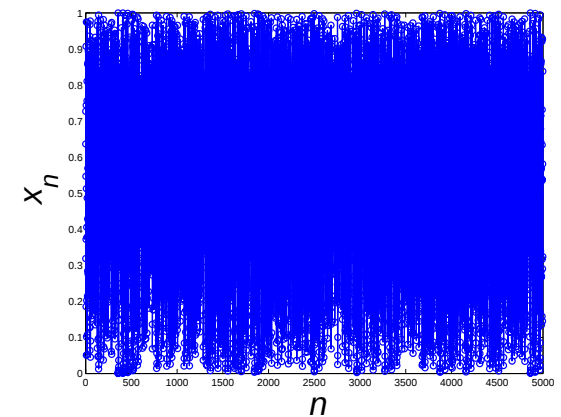
$$0 \leq n \leq 200$$



$$0 \leq n \leq 500$$



$$0 \leq n \leq 1000$$



$$0 \leq n \leq 5000$$

いつまでも異なる値が出るのは何故?

◀ テント写像

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & (0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2(1 - x_n), & (\frac{1}{2} < x_n \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を用いて繰り返し計算を何回続けても，二度と同じ x_n は出てこないようである．

☞ 非周期的な応答

◀ そのカラクリを考えるために， $0 \leq x_n \leq 1$ の値を 2 進法で表わして考えよう．

いつまでも異なる値が出るのは何故?

◀ テント写像

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n, & (0 \leq x_n \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ 2(1 - x_n), & (\frac{1}{2} < x_n \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

を用いて繰り返し計算を何回続けても，二度と同じ x_n は出てこないようである．

👉 非周期的な応答

- ◀ そのカラクリを考えるために， $0 \leq x_n \leq 1$ の値を 2 進法で表わして考えよう．
- ◀ 任意の実数を 2 進法で表現するとどうなりますか？

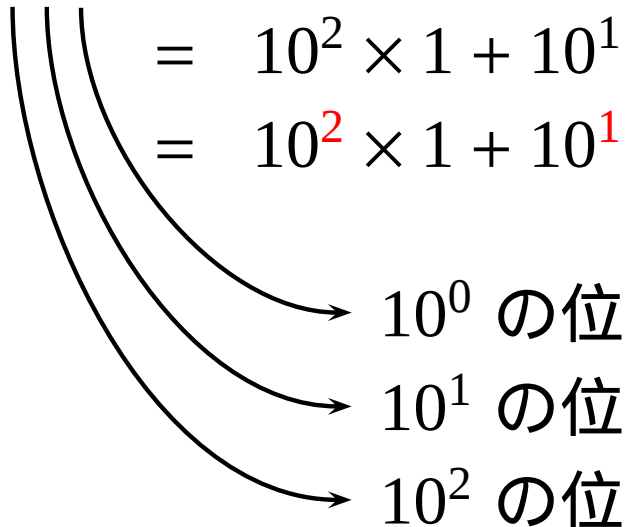
整数の10進法表現

◀ 10進法とは？

0 ~ 9 の10種類の自然数を用いる表現法．

例：0, 2, 4, 7, 32, 128, 2012...

◀ 128 という整数は，100 が1個，10 が2個，1 が8個．

$$\begin{aligned} 128 &= 100 \times 1 + 10 \times 2 + 1 \times 8 \\ &= 10^2 \times 1 + 10^1 \times 2 + 1 \times 8 \\ &= 10^2 \times 1 + 10^1 \times 2 + 10^0 \times 8 \end{aligned}$$


10^0 の位
 10^1 の位
 10^2 の位

整数の2進法表現

◀ 2進法とは，どのような表現か？

2種類の自然数で表す表現法．

↪ 0, 1

例：0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, ...

◀ 例えば，2進法での $111_{(2)}$ という整数は，

$$\textcolor{red}{1}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{1}_{(2)} = 2^2 \times \textcolor{red}{1} + 2^1 \times \textcolor{blue}{1} + 2^0 \times \textcolor{green}{1}$$

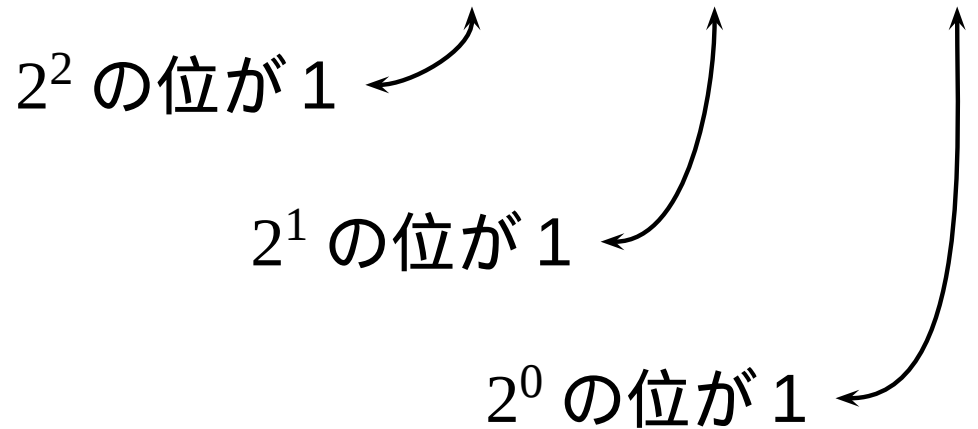
と考えることになる．

整数の2進法表現

◀ 2進法での $111_{(2)}$ という整数は ,

$$\textcolor{red}{1}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{1}_{(2)} = 2^2 \times \textcolor{red}{1} + 2^1 \times \textcolor{blue}{1} + 2^0 \times \textcolor{green}{1}$$

2^2 の位が 1



2^1 の位が 1

2^0 の位が 1

◀ つまり , 2進法での $111_{(2)}$ は ,

$2^2 = 4$ が 1 個 , $2^1 = 2$ が 1 個 , $2^0 = 1$ が 1 個

ということ .

2進法と10進法の関係

◀ 2進法 → 10進法

$$111_{(2)} = 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 7_{(10)}$$

◀ 10進法 → 2進法

$$\begin{aligned} 31_{(10)} &= 16 + 8 + 4 + 2 \\ &= 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 \\ &= 11111_{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60_{(10)} &= 32 + 16 + 8 + 4 \\ &= 2^5 \times 1 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0 \\ &= 111100_{(2)} \end{aligned}$$

2進法と10進法の関係

◀ 10進法を用いると，ある整数 Z は，

$$\begin{aligned} Z_{(10)} &= \dots D_4 D_3 D_2 D_1 D_0 \\ &= \dots + 10^4 D_4 + 10^3 D_3 + 10^2 D_2 + 10^1 D_1 + 10^0 D_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 10^i D_i \quad (D_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \end{aligned}$$

◀ 2進法を用いると，ある整数 Z は，

$$\begin{aligned} Z_{(2)} &= \dots B_4 B_3 B_2 B_1 B_0 \\ &= \dots + 2^4 B_4 + 2^3 B_3 + 2^2 B_2 + 2^1 B_1 + 2^0 B_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i B_i \quad (B_i = 0, 1) \end{aligned}$$

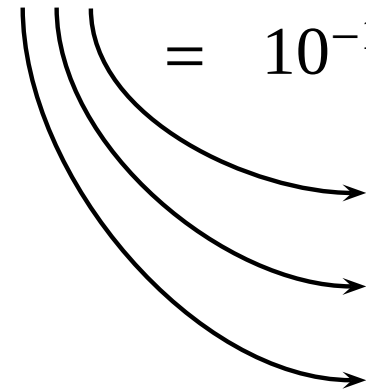
実数の 10 進法表現

◀ 10 進法とは？

0 ~ 9 の 10 種類の自然数を用いる表現法 .

例 : 0.1, 2.2, 3.4, 0.07, 0.32, 0.128, 20.12...

◀ 0.128 という実数は , 0.1 が 1 個 , 0.01 が 2 個 , 0.001 が 8 個 .

$$\begin{aligned} 0.\textcolor{red}{1}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{8} &= 0.1 \times \textcolor{red}{1} + 0.01 \times \textcolor{blue}{2} + 0.001 \times \textcolor{green}{8} \\ &= 10^{-1} \times \textcolor{red}{1} + 10^{-2} \times \textcolor{blue}{2} + 10^{-3} \times \textcolor{green}{8} \end{aligned}$$


10^{-1} の位
 10^{-2} の位
 10^{-3} の位

実数の 2 進法表現

◀ 2 進法とは , どのような表現であったか?

2 種類の**自然数**で表す表現法 .

↪ 0, 1

◀ 従って , 2 進法での実数の例は以下のようなになる .

例 : 0, 0.1, 0.11, 1.101, 11.111, 0.00001111, ...

◀ 例えば , 2 進法での $0_2 111$ という実数は ,

$$0_2 \textcolor{red}{1}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{1} = 2^{-1} \times \textcolor{red}{1} + 2^{-2} \times \textcolor{blue}{1} + 2^{-3} \times \textcolor{green}{1}$$

と考えることになる .

実数 $R \in [0, 1]$ の10進法表現

実数 $R \in [0, 1]$ の10進法表現



10^{-1} の位

0123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789

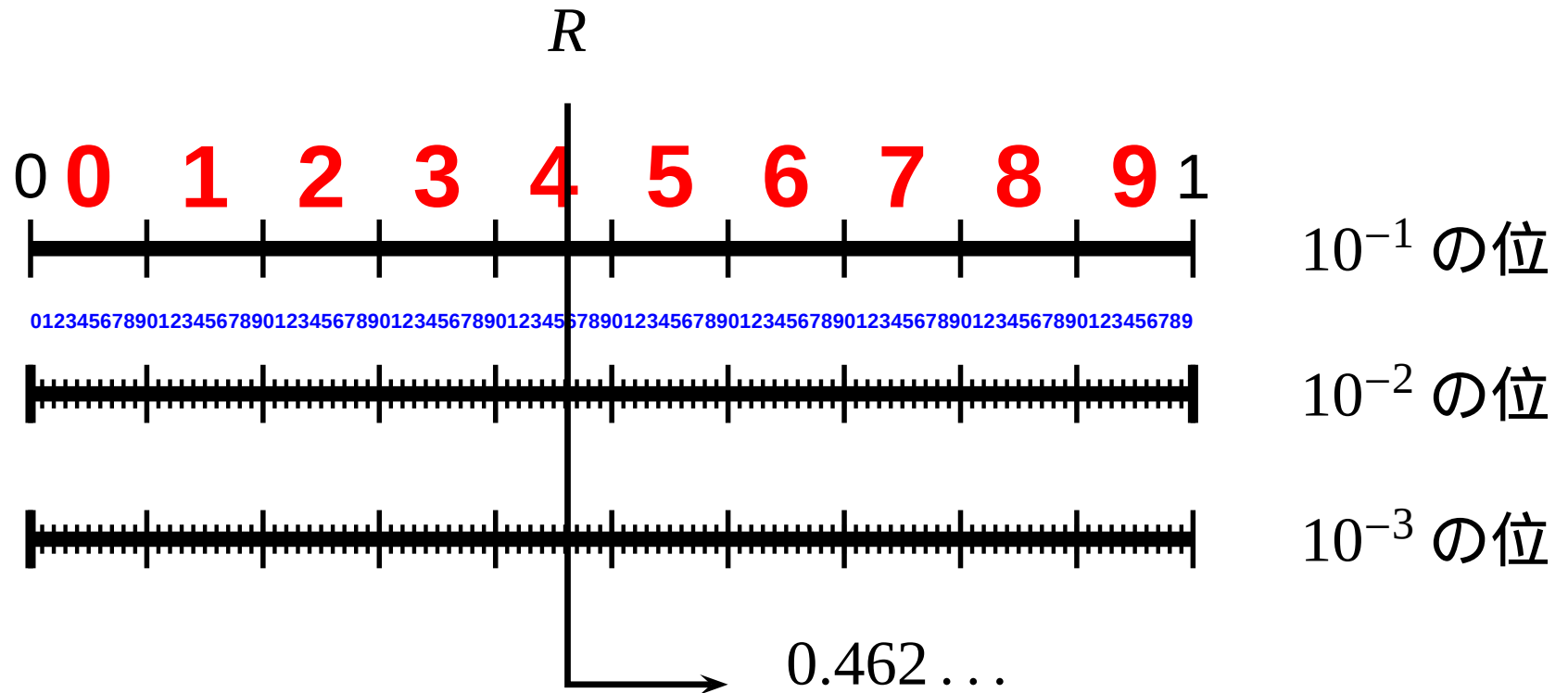


10^{-2} の位

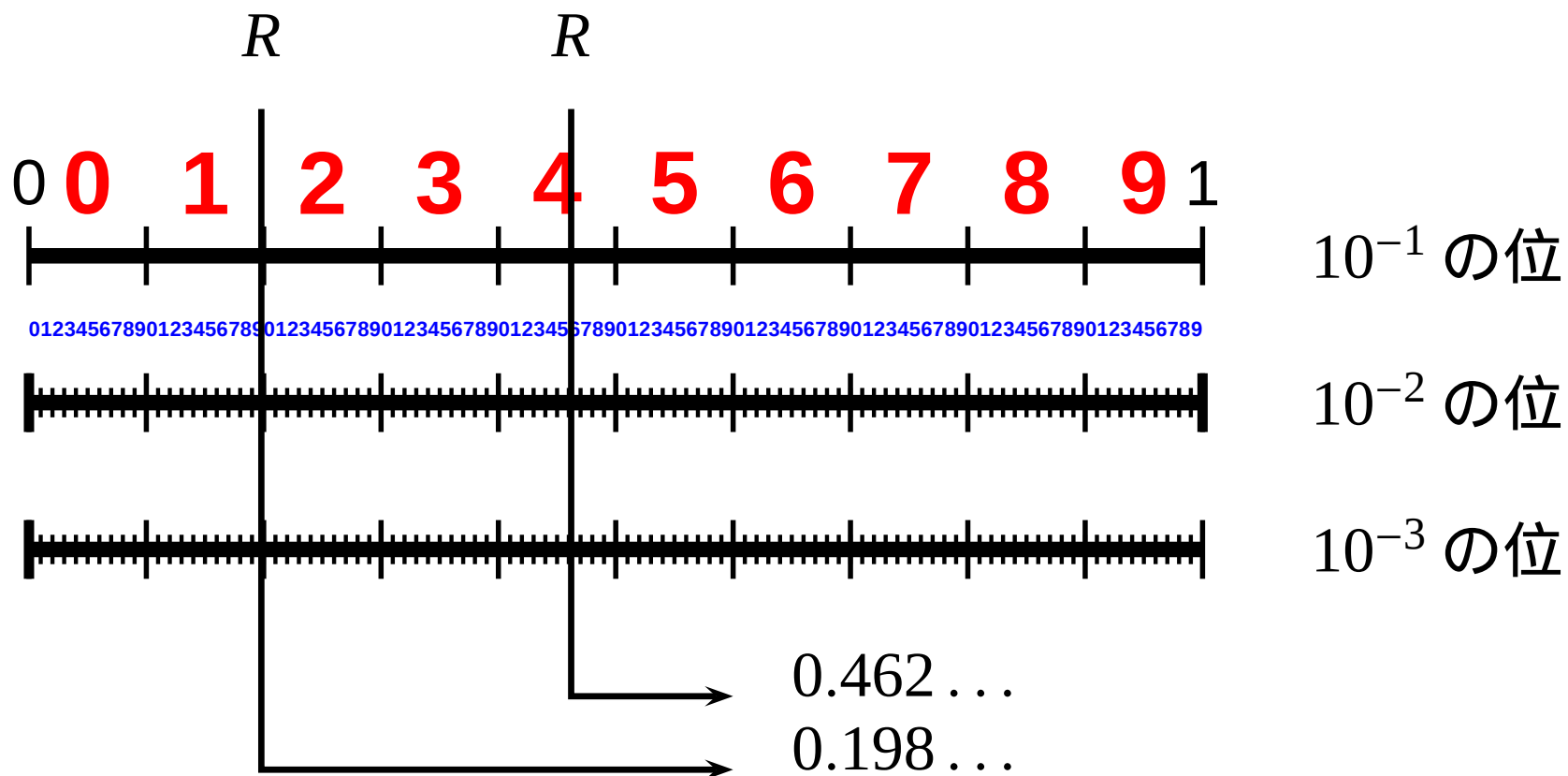


10^{-3} の位

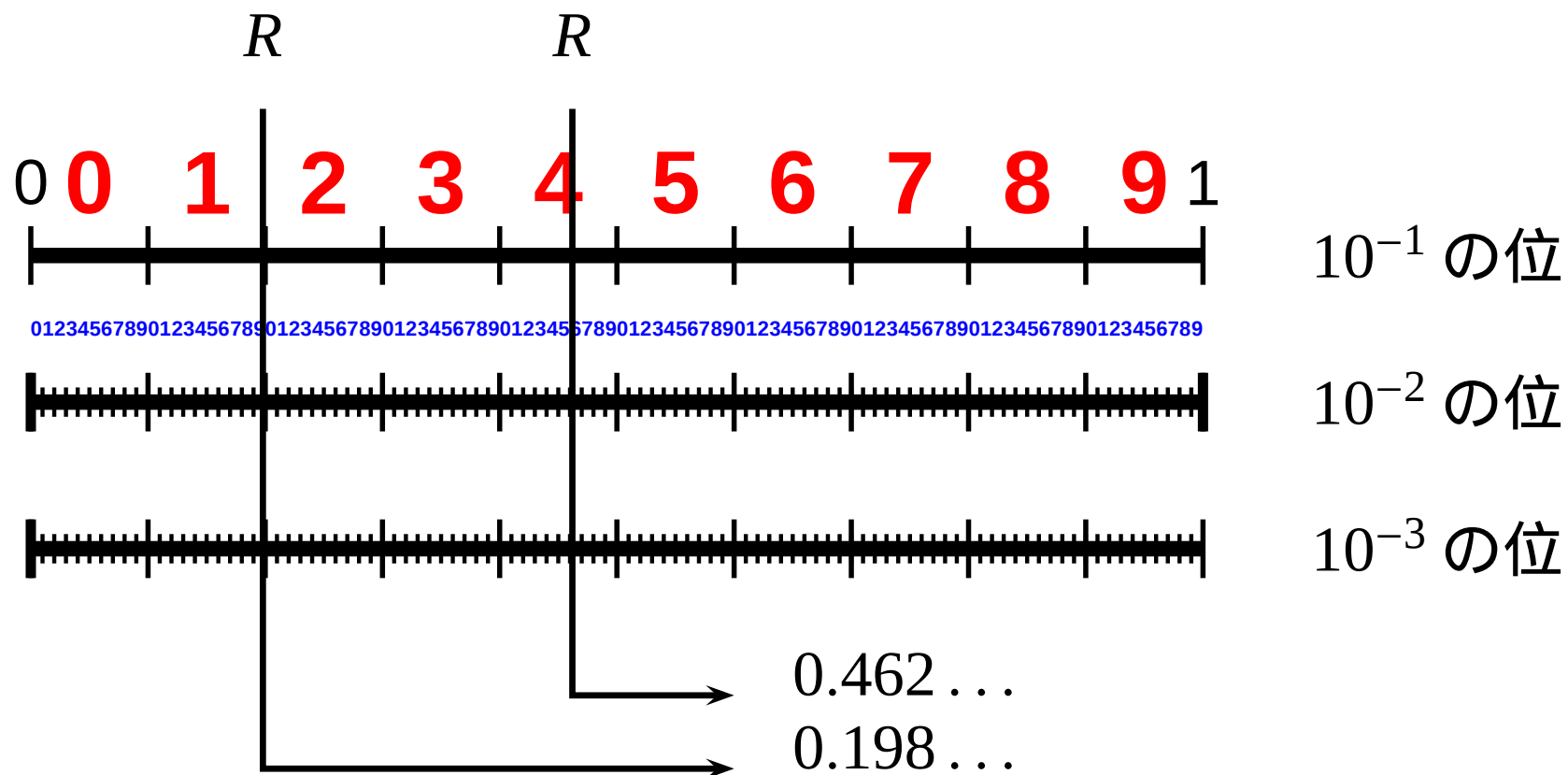
実数 $R \in [0, 1]$ の10進法表現



実数 $R \in [0, 1]$ の10進法表現



実数 $R \in [0, 1]$ の10進法表現

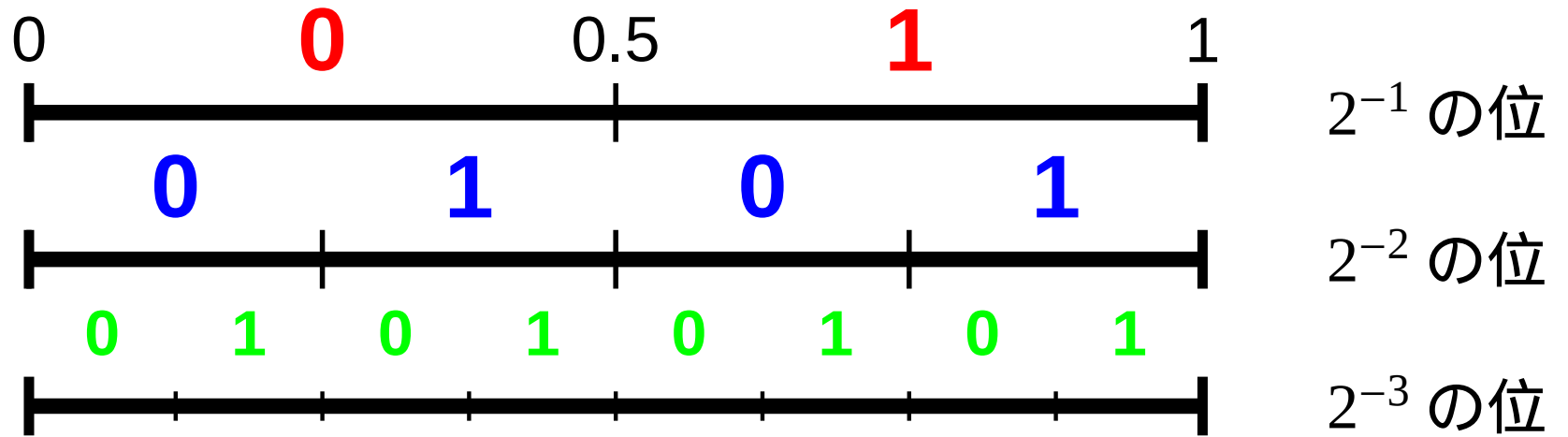


$$R = 0.d_1d_2d_3d_4\dots = \frac{d_1}{10^1} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \dots$$

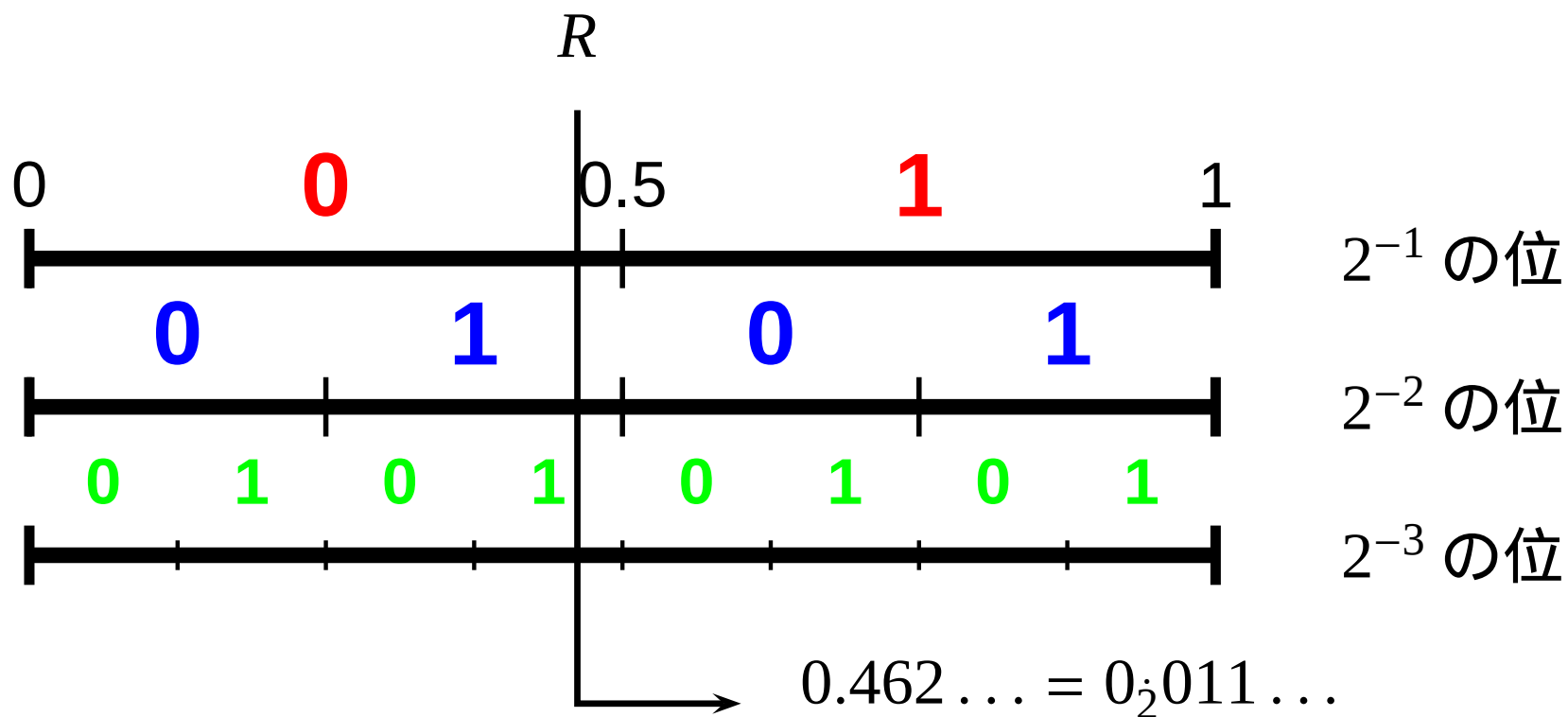
$(d_i = 0, 1, 2, \dots, 9)$

実数 $R \in [0, 1]$ の 2 進法表現

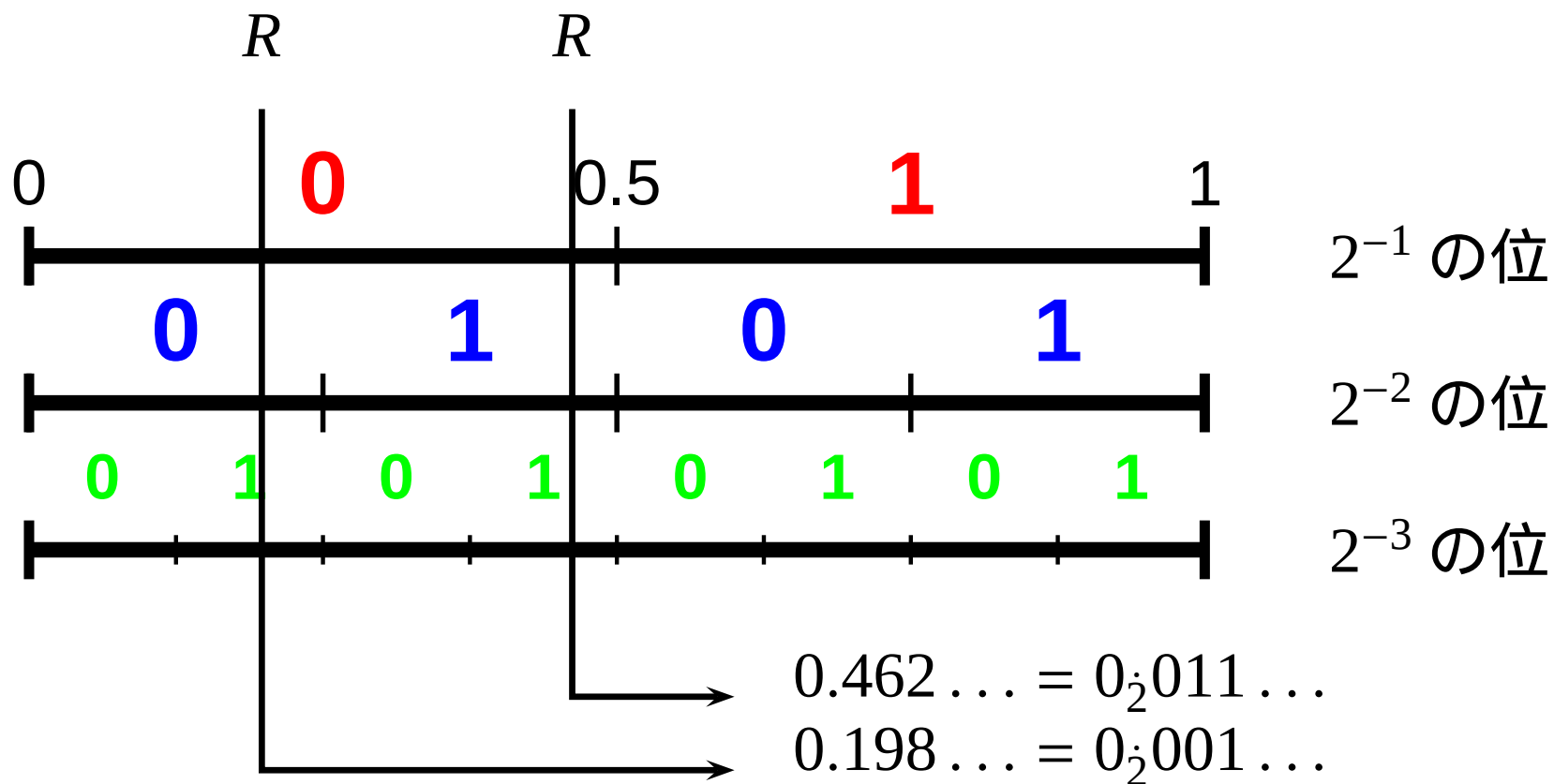
実数 $R \in [0, 1]$ の 2 進法表現



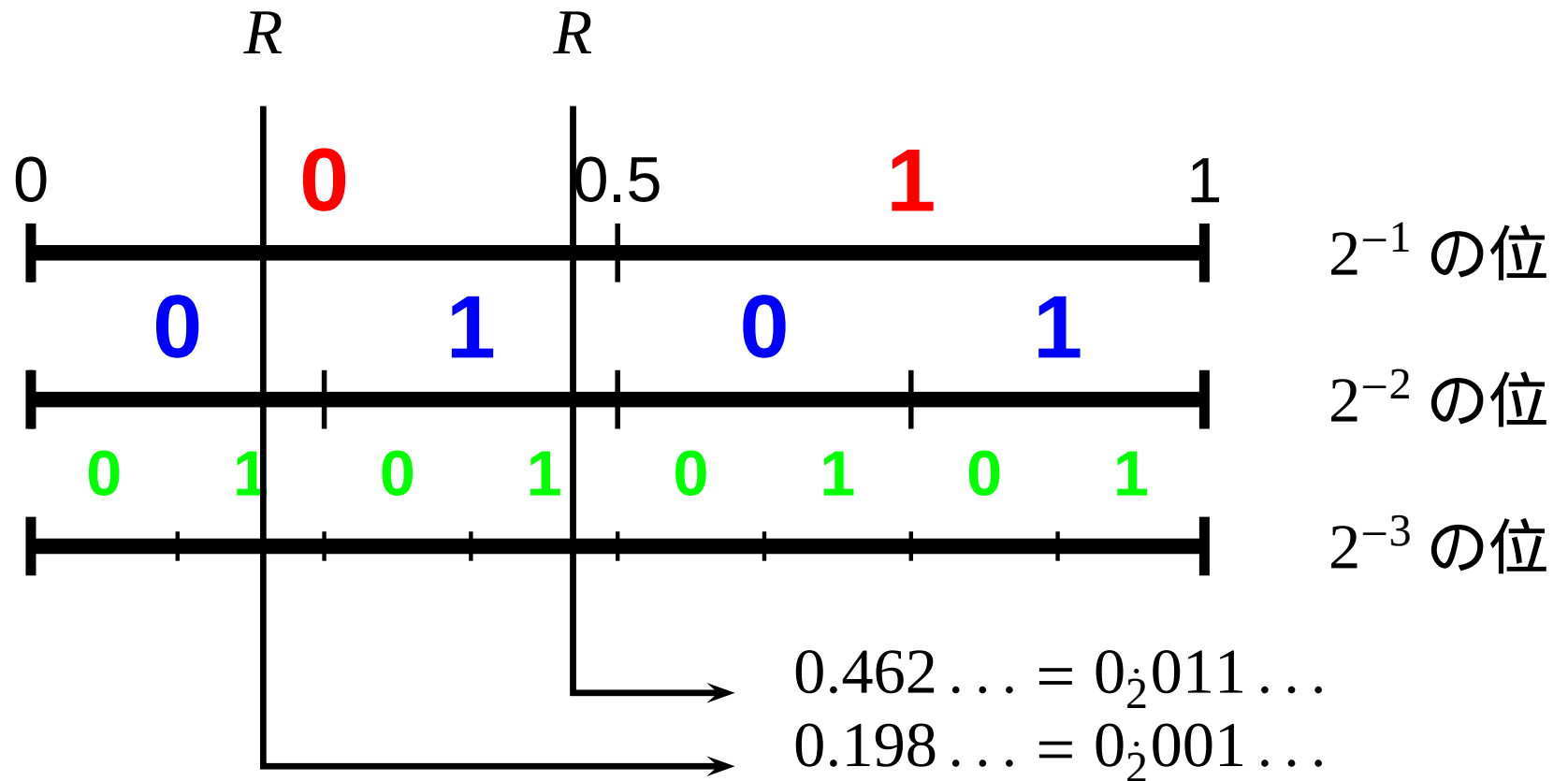
実数 $R \in [0, 1]$ の 2 進法表現



実数 $R \in [0, 1]$ の 2 進法表現



実数 $R \in [0, 1]$ の 2 進法表現



$$R = 0_2 b_1 b_2 b_3 b_4 \dots = \frac{b_1}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \frac{b_4}{2^4} + \dots$$

$(b_i = 0, 1)$

x_0 の2進法表現

◀ 初期値 x_0 の2進法による表現

$$\begin{aligned}x_0 &= 0.b_1b_2b_3\dots b_ib_{i+1}\dots \\&= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \frac{b_4}{2^4} + \dots + \frac{b_i}{2^i} + \frac{b_{i+1}}{2^{i+1}} + \dots\end{aligned}$$

但し , $b_i = 0, 1$

◀ この x_0 をテント写像により変換するとどうなるか?

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n \leq 0.5) \\ 2 - 2x_n & (0.5 \leq x_n \leq 1) \end{cases}$$

x_0 の2進法表現

◀ 初期値 x_0 の2進法による表現

$$\begin{aligned}x_0 &= 0.b_1b_2b_3\dots b_ib_{i+1}\dots \\&= \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \frac{b_4}{2^4} + \dots + \frac{b_i}{2^i} + \frac{b_{i+1}}{2^{i+1}} + \dots\end{aligned}$$

但し , $b_i = 0, 1$

◀ この x_0 をテント写像により変換するとどうなるか?

$$x_1 = f(x_0) = \begin{cases} 2x_0 & (0 \leq x_0 \leq 0.5) \\ 2 - 2x_0 & (0.5 \leq x_0 \leq 1) \end{cases}$$

☞ $0 \leq x_0 \leq 0.5$ と $0.5 \leq x_0 \leq 1$ に分けて考える

x_0 をテント写像により変換

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n \leq 0.5) \\ 2 - 2x_n & (0.5 \leq x_n \leq 1) \end{cases}$$

$$x_0 = 0.b_1b_2b_3b_4 \dots b_ib_{i+1} \dots$$

◀ $0 \leq x_0 \leq 0.5$ のときは $b_1 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_0 = 0.0b_2b_3b_4 \dots b_ib_{i+1} \dots \\ &= 2 \left(\frac{0}{2^1} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \frac{b_4}{2^4} + \dots + \frac{b_i}{2^i} + \frac{b_{i+1}}{2^{i+1}} + \dots \right) \\ &= \frac{b_2}{2^1} + \frac{b_3}{2^2} + \frac{b_4}{2^3} + \dots + \frac{b_i}{2^{i-1}} + \frac{b_{i+1}}{2^i} + \dots \\ &= 0.b_2b_3b_4 \dots b_ib_{i+1} \dots \end{aligned}$$

x_0 をテント写像により変換

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} 2x_n & (0 \leq x_n \leq 0.5) \\ 2 - 2x_n & (0.5 \leq x_n \leq 1) \end{cases}$$

$$x_0 = 0.b_1b_2b_3b_4 \dots b_ib_{i+1} \dots$$

◀ $0.5 \leq x_0 \leq 1$ のとき $b_1 = 1$ なので, ビット反転を $\bar{b}_i$ として

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - 2x_0 = 10.b_1b_2b_3b_4 \dots b_ib_{i+1} \dots \\ &= 1.1111 \dots - 1.b_1b_2b_3b_4 \dots b_ib_{i+1} \dots \\ &= 0.\bar{b}_1\bar{b}_2\bar{b}_3\bar{b}_4 \dots \bar{b}_i\bar{b}_{i+1} \dots \end{aligned}$$

◀ まとめると

$$x_1 = \begin{cases} 0.b_2b_3b_4 \dots b_ib_{i+1} \dots & (0 \leq x_0 \leq 0.5) \\ 0.\bar{b}_2\bar{b}_3\bar{b}_4 \dots \bar{b}_i\bar{b}_{i+1} \dots & (0.5 \leq x_0 \leq 1) \end{cases}$$

テント写像のしていることって？

◀ まとめると

$$x_1 = \begin{cases} 0.2b_2b_3b_4 \dots b_ib_{i+1} \dots & (0 \leq x_0 \leq 0.5) \\ 0.2\bar{b}_2\bar{b}_3\bar{b}_4 \dots \bar{b}_i\bar{b}_{i+1} \dots & (0.5 \leq x_0 \leq 1) \end{cases}$$

(ビット反転が入ってはいるけれど),

- x_0 の最上位ビット b_1 を取り去る .
- 残った桁 $b_2b_3b_4 \dots$ を 1 桁シフトアップ

◀ $x_0 \rightarrow x_1$ だけでなく, $x_1 \rightarrow x_2$ の場合も,

「最上位の桁が取り去られ, 残った桁をシフトアップする」

ことは同じである .

◀ もちろん $x_n \rightarrow x_{n+1}$ の場合でも同じ!

x_0 のパターンで場合分け

◀ x_0 を 2 進法で表現すると, 以下の 3 パターンとなる. 各場合について, どのような x_n が生み出されるか考えてみよう.

1. x_0 が有理数 (rational number)

(a) x_0 が有限小数となる場合

$$x_0 = 0_2 b_1 b_2 b_3 \dots b_N 000000 \dots$$

(b) x_0 が循環小数となる場合

$$x_0 = 0_2 \overbrace{b_1 b_2 \dots b_N}^{b_1 b_2 \dots b_N} \dots = 0_2 \dot{b}_1 b_2 \dots \dot{b}_N$$

2. x_0 が無理数 (irrational number)

(a) x_0 は無限小数となる

$$x_0 = 0_2 b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_{N-1} b_N b_{N+1} b_{N+2} \dots$$

x_0 が有限小数のとき

$$x_0 = 0_2 b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 \dots b_N 000000 \dots$$

1. $\{b_1, b_2, \dots, b_{N-1}, b_N\}$ に 1 が偶数個

$$x_N = 0_2 00000000 \dots$$

$$x_{N+1} = 0_2 00000000 \dots$$

2. $\{b_1, b_2, \dots, b_{N-1}, b_N\}$ に 1 が奇数個

$$x_N = 0_2 11111111 \dots$$

$$x_{N+1} = 0_2 00000000 \dots$$

👉 最終的には $x_n = 0_2 00000000 \dots = 0$ に収束

x_0 が循環小数のとき

$$x_0 = 0.\dot{b}_1 b_2 \dots b_{N-1} \dot{b}_N b_1 b_2 \dots b_{N-1} \dot{b}_N \dots = 0.\dot{b}_1 b_2 \dots b_{N-1} \dot{b}_N$$

◀ $N - 1$ 回後は

$$x_{N-1} = \begin{cases} 0.\dot{b}_N b_1 b_2 \dots b_{N-1} & : \{b_1, b_2, \dots, b_{N-1}\} \text{ に } 1 \text{ が偶数個} \\ 0.\dot{\bar{b}}_N \bar{b}_1 \bar{b}_2 \dots \bar{b}_{N-1} & : \{b_1, b_2, \dots, b_{N-1}\} \text{ に } 1 \text{ が奇数個} \end{cases}$$

□ $b_N = 0$ のとき $x_N = 0.\dot{b}_1 b_2 \dots \dot{b}_N = x_0$

□ $b_N = 1$ のとき $x_N = 0.\dot{\bar{b}}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \dots \dot{\bar{b}}_N$

◆ $b_1 = 0$ であれば, $x_{N+1} = 0.\dot{b}_2 b_3 \dots b_N \dot{b}_1 = x_1$

◆ $b_1 = 1$ であれば, $x_{N+1} = 0.\dot{\bar{b}}_2 \bar{b}_3 \dots \bar{b}_N \dot{\bar{b}}_1 = x_1$

☞ $x_n = x_0$ ($b_N = 0$ のとき), $x_{n+1} = x_1$ ($b_N = 1$ のとき)

x_0 のパターンで場合分け

◀ x_0 が無限小数のとき

$$x_0 = 0.b_1b_2 \dots b_{N-1}b_Nb_{N+1} \dots$$

☞ 各 b_i の値に関係なく, 二度と同じ値が出てくることはない

◀ 以上の3パターンをまとめると ...

1. x_0 が有理数 (rational number)

(a) x_0 が有限小数となる場合 $\Rightarrow$ 最終的には0に収束

(b) x_0 が循環小数となる場合 $\Rightarrow$ 最終的には周期的

2. x_0 が無理数 (irrational number) $\Rightarrow$ 最終的には非周期的 $\Rightarrow 0, 1$ が非周期的に現れる

有理数と無理数の濃度

◀ 問題

区間 $[0, 1]$ から，適当なある値を x_0 として指定したら，それは有理数になるだろうか？ それとも無理数になるだろうか？

◀ これに答えるためには，無限集合の要素数を「数える」ための「濃度」 (cardinality) という考え方をを用いる．

□ 数を数える

例：兎が五羽，箆笥が一棹，烏賊が三杯，提灯が二張

□ 1 以上の自然数と兎，箆笥，烏賊，提灯の数を 対応 させるということ

□ 集合 A と集合 B との間に，全単射 $F : A \rightarrow B$ が存在すれば， A と B の濃度は等しい．

単射，全射，全単射

A, B を集合とする． $F : A \rightarrow B$ を A から B への写像とする．

- ◀ $x \neq y (x, y \in A) \implies F(x) \neq F(y)$ となるとき， F を単射 (injection) あるいは1対1 (one-to-one) 写像 という．
- ◀ 任意の $b \in B$ に対し， $b = F(a)$ となる $a \in A$ が存在するとき， F を全射 (surjection) あるいは上への (onto) 写像という．
- ◀ F が単射かつ全射のとき，双射あるいは全単射 (bijection) という．

問題：以下の F_1, F_2, F_3 は単射?全射?全単射? $\Rightarrow$ 課題 1

1. $F_1(x) = 2x - 1, F_1 : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$
2. $F_2(x) = x^3, F_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$
3. $F_3(x) = \cos x, F_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

区間 $[0, 1]$ における実数の濃度

- ◀ 有理数集合の濃度は、 1 以上の自然数の集合 N の濃度と一致する。つまり、有理数集合 Q は可算集合 (countable set)
- ◀ 無理数集合の濃度は、 1 以上の自然数の集合 N の濃度よりも大きい。つまり、無理数集合 I は非可算集合 (uncountable set)

区間 $[0, 1]$ における実数の濃度

- ◀ 有理数集合の濃度は、 1 以上の自然数の集合 N の濃度と一致する。つまり、有理数集合 Q は可算集合 (countable set)
 - ◀ 無理数集合の濃度は、 1 以上の自然数の集合 N の濃度よりも大きい。つまり、無理数集合 I は非可算集合 (uncountable set)
1. 有理数の濃度 = 可算無限 (自然数と 1 対 1 対応)
⇒ 有理数は、区間 $[0, 1]$ にスカスカにしか存在していない
 2. 無理数の濃度 = 非可算無限
⇒ 無理数は、区間 $[0, 1]$ にビッシリと存在している

区間 $[0, 1]$ における実数の濃度

- ◀ 有理数集合の濃度は，1以上の自然数の集合 N の濃度と一致する．つまり，有理数集合 Q は可算集合 (countable set)
 - ◀ 無理数集合の濃度は，1以上の自然数の集合 N の濃度よりも大きい．つまり，無理数集合 I は非可算集合 (uncountable set)
1. 有理数の濃度 = 可算無限 (自然数と1対1対応)
⇒ 有理数は，区間 $[0, 1]$ にスカスカにしか存在していない
 2. 無理数の濃度 = 非可算無限
⇒ 無理数は，区間 $[0, 1]$ にビッシリと存在している



区間 $[0, 1]$ の実数を適当に選んだとき，殆んど全ての場合無理数になる

テント写像は初期値 x_0 によって ...

1. x_0 が有理数 (rational number)

(a) x_0 が有限小数となる場合 $\Rightarrow$ 最終的には 0 に収束

(b) x_0 が循環小数となる場合 $\Rightarrow$ 最終的には周期的

2. x_0 が無理数 (irrational number) $\Rightarrow$ 最終的には非周期的



x_0 を $[0, 1]$ から適当に選ぶと無理数になる



テント写像から創り出される x_n の系列は ,
殆んど全ての場合非周期的!!

カオスって何?

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

1. 少数自由度 $\Rightarrow$ テント写像の変数 $\in \mathbb{R}^1$
2. 決定論的 $\Rightarrow$ テント写像では現状態 x_n が決まれば ,
次状態 x_{n+1} を完全に決定できる
3. 非線形性 $\Rightarrow x_n$ から x_{n+1} の関係は非線形

◀ 疑問

- ❑ 本当に複雑?
- ❑ 本当に予測不可能?

カオスって何?

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

1. 少数自由度 $\Rightarrow$ テント写像の変数 $\in \mathbb{R}^1$
2. 決定論的 $\Rightarrow$ テント写像では現状態 x_n が決まれば、
次状態 x_{n+1} を完全に決定できる
3. 非線形性 $\Rightarrow x_n$ から x_{n+1} の関係は非線形

◀ 疑問

- ❑ 本当に複雑? $\Rightarrow$ **YES!!!!!!** 無理数の複雑さ
- ❑ 本当に予測不可能?

初期値敏感性

◀ 非常に近い二つの初期値 x_0^A, x_0^B を考える .

$$\begin{cases} x_0^A &= 0. b_1 b_2 b_3 \dots b_{1000} \mathbf{1} b_{1002}^A b_{1003}^A \dots \\ x_0^B &= 0. b_1 b_2 b_3 \dots b_{1000} \mathbf{0} b_{1002}^B b_{1003}^B \dots \end{cases}$$

◀ これらの初期値の差は ,

$$|x_0^A - x_0^B| \leq \frac{1}{2^{1000}} \approx \frac{1}{10^{300}}$$

☞ 初期値の差としては殆んどないってこと .

◀ これらの x_0^A, x_0^B をテント写像の初期値として用いる . 写像を 1000 回適用したら , $|x_{1000}^A - x_{1000}^B|$ はどうなるか?

初期値敏感性

$$\begin{cases} x_{1000}^A &= 0_2 \mathbf{1} b_{1002}^A b_{1003}^A b_{1004}^A \cdots \\ x_{1000}^B &= 0_2 \mathbf{0} b_{1002}^B b_{1003}^B b_{1004}^B \cdots \end{cases}$$

- ◀ 初期値における非常に微少な誤差 (1×10^{-300} 程度) が指数関数的に拡大され, 1000 回の写像後には,

$$|x_{1000}^A - x_{1000}^B| \approx \frac{1}{2}$$

ものオーダになってしまった!

- ◀ 更に写像を続けた場合 (1001 回目以降), 全く違う値が現れる .

$$\begin{cases} x_{1001}^A &= 0_2 \overline{b_{1002}^A} \overline{b_{1003}^A} \overline{b_{1004}^A} \cdots \\ x_{1001}^B &= 0_2 b_{1002}^B b_{1003}^B b_{1004}^B \cdots \end{cases}$$



テント写像による系列は予測出来ない振る舞いを示す!!

カオス存在下での予測

◀ 初期状態としての誤差

$$|x_0^A - x_0^B| \leq \frac{1}{2^{1000}} \approx \frac{1}{10^{300}}$$

◀ 1000 回写像後の誤差

$$|x_{1000}^A - x_{1000}^B| \approx \frac{1}{2}$$

- ◀ 我々は無限の精度で状態を観測することは出来ない．
- ◀ どのようなカオス的なシステムがあるのかを事前に知っており，無限の観測精度を有していれば，完全に予測可能．



現実には我々の観測精度は有限である．

カオスって何？

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

1. 少数自由度 $\Rightarrow$ テント写像の変数 $\in \mathbb{R}^1$
2. 決定論的 $\Rightarrow$ テント写像では現状態 x_n が決まれば、
次状態 x_{n+1} を完全に決定できる
3. 非線形性 $\Rightarrow x_n$ から x_{n+1} の関係は非線形

◀ 疑問

- ❑ 本当に複雑？ $\Rightarrow$ **YES!!!!!!** 無理数の複雑さ
- ❑ 本当に予測不可能？

カオスって何?

◀ 少し格好をつけた表現

少数自由度の決定論的非線形力学系から生じる
複雑で予測不可能な現象

1. 少数自由度 $\Rightarrow$ テント写像の変数 $\in \mathbb{R}^1$
2. 決定論的 $\Rightarrow$ テント写像では現状態 x_n が決まれば、
次状態 x_{n+1} を完全に決定できる
3. 非線形性 $\Rightarrow x_n$ から x_{n+1} の関係は非線形

◀ 疑問

- ❑ 本当に複雑? $\Rightarrow$ **YES!!!!!!** 無理数の複雑さ
- ❑ 本当に予測不可能? $\Rightarrow$ **YES!!!!!!** 観測精度の有限性

カオスの源流と発展

カオスの源流と発展

◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ

カオスの源流と発展

- ◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ
 - 1. ティコ・ブラーエ … 膨大な火星観測データの蓄積

カオスの源流と発展

- ◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ
 1. ティコ・ブラーエ ... 膨大な火星観測データの蓄積
 2. ヨハネス・ケプラー ... ケプラーの3法則

カオスの源流と発展

- ◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ
 1. ティコ・ブラーエ ... 膨大な火星観測データの蓄積
 2. ヨハネス・ケプラー ... ケプラーの3法則
 3. アイザック・ニュートン ... 万有引力, 運動方程式

カオスの源流と発展

- ◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ
 1. ティコ・ブラーエ … 膨大な火星観測データの蓄積
 2. ヨハネス・ケプラー … ケプラーの3法則
 3. アイザック・ニュートン … 万有引力, 運動方程式
 4. アンリ・ポアンカレ … 3体問題の否定的解決

カオスの源流と発展

- ◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ
 1. ティコ・ブラーエ … 膨大な火星観測データの蓄積
 2. ヨハネス・ケプラー … ケプラーの3法則
 3. アイザック・ニュートン … 万有引力, 運動方程式
 4. アンリ・ポアンカレ … 3体問題の否定的解決
- ◀ カオス現象の観測レベル
 - ミクロスケールからマクロスケールまで –

カオスの源流と発展

- ◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ
 1. ティコ・ブラーエ … 膨大な火星観測データの蓄積
 2. ヨハネス・ケプラー … ケプラーの3法則
 3. アイザック・ニュートン … 万有引力, 運動方程式
 4. アンリ・ポアンカレ … 3体問題の否定的解決
- ◀ カオス現象の観測レベル
 - ミクロスケールからマクロスケールまで –
 - 1. 相対性理論, 量子力学, カオス –20世紀の3大発見–

カオスの源流と発展

- ◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ
 1. ティコ・ブラーエ … 膨大な火星観測データの蓄積
 2. ヨハネス・ケプラー … ケプラーの3法則
 3. アイザック・ニュートン … 万有引力, 運動方程式
 4. アンリ・ポアンカレ … 3体問題の否定的解決
- ◀ カオス現象の観測レベル
 - ミクロスケールからマクロスケールまで –
 1. 相対性理論, 量子力学, カオス –20世紀の3大発見–
 2. 身近な現象 –単振り子から二重振り子へ–
 - (a) 単振り子, 解析的に求解可能, 周期解
 - (b) 2重振り子 ⇒ カオスマン

カオスの源流と発展

◀ 2体問題 (17c) から 3体問題 (19c) へ

1. ティコ・ブラーエ … 膨大な火星観測データの蓄積
2. ヨハネス・ケプラー … ケプラーの3法則
3. アイザック・ニュートン … 万有引力, 運動方程式
4. アンリ・ポアンカレ … 3体問題の否定的解決

◀ カオス現象の観測レベル

– ミクロスケールからマクロスケールまで –

1. 相対性理論, 量子力学, カオス – 20世紀の3大発見 –
2. 身近な現象 – 単振り子から二重振り子へ –
 - (a) 単振り子, 解析的に求解可能, 周期解
 - (b) 2重振り子 $\Rightarrow$ カオスマン
3. 20世紀におけるコンピュータ性能の進歩

カオス研究の歴史，先駆者

カオス研究の歴史，先駆者

1. アンリ ポアンカレ，3体問題

カオス研究の歴史，先駆者

1. アンリ ポアンカレ，3体問題
2. ファンデアポル，ファンデアマルク (1927)，
ネオン管を用いた電気回路におけるカオス

カオス研究の歴史，先駆者

1. アンリ ポアンカレ，3 体問題
2. ファンデアポル，ファンデアマルク (1927)，
ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. ウラム，フォンノイマン (1947)，確率論と決定論
On combination of stochastic and deterministic process,
 $f(x) = 4x(1 - x)$

フォンノイマンもカオスを知っていた!

403. S. M. Ulam and John von Neumann: *On combination of stochastic and deterministic processes*. Preliminary report.

A computational procedure for the study of various differential equations—ordinary or partial—is investigated. It consists of a statistical model of the corresponding physical problem and involves a process which is a combination of deterministic and stochastic processes (see Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 51-9-165). This procedure is analogous to the playing of a series of “solitaire” card games and is performed on a computing machine. It requires, among others, the use of “random” numbers with a given distribution. Various distributions of such numbers can, however, be obtained by deterministic processes. For example, starting with almost every x_1 (in the sense of Lebesgue measure) and *iterating* the function $f(x) = 4x \cdot (1 - x)$ one obtains a sequence of numbers on $(0, 1)$ with a computable algebraic distribution. By playing suitable *games* with numbers “drawn” in this fashion, one can obtain various other distributions, either given explicitly or satisfying given differential or integral equations. (Received September 3, 1947.)

ロジスティック写像 ($\Leftrightarrow$ テント写像と位相同形)

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$$

カオス研究の歴史，先駆者

1. アンリ ポアンカレ，3体問題
2. ファンデアポル，ファンデアマルク (1927)，
ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. ウラム，フォンノイマン (1947)，確率論と決定論
On combination of stochastic and deterministic process,
 $f(x) = 4x(1 - x)$

カオス研究の歴史，先駆者

1. アンリ ポアンカレ，3体問題
2. ファンデアポル，ファンデアマルク (1927)，
ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. ウラム，フォンノイマン (1947)，確率論と決定論
On combination of stochastic and deterministic process,
 $f(x) = 4x(1 - x)$
4. カルマン (1956)，非線形サンプル値制御

カオス研究の歴史，先駆者

1. アンリ ポアンカレ，3体問題
2. ファンデアポル，ファンデアマルク (1927)，
ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. ウラム，フォンノイマン (1947)，確率論と決定論
On combination of stochastic and deterministic process,
 $f(x) = 4x(1 - x)$
4. カルマン (1956)，非線形サンプル値制御
5. 上田，川上，赤松ら (1960's)
ダフィング方程式，アナログコンピュータ

カオス研究の歴史，先駆者

1. アンリ ポアンカレ，3体問題
2. ファンデアポル，ファンデアマルク (1927)，
ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. ウラム，フォンノイマン (1947)，確率論と決定論
On combination of stochastic and deterministic process,
 $f(x) = 4x(1 - x)$
4. カルマン (1956)，非線形サンプル値制御
5. 上田，川上，赤松ら (1960's)
ダフィング方程式，アナログコンピュータ
6. ローレンツ (1963)，バタフライ効果

カオス研究の歴史，先駆者

1. アンリ ポアンカレ，3体問題
2. ファンデアポル，ファンデアマルク (1927)，
ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. ウラム，フォンノイマン (1947)，確率論と決定論
On combination of stochastic and deterministic process,
 $f(x) = 4x(1 - x)$
4. カルマン (1956)，非線形サンプル値制御
5. 上田，川上，赤松ら (1960's)
ダフィング方程式，アナログコンピュータ
6. ローレンツ (1963)，バタフライ効果
7. 李，ヨーク (1975)，
Period Three Implies Chaos

カオスの応用例

◀ カオスと時系列解析

例：音声の自然さ

➡ 音声信号の揺らぎに含まれるカオス性

◀ カオスを用いた組み合わせ最適化

例：TSP, QAP, VLSI 配線，配送計画，ゲノム情報学

➡ カオスを用いた新しいアルゴリズムにより，
組み合わせ最適化問題の解を高速に探索する

◀ カオス CDMA

➡ カオスを拡散符号に用いる

◀ カオス暗号

➡ カオスの複雑さを暗号に用いる

参考書

- ◀ 合原一幸：カオス学入門，放送大学教育振興協会，2001．
- ◀ 池口徹，山田泰司，小室元政：カオス時系列解析の基礎と応用，合原一幸編，産業図書，2000．
<http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru/books/chaotic-time-series/>
- ◀ 池口 徹，山田泰司: MATLAB によるカオス時系列解析, 準備中.
- ◀ J. Gleick : Chaos Making a New Science, Penguin Books, 1985; ジェイムス・グリック：オス，新しい科学をつくる，上田 皖亮監修，大貫昌子訳，新潮文庫.
- ◀ Ian Stewart : Does God Play Dice : The New Mathematics of Chaos, Blackwell Pub, 1990; 須田不二夫，三村和男 訳: カオス的世界像—神はサイコロ遊びをするか？ 白揚社, 1992.
- ◀ 山口昌哉: カオスとフラクタル－非線形現象の不思議－, 講談社, ブルーバックス, 1985.
- ◀ その他多数

課題

1. F_1, F_2, F_3 は単射であるか，全射であるか．
2. 平成 15 年度 埼玉大学 個別学力検査 (前期日程) 小論文工学部 情報システム工学科 第 2 問 において，テント写像の初期値として $x_0 = \frac{1}{\pi}$ が用いられている． $\frac{1}{\pi}$ を初期値として用いた出題者の意図を説明しなさい．
3. あなたの周りにあるカオスと考えられる例を一つ挙げなさい．但し，カオスであると考えられる理由を客観的に示すこと．

課題

1. F_1, F_2, F_3 は単射であるか，全射であるか．
2. 平成 15 年度 埼玉大学 個別学力検査 (前期日程) 小論文工学部 情報システム工学科 第 2 問 において，テント写像の初期値として $x_0 = \frac{1}{\pi}$ が用いられている． $\frac{1}{\pi}$ を初期値として用いた出題者の意図を説明しなさい．
3. あなたの周りにあるカオスと考えられる例を一つ挙げなさい．但し，カオスであると考えられる理由を客観的に示すこと．

注意

課題

1. F_1, F_2, F_3 は単射であるか，全射であるか．
2. 平成 15 年度 埼玉大学 個別学力検査 (前期日程) 小論文工学部 情報システム工学科 第 2 問 において，テント写像の初期値として $x_0 = \frac{1}{\pi}$ が用いられている． $\frac{1}{\pi}$ を初期値として用いた出題者の意図を説明しなさい．
3. あなたの周りにあるカオスと考えられる例を一つ挙げなさい．但し，カオスであると考えられる理由を客観的に示すこと．

注意

◀ 丁寧な字で書きましょう．

課題

1. F_1, F_2, F_3 は単射であるか，全射であるか．
2. 平成 15 年度 埼玉大学 個別学力検査 (前期日程) 小論文工学部 情報システム工学科 第 2 問 において，テント写像の初期値として $x_0 = \frac{1}{\pi}$ が用いられている． $\frac{1}{\pi}$ を初期値として用いた出題者の意図を説明しなさい．
3. あなたの周りにあるカオスと考えられる例を一つ挙げなさい．但し，カオスであると考えられる理由を客観的に示すこと．

注意

- ◀ 丁寧な字で書きましょう．
- ◀ 大学生らしい文章を書きましょう．

課題

1. F_1, F_2, F_3 は単射であるか，全射であるか．
2. 平成 15 年度 埼玉大学 個別学力検査 (前期日程) 小論文工学部 情報システム工学科 第 2 問 において，テント写像の初期値として $x_0 = \frac{1}{\pi}$ が用いられている． $\frac{1}{\pi}$ を初期値として用いた出題者の意図を説明しなさい．
3. あなたの周りにあるカオスと考えられる例を一つ挙げなさい．但し，カオスであると考えられる理由を客観的に示すこと．

注意

- ◀ 丁寧な字で書きましょう．
- ◀ 大学生らしい文章を書きましょう．
- ◀ 一度書いたら，必ず読み直しましょう．