

カオスと分岐

非線形システム特論

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048-858-3577, Fax : 048-858-3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru>

分岐 (bifurcation) とは

● (離散時間) 力学系

$$x(t+1) = f_{\mu}(x(t))$$

におけるパラメータ μ の値を変化させて解を求める



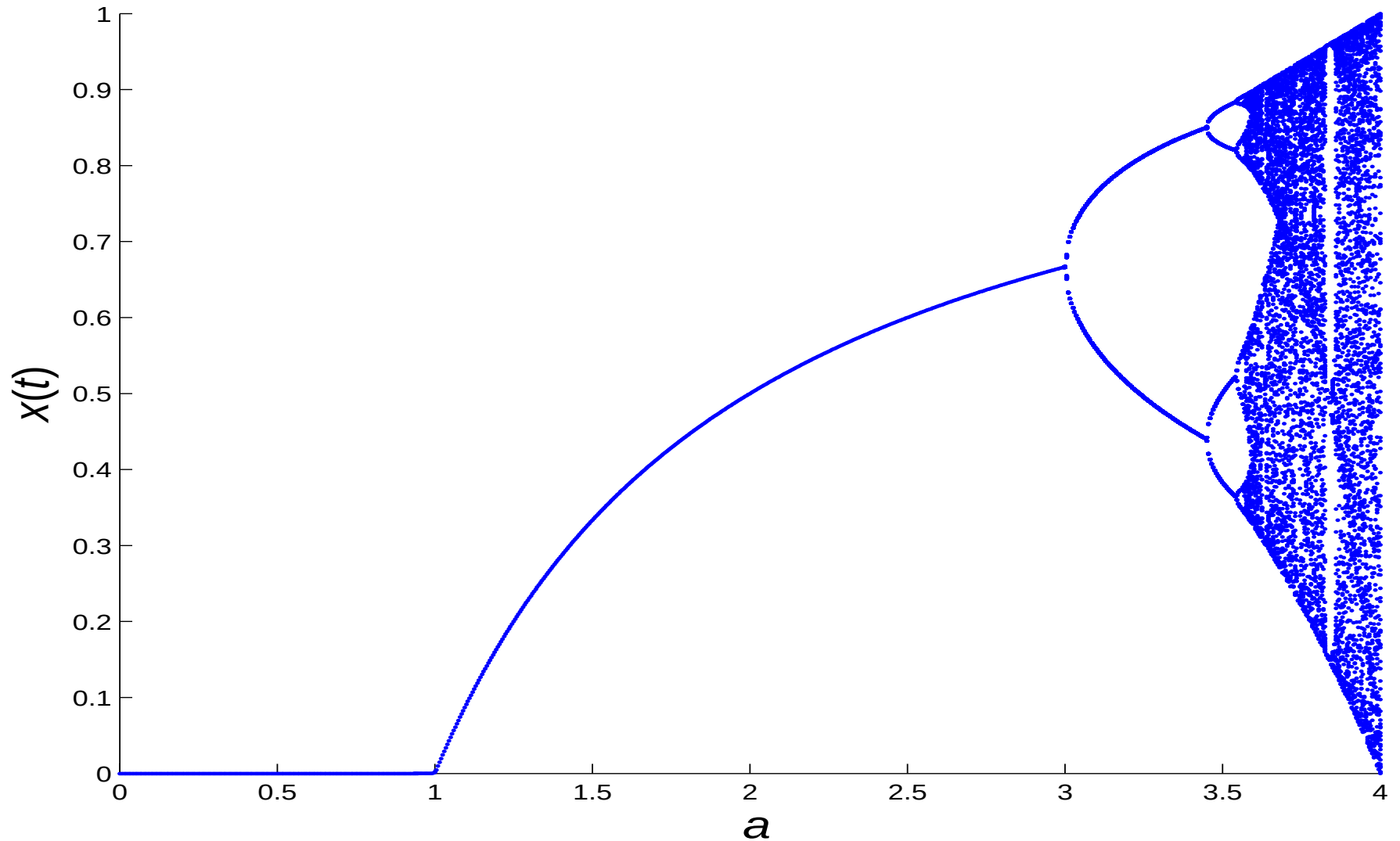
パラメータ値に応じて, 様々な解のタイプ
＝力学系の解の構造が変化＝分岐

● 例: カオスでない状態 → カオス (カオスへ至るルート)

固定点 (不動点) $\Rightarrow$ 周期解 $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ カオス

分岐の例

ロジスティック写像の分岐図 (bifurcation diagram)



ロジスティック写像と分岐

ロジスティック写像

$$x(t+1) = ax(t)(1-x(t)) \triangleq f_a(x(t))$$

を対象にして,

- 不動点
- m -周期点
- 初期値 $x(0)$ に関する軌道
- 不動点の安定性

を考えよう.

不動点と周期点

- 不動点, 固定点 (fixed point)

$$\bar{x} \quad \text{s.t.} \quad f_a(\bar{x}) = \bar{x}$$

- m - 周期点 (m は自然数)

$$f_a^m(x) = x$$

$$f_a^n(x) \neq x \quad (n = 1, 2, 3, \dots, m - 1)$$

- (注意)
例) $f_a^n(x) \neq \{f_a(x)\}^n$

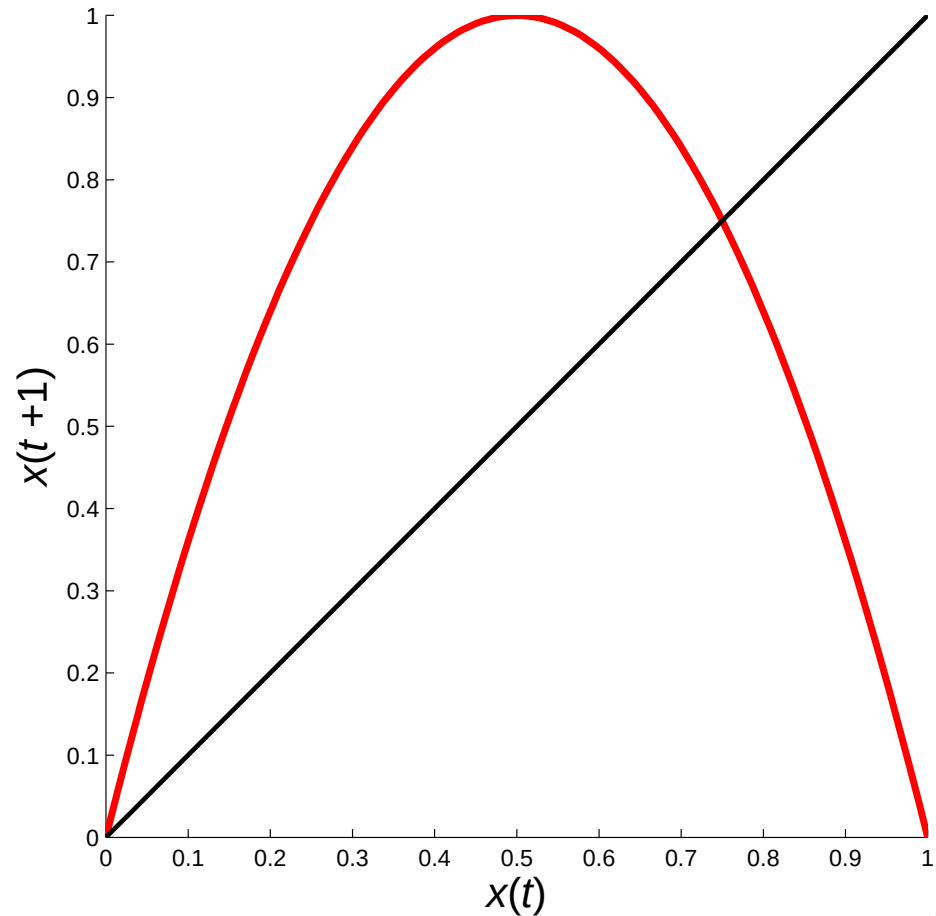
$$f_a(x) = ax(1 - x)$$

$$\begin{aligned} f_a^2(x) &= f_a(f_a(x)) = a \{ax(1 - x)\} (1 - \{ax(1 - x)\}) \\ &= \dots \neq a^2 x^2 (1 - x)^2 = \{f_a(x)\}^2 \end{aligned}$$

軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

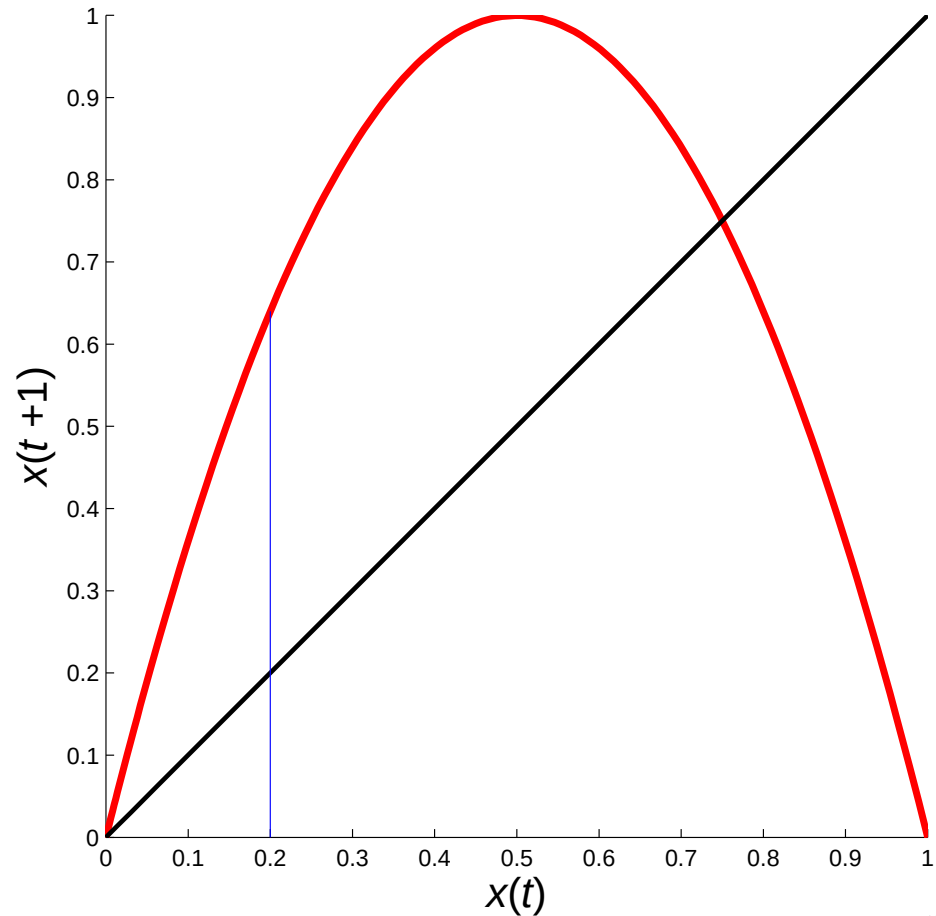
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

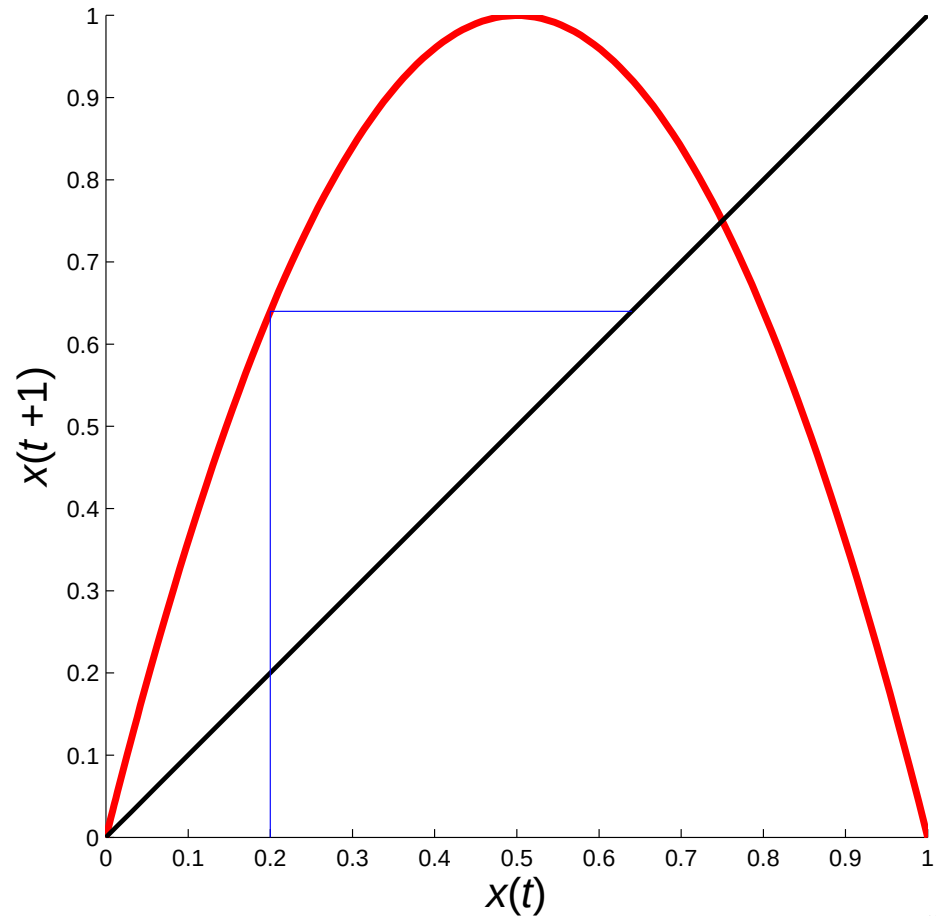
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

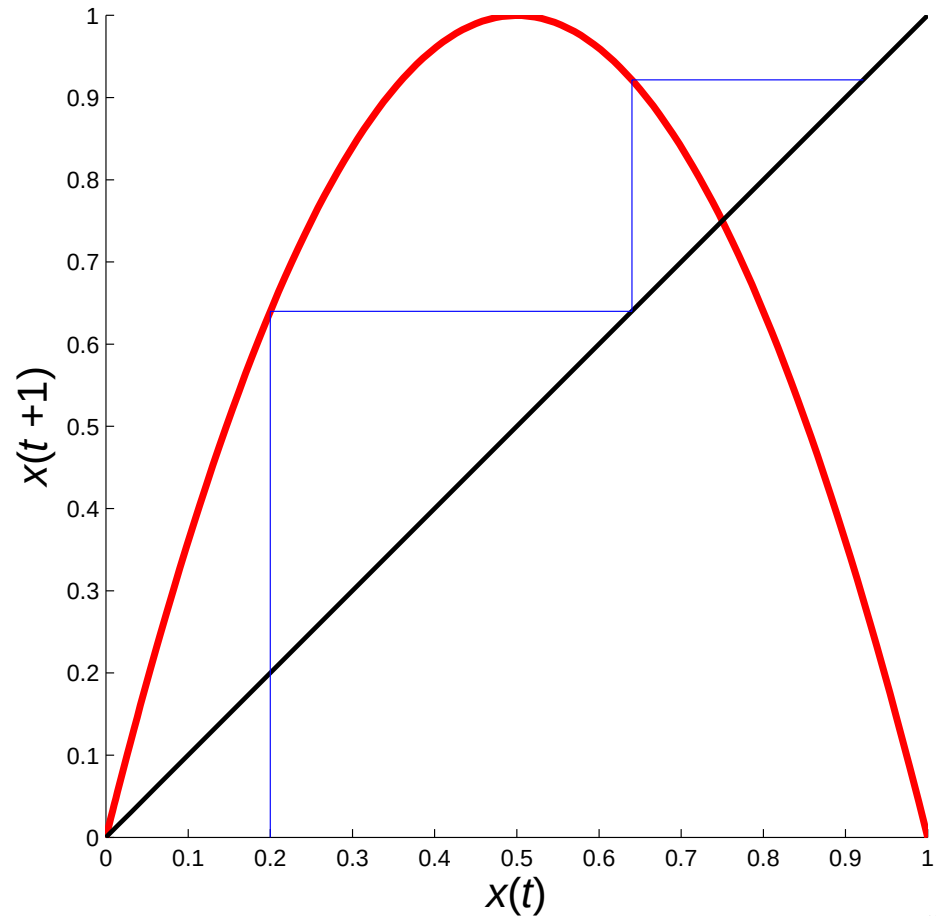
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

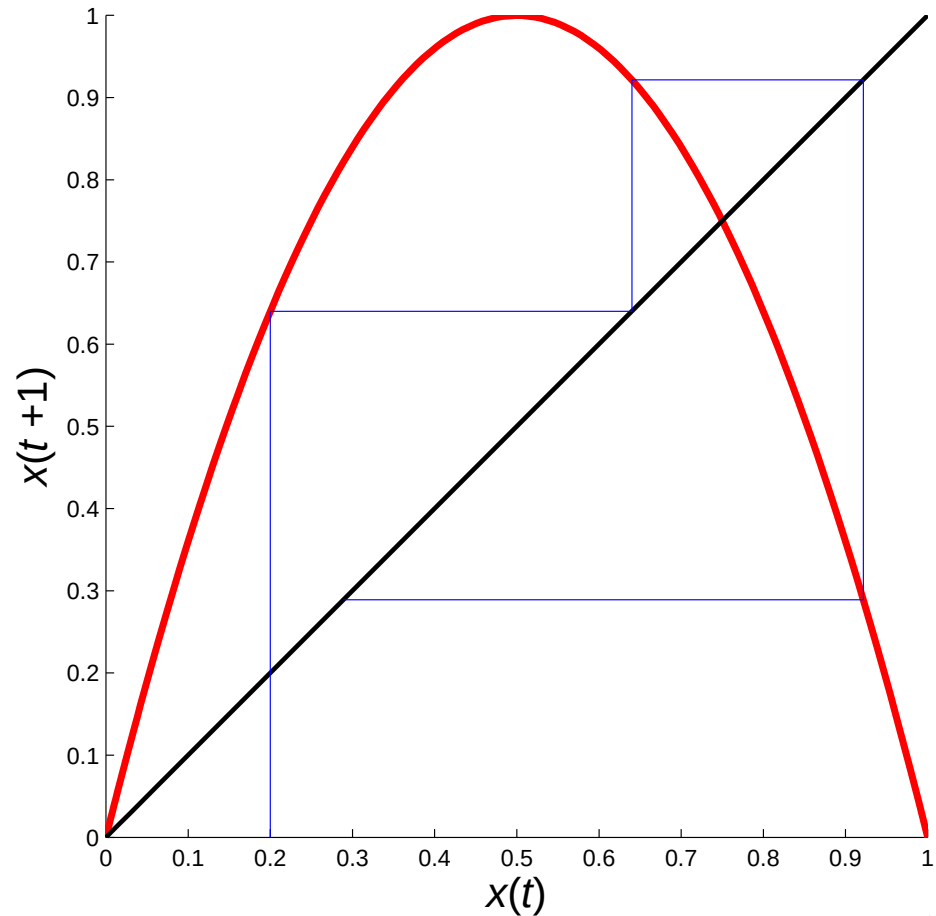
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

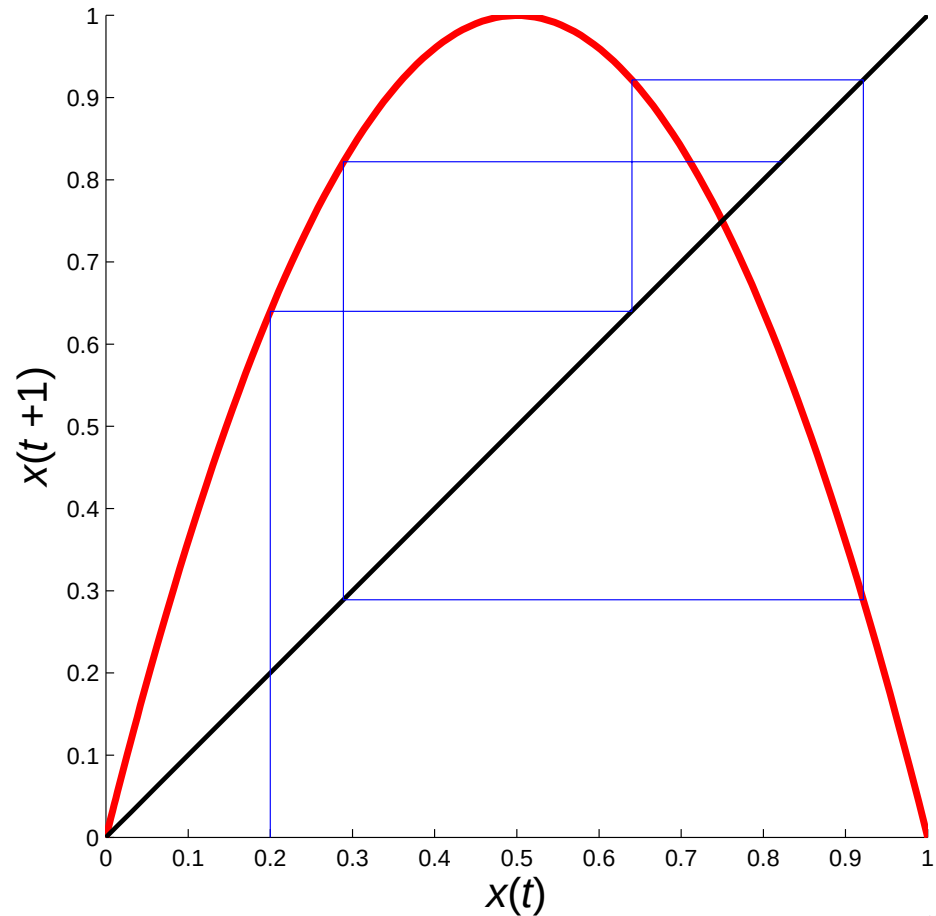
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

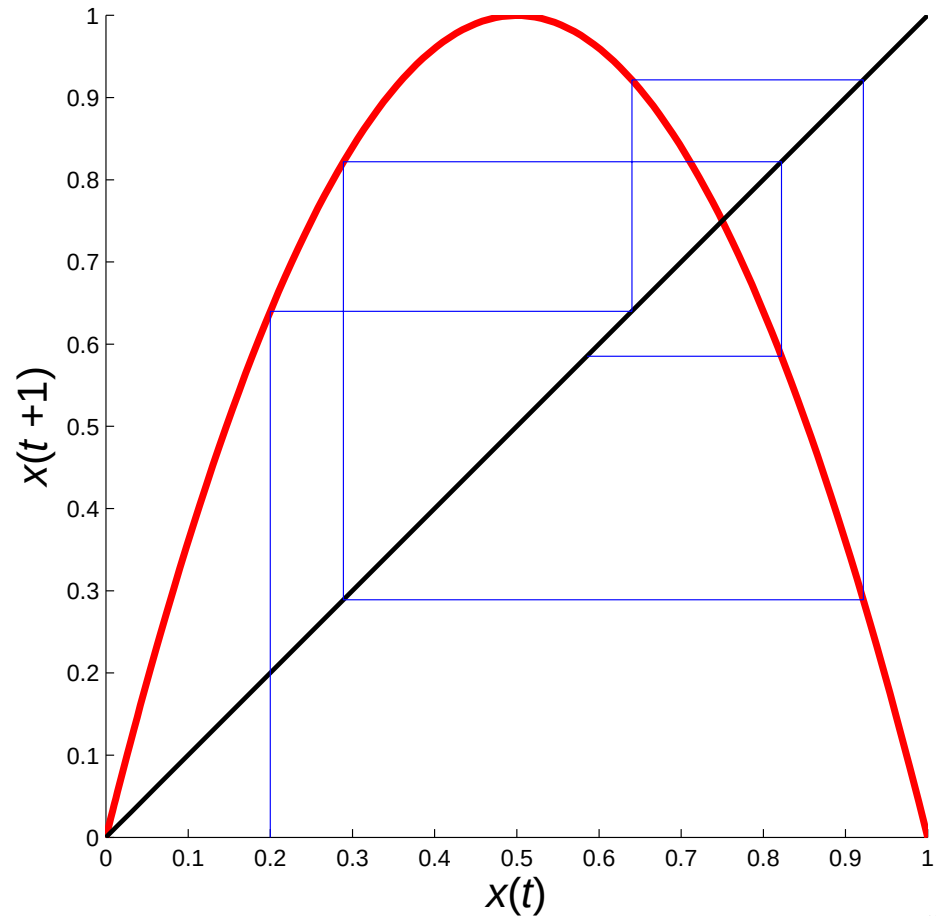
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

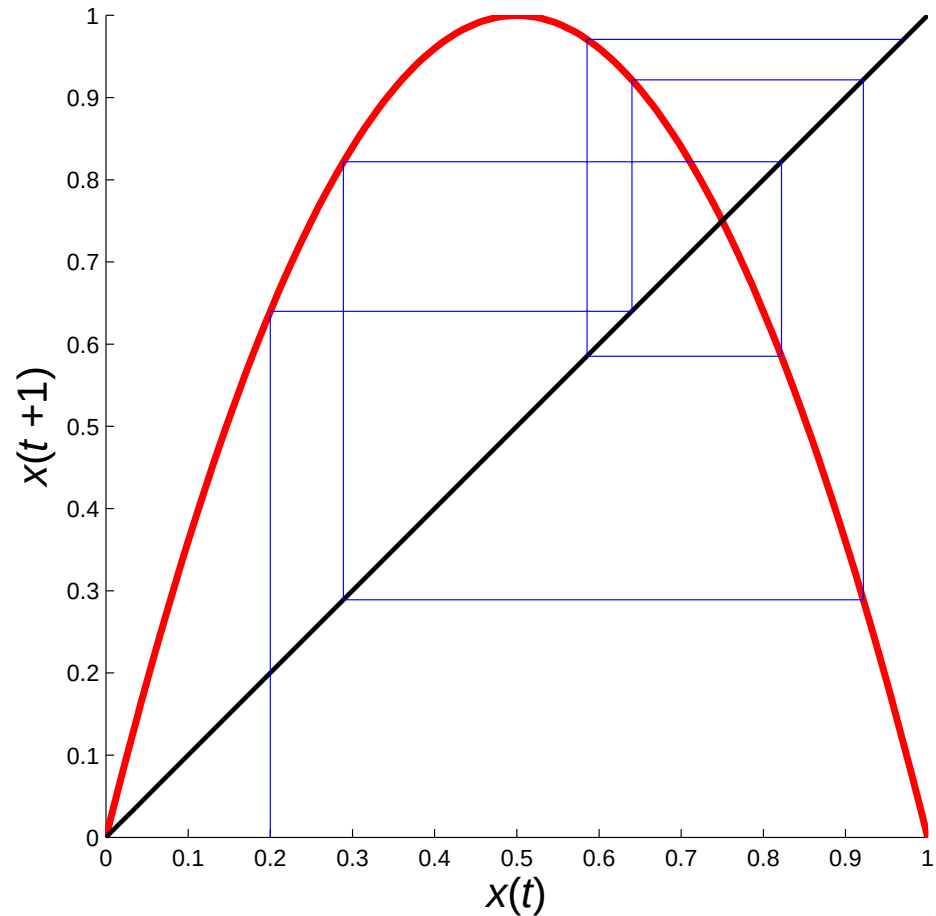
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

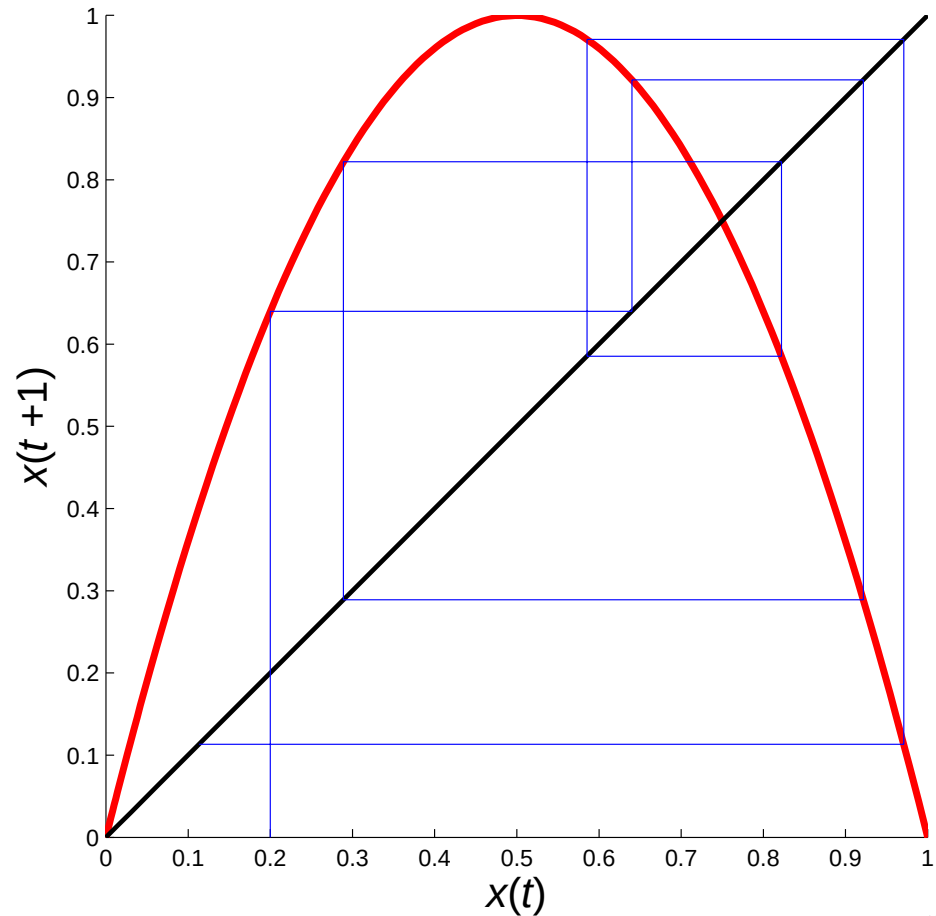
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

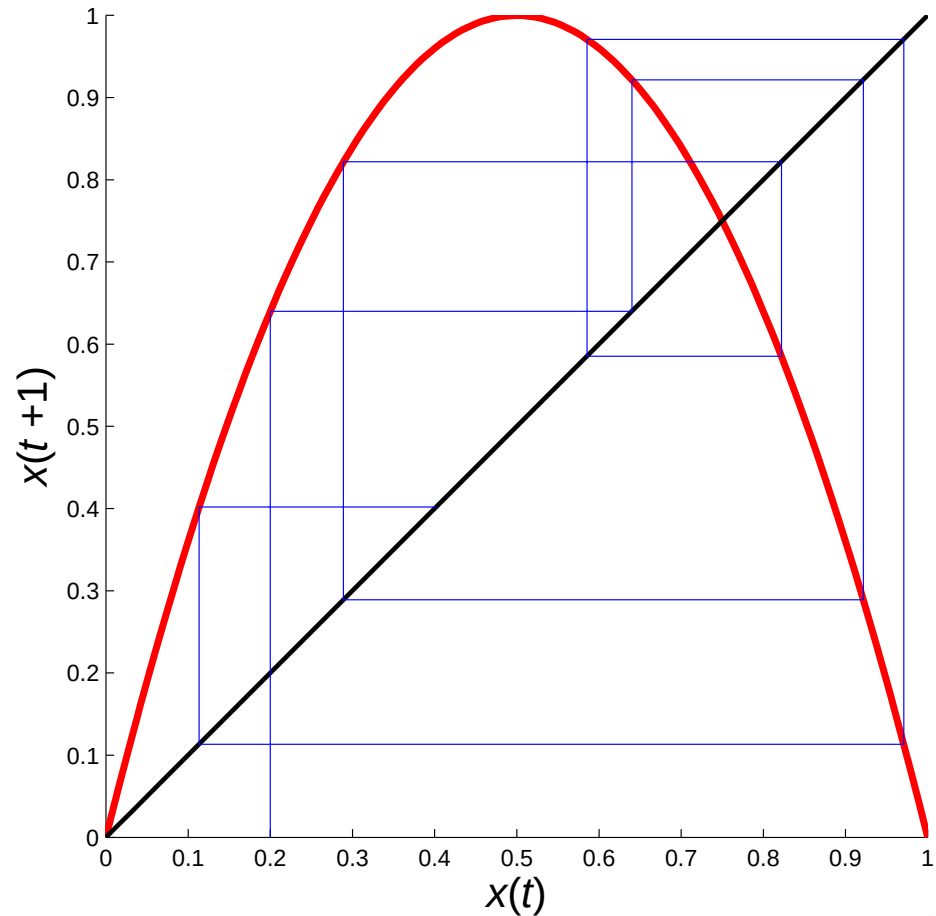
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



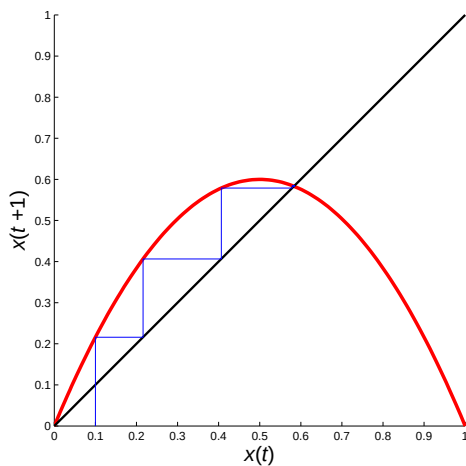
軌道と図式解法

● 初期値 $x(0)$ に関する軌道

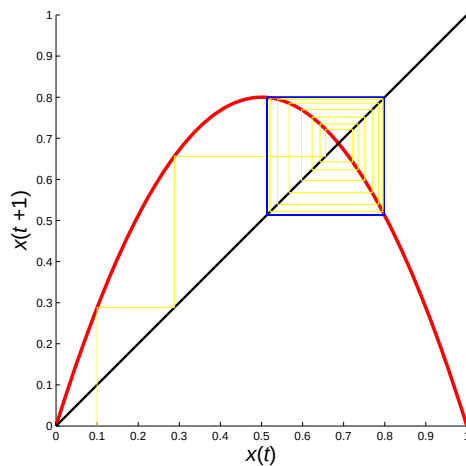
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \dots\}$$



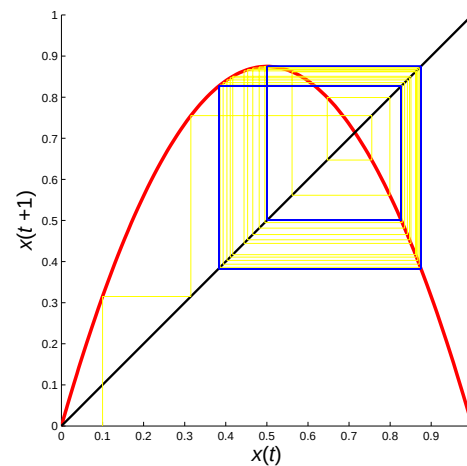
ロジスティック写像と図式解法



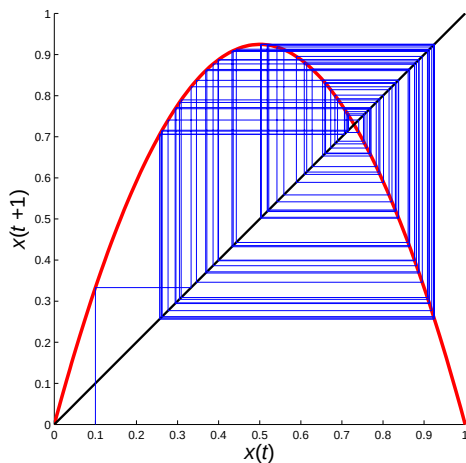
$a = 2.4$



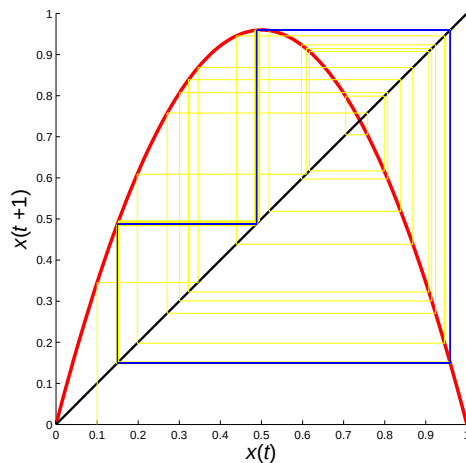
$a = 3.2$



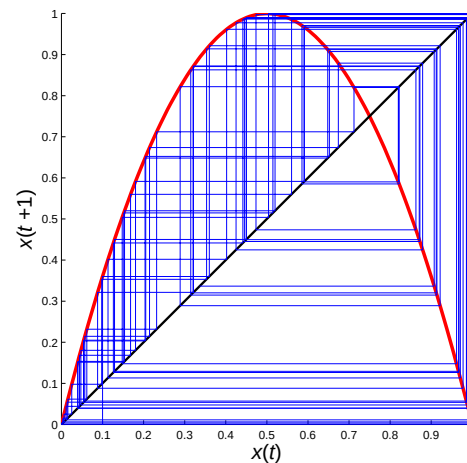
$a = 3.5$



$a = 3.7$



$a = 3.84$



$a = 4.0$

不動点の安定性

安定な不動点

$$\begin{aligned}\bar{x} &= f_a(\bar{x}) \\ |f'_a(\bar{x})| &< 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{x} + \epsilon(t+1) &= f_a(\bar{x} + \epsilon(t)) \\ &\approx f_a(\bar{x}) + f'_a(\bar{x})\epsilon(t) \\ &= \bar{x} + f'_a(\bar{x})\epsilon(t) \\ \therefore \epsilon(t+1) &= f'_a(\bar{x})\epsilon(t)\end{aligned}$$

不動点の安定性

[定理]

力学系 $f(x)$ が微分可能で、 $f'(x)$ は連続であるとする． $\bar{x}$ を力学系 $f(x)$ の不動点とする． $|f'(\bar{x})| < 1$ であるとき、 $\bar{x}$ の近傍 V が存在して、

$$\bar{x} \in V \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(\bar{x}) = \bar{x}$$

不動点の安定性

今, $|f'_a(\bar{x})| < 1$ であるから

$$0 < \exists \lambda < 1, \exists \delta < 0 \quad \text{s.t.} \quad \text{for}^\forall x \quad \text{in} \quad I \in [\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta]$$

$$|f'_a(\bar{x})| < \lambda < 1$$

とすることができる. 従って, 平均値の定理より,

$$\begin{aligned} & \text{for}^\forall p \in I, \exists c \in I \\ & \frac{|f_a(p) - f_a(\bar{x})|}{|p - \bar{x}|} = f'_a(c) < \lambda < 1 \\ \Leftrightarrow & |f_a(p) - f_a(\bar{x})| < \lambda |p - \bar{x}| < |p - \bar{x}| \end{aligned}$$

とすることができる.

不動点の安定性

次に, $f_a(p) \in I$ なので $f_a(p)$ と $f_a(\bar{x})$ に同じことを適用すると,

$$|f_a^2(p) - f_a^2(\bar{x})| = |f_a(f_a(p)) - f_a(f_a(\bar{x}))| < \lambda |f_a(p) - f_a(\bar{x})|$$

つまり

$$|f_a^2(p) - \bar{x}| < \lambda^2 |p - \bar{x}|$$

これを n 回繰り返すと

$$|f_a^n(p) - \bar{x}| < \lambda^n |p - \bar{x}|$$

$0 < \lambda < 1$ であるから $\lambda^n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

$$\therefore f_a^n(p) \rightarrow \bar{x} (n \rightarrow \infty)$$

不動点の安定性 (補足)

- 状態空間の中で $\bar{x}$ に収束する p の集合をベイシン (basin), 引き込み領域
- この定理は, 不動点の近傍のみにおいて成立. 大域的には何も言えない.
- 但し, ロジスティック写像の場合は, 不動点がこの意味で安定であれば, $I \in [0, 1]$ に対して大域的吸引不動点.
- 不安定な不動点

$$\bar{x} = f_a(\bar{x}), \quad |f'_a(\bar{x})| > 1$$

- n 周期点については, $f_a \rightarrow f_a^n$ とする.

$$\bar{x} = f_a^n(\bar{x}), \quad |(f_a^n)'(\bar{x})| < 1$$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

● 不動点 u は?

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

● 不動点 u は?

$$u = f_a(u) = au(1-u) \iff u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

● 不動点 u は?

$$u = f_a(u) = au(1-u) \iff u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

● 不動点 u の安定性

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

● 不動点 u は?

$$u = f_a(u) = au(1-u) \iff u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

● 不動点 u の安定性 $f'_a(u) = a - 2au = a(1 - 2u)$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

● 不動点 u は?

$$u = f_a(u) = au(1-u) \iff u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

● 不動点 u の安定性 $f'_a(u) = a - 2au = a(1 - 2u)$

1. $u = 0$

2. $u = 1 - \frac{1}{a}$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

● 不動点 u は?

$$u = f_a(u) = au(1-u) \iff u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

● 不動点 u の安定性 $f'_a(u) = a - 2au = a(1 - 2u)$

1. $u = 0 \Rightarrow f'_a(0) = a$

2. $u = 1 - \frac{1}{a}$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

● 不動点 u は?

$$u = f_a(u) = au(1-u) \iff u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

● 不動点 u の安定性 $f'_a(u) = a - 2au = a(1 - 2u)$

1. $u = 0 \Rightarrow f'_a(0) = a$

$$0 \leq a < 1 \quad 0 \leq f'_a(0) < 1 \quad \text{安定}$$

$$1 < a \quad f'_a(0) > 1 \quad \text{不安定}$$

2. $u = 1 - \frac{1}{a}$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

● 不動点 u は?

$$u = f_a(u) = au(1-u) \iff u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

● 不動点 u の安定性 $f'_a(u) = a - 2au = a(1 - 2u)$

1. $u = 0 \Rightarrow f'_a(0) = a$

$$0 \leq a < 1 \quad 0 \leq f'_a(0) < 1 \quad \text{安定}$$

$$1 < a \quad f'_a(0) > 1 \quad \text{不安定}$$

2. $u = 1 - \frac{1}{a}$ まず、解の存在を考える必要がある。

ロジスティック写像の場合

2. $u = 1 - \frac{1}{a}$

$0 \leq a < 1$ $u < 0$ $0 < u < 1$ を考えるのでなし

$a < 1$ $u > 0$ 存在する

ロジスティック写像の場合

$$2. \quad u = 1 - \frac{1}{a}$$

$$\begin{array}{lll} 0 \leq a < 1 & u < 0 & 0 < u < 1 \text{ を考えるのでなし} \\ a < 1 & u > 0 & \text{存在する} \end{array}$$

このとき,

$$f'_a \left(1 - \frac{1}{a} \right) = a - 2a \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 2 - a$$

より,

ロジスティック写像の場合

$$2. \quad u = 1 - \frac{1}{a}$$

$$\begin{array}{lll} 0 \leq a < 1 & u < 0 & 0 < u < 1 \text{ を考えるのでなし} \\ a < 1 & u > 0 & \text{存在する} \end{array}$$

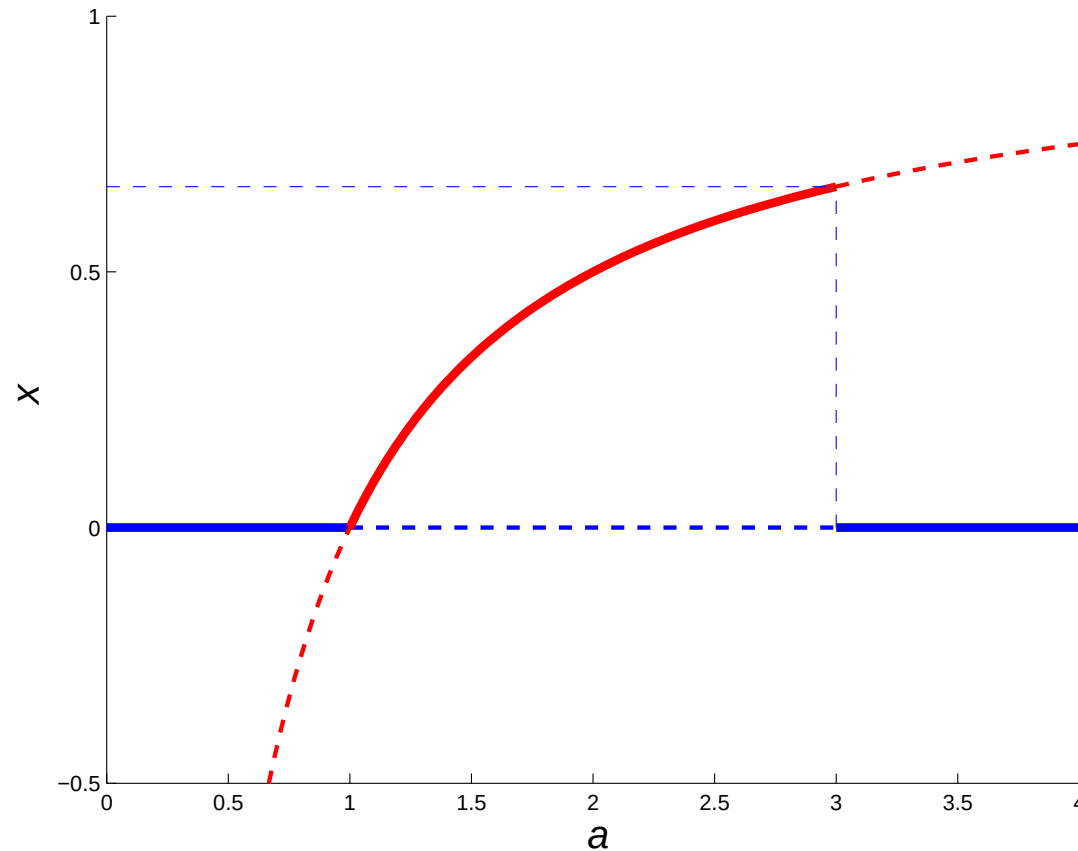
このとき,

$$f'_a \left(1 - \frac{1}{a} \right) = a - 2a \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 2 - a$$

より,

$$\begin{array}{lll} 0 \leq a < 1 & |f'_a \left(1 - \frac{1}{a} \right)| > 1 & u = 1 - \frac{1}{a} \text{ は不安定} \\ 1 \leq a < 3 & |f'_a \left(1 - \frac{1}{a} \right)| < 1 & u = 1 - \frac{1}{a} \text{ は安定} \\ 3 < a \leq 4 & |f'_a \left(1 - \frac{1}{a} \right)| > 1 & u = 1 - \frac{1}{a} \text{ は不安定} \end{array}$$

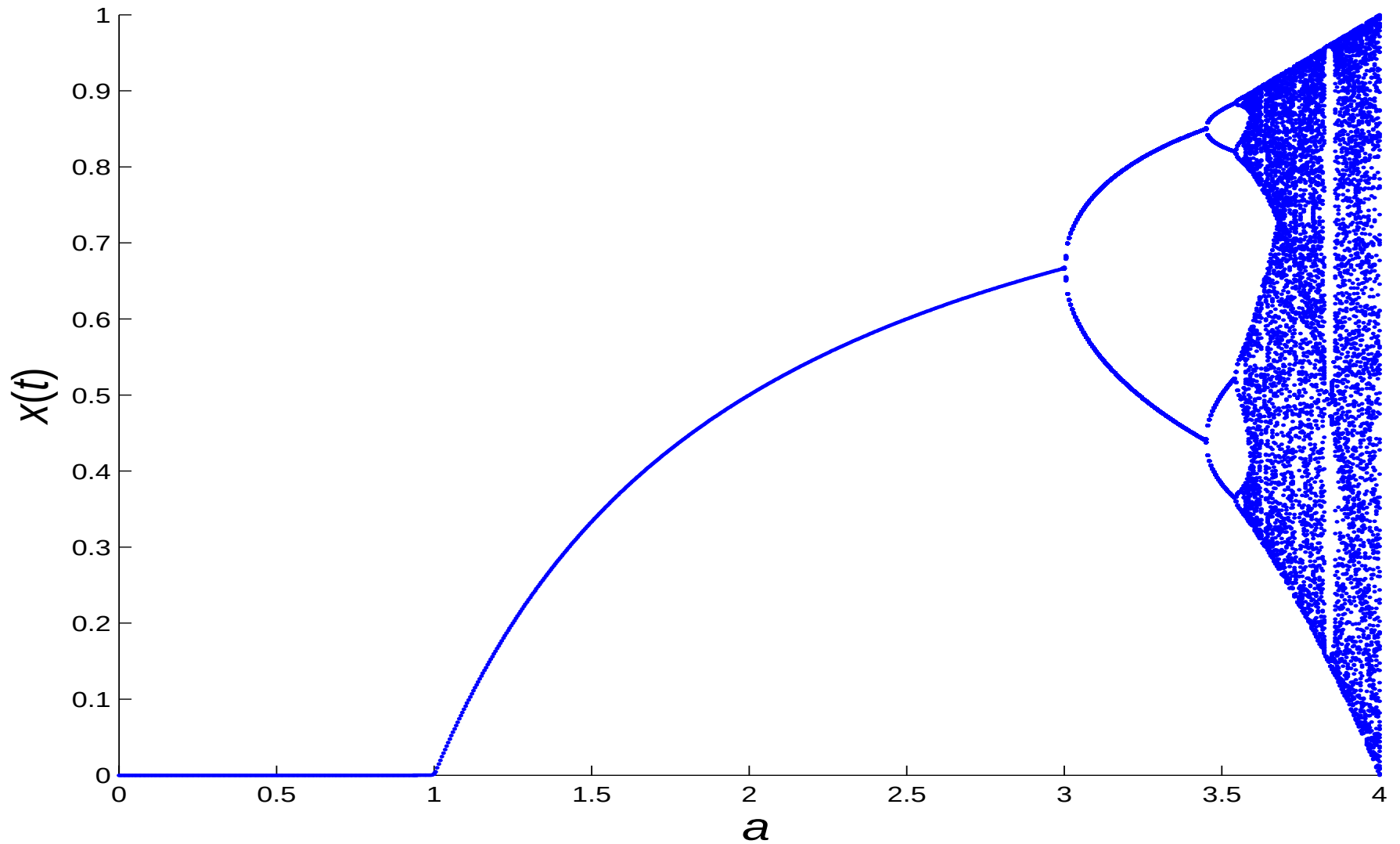
トランスクリティカル分岐



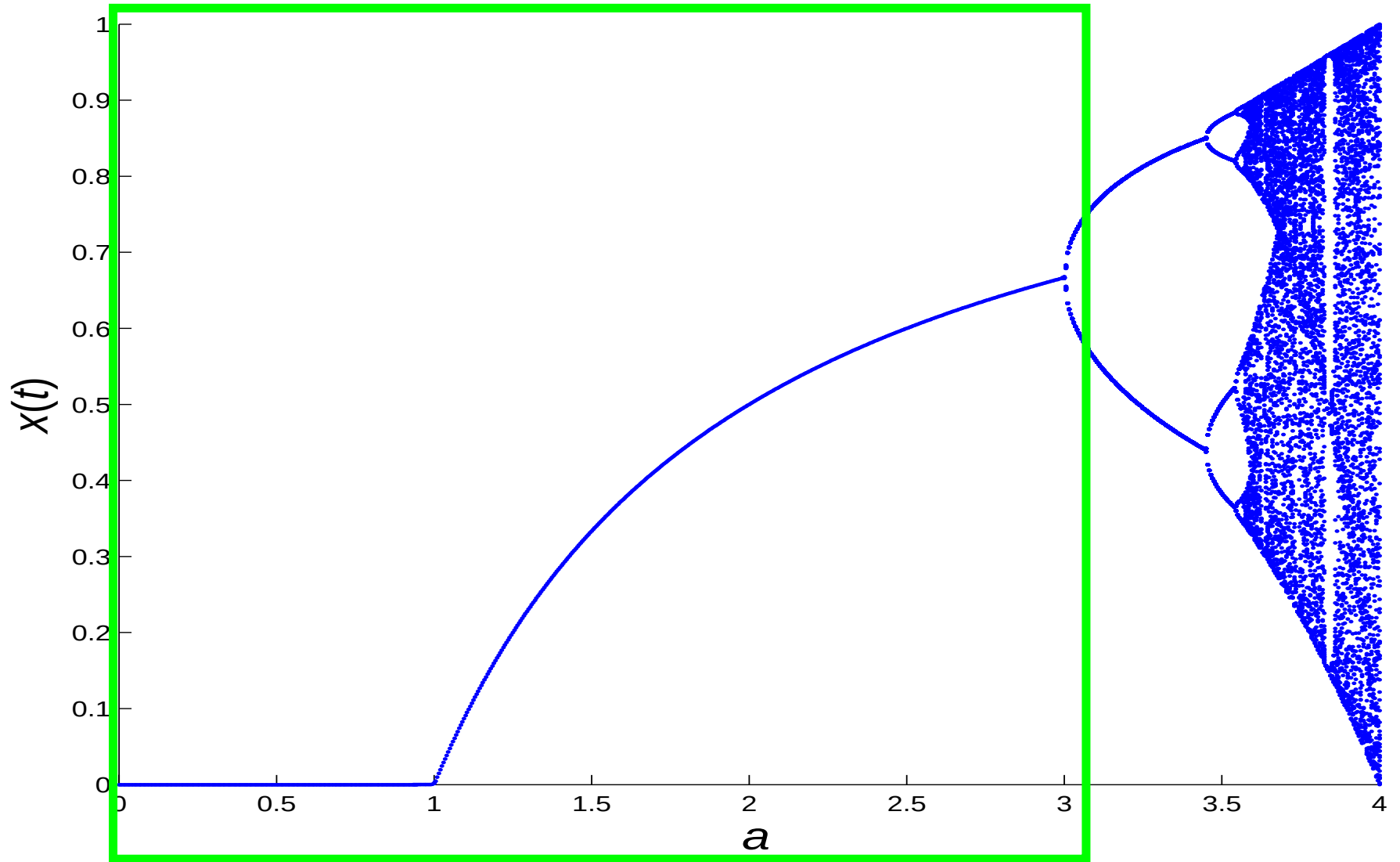
$u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$, 実線:安定, 破線:不安定

2つの不動点の間で, 安定性が入れ替わる

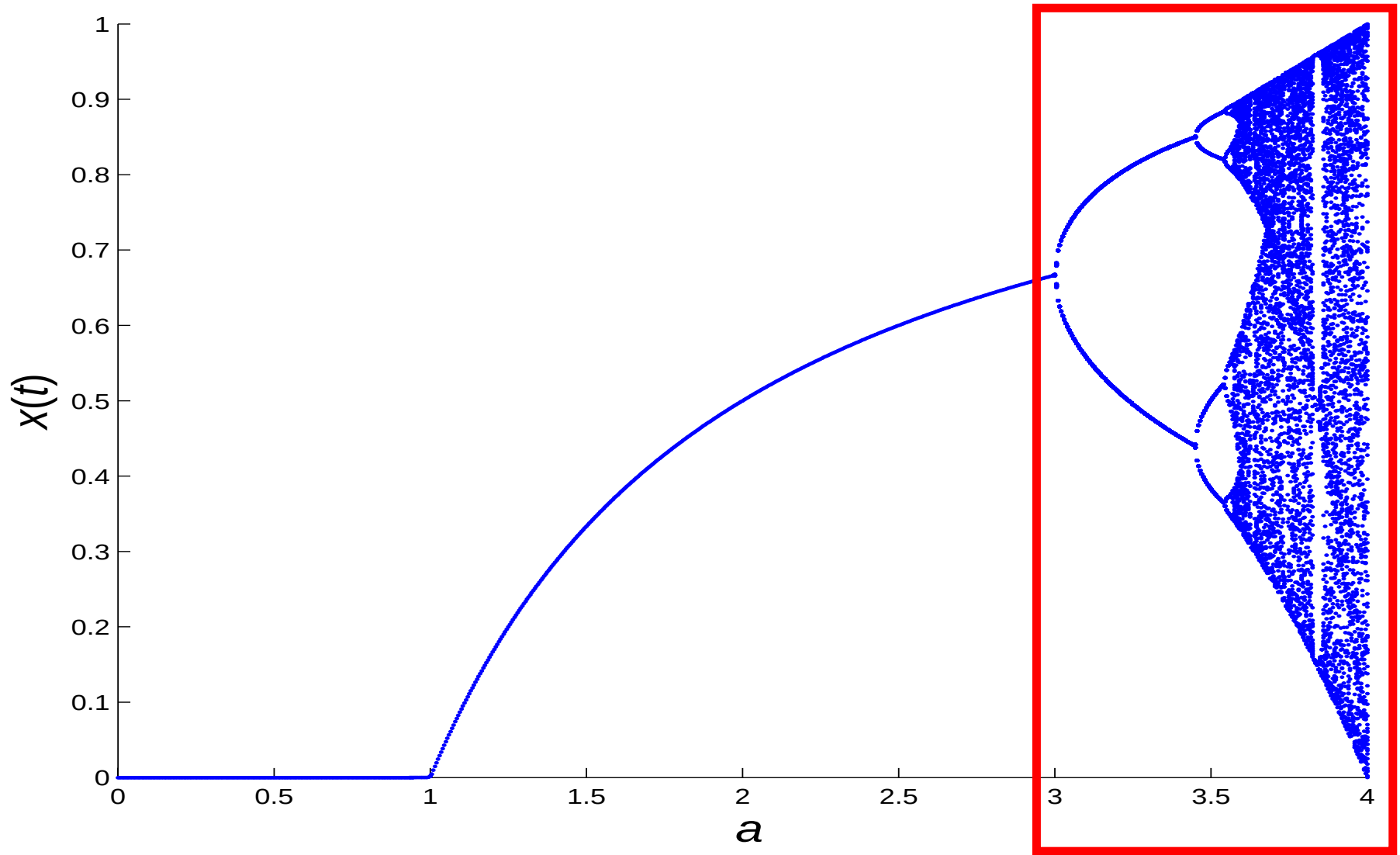
ロジスティック写像の分岐図



ロジスティック写像の分岐図



ロジスティック写像の分岐図



周期倍分岐

$a = 3$ 以降では何が起こっているか？

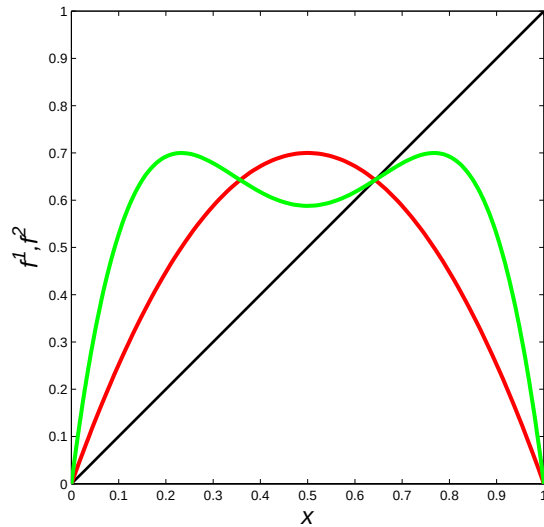
● $u = 1 - \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であるから,

$$f'_a(u) = a - 2au = 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = -1$$

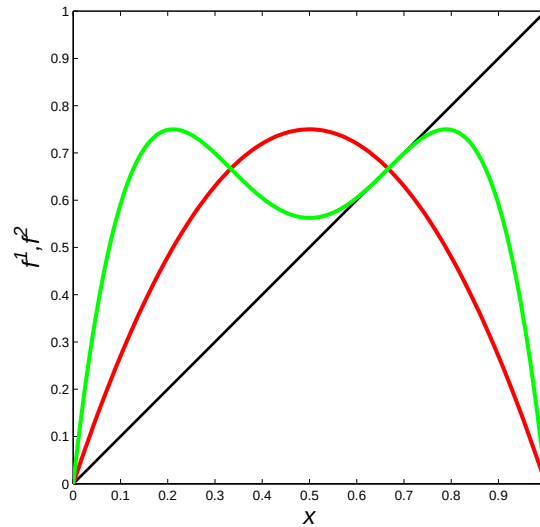
つまり, $a > 3$ では $f'_a(u) < -1$ となり不安定化

● 分岐図をみると, $a > 3$ では2周期解が現れている
 $f_a(x)$ と $f_a^2(x)$ のグラフを描いてみよう

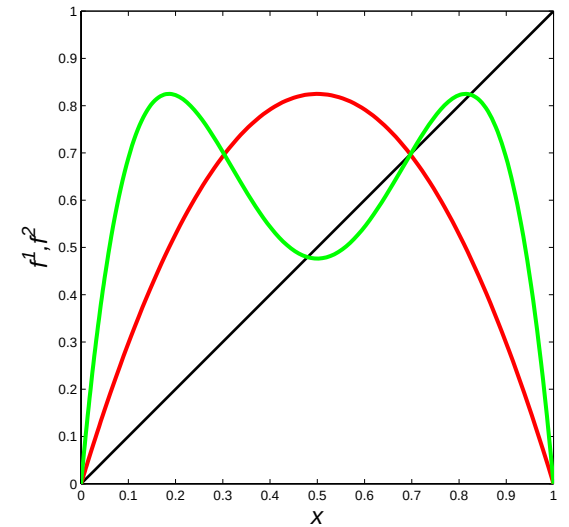
ロジスティック写像 $a = 3$ 付近



$a = 2.8$



$a = 3.0$



$a = 3.3$

- $a = 2.8 < 3$ では不動点 $u = 1 - \frac{1}{a} \approx 0.6429 \dots$ が安定
- $a = 3$ では f^2 が $u = 2/3$ において接している
- $a = 3.3 > 3$ では f^2 と 45 度の直線が 4 箇所 (不動点 u と 2 周期解 q_1, q_2) で交わっている.

周期倍分岐

- まず、不動点 u に対して、2 回写像 f_a^2 に関する安定性、不安定性を考えてみよう。

$$\begin{aligned}\left(f_a^2\right)'(u) &= f_a'(f_a(u)) \cdot f_a'(u) \\ &= f_a'(u) \cdot f_a'(u) \\ &= \{f_a'(u)\}^2\end{aligned}$$

- $1 < a < 3$ では $|f_a'(u)| < 1 \iff \left(f_a^2\right)'(u) < 1$
- $a = 3$ では $|f_a'(u)| = -1 \iff \left(f_a^2\right)'(u) = 1$
- $a > 3$ では $|f_a'(u)| > -1 \iff \left(f_a^2\right)'(u) > 1$
- $a = 3$ を越えると不動点 u も f_a^2 について不安定

周期倍分岐

2 周期点 q_1, q_2 を求めると

$$\begin{aligned} f_a^2(q) &= q \\ \iff f_a^2(q) &= a \{aq(1 - q)\} \{1 - aq(1 - q)\} = q \\ \iff q \left(q - 1 + \frac{1}{a} \right) \{a^2 q^2 - (a^2 + a)q + a + 1\} &= 0 \\ \iff q_i &= \frac{a + 1 \pm \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}, \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

2 周期点の点の安定性を見るためには, 2 回写像に関する微分係数 $(f_a^2)'(q_1), (f_a^2)'(q_2)$ の値を求めてやれば良い

周期倍分岐

まず, q_1, q_2 は 2 周期点なので,

$$f_a(q_1) = q_2, \quad f_a(q_2) = q_1$$

であることに注意すると,

$$\begin{aligned} (f_a^2)'(q_1) &= (f_a(f_a(q_1)))' \\ &= f_a'(f_a(q_1)) \cdot f_a'(q_1) \\ &= f_a'(q_2) \cdot f_a'(q_1) = (f_a^2)'(q_2) \end{aligned}$$

$f_a'(x) = a - 2ax = a(1 - 2x)$ であるから,

$$f_a'(q_1) = a(1 - 2q_1)$$

$$f_a'(q_2) = a(1 - 2q_2)$$

周期倍分岐

● 従って,

$$\begin{aligned}\left(f_a^2\right)'(q_1) &= \left(f_a^2\right)'(q_2) = f_a'(q_2) \cdot f_a'(q_1) \\ &= a^2(1-2q_1)(1-2q_2) \\ &= a^2\{1-2(q_1+q_2)+4q_1q_2\}\end{aligned}$$

● ここで q_1, q_2 は以下の方程式の解である

$$a^2q^2 - (a^2 + a)q + a + 1 = 0$$

● 解と係数の関係より

$$q_1 + q_2 = \frac{a^2 + a}{a^2}, \quad q_1q_2 = \frac{a + 1}{a^2}$$

周期倍分岐

● まとめる

$$\begin{aligned}\left(f_a^2\right)'(q_1) &= \left(f_a^2\right)'(q_2) = f_a'(q_2) \cdot f_a'(q_1) \\ &= a^2(1-2q_1)(1-2q_2) \\ &= a^2\{1-2(q_1+q_2)+4q_1q_2\} \\ &= -a^2+2a+4 = -(a-1)^2+5\end{aligned}$$

● $\left(f_a^2\right)'(q_1) = -1$ より

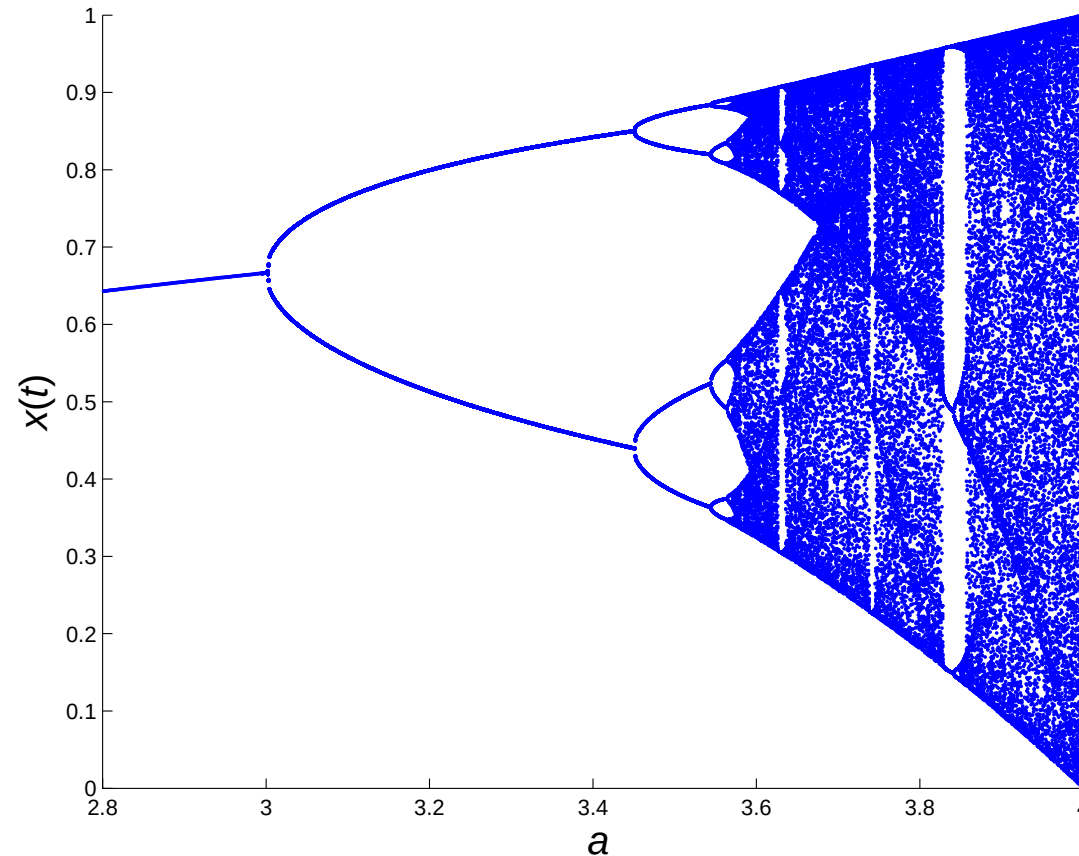
$$a = 1 + \sqrt{6} = 3.44948974278318 \dots$$

$$(\text{と } a = 1 - \sqrt{6} < 0)$$

● $\left(f_a^2\right)'(q_1) = 1$ より $a = 3$ (と $a = -1 < 0$)

2周期解から4周期解へ

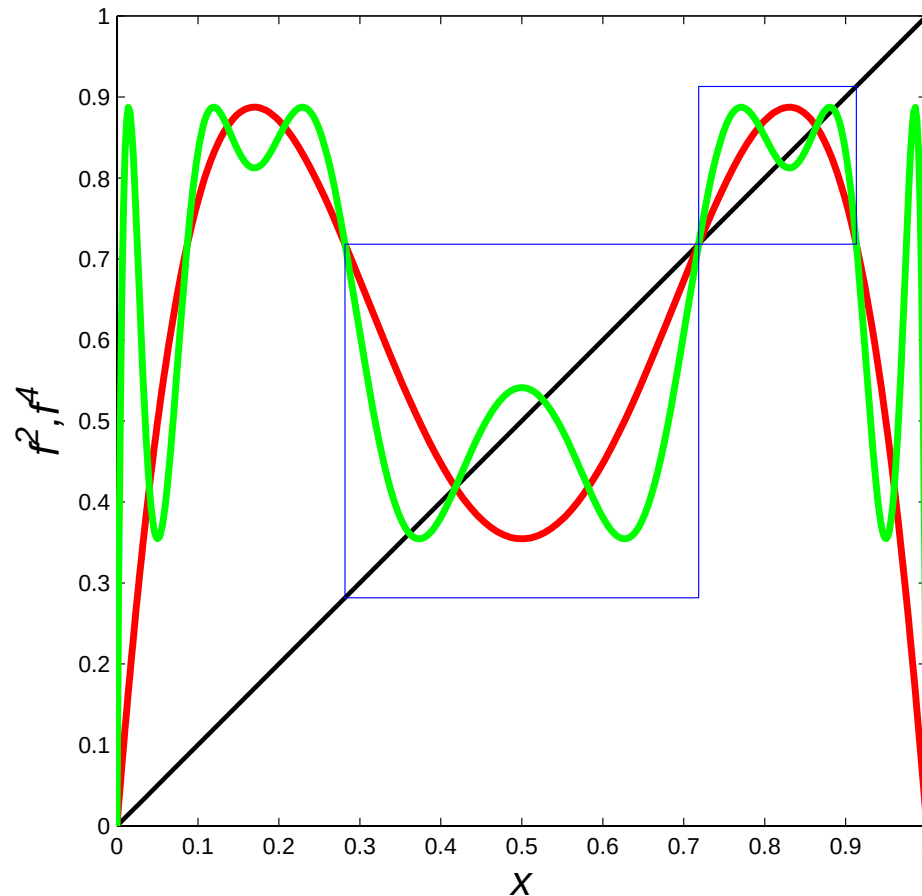
- $a = 3.67$ 付近で2周期解が消え、4周期解が現れる。



- f^2, f^4 を描くとどうなるか？

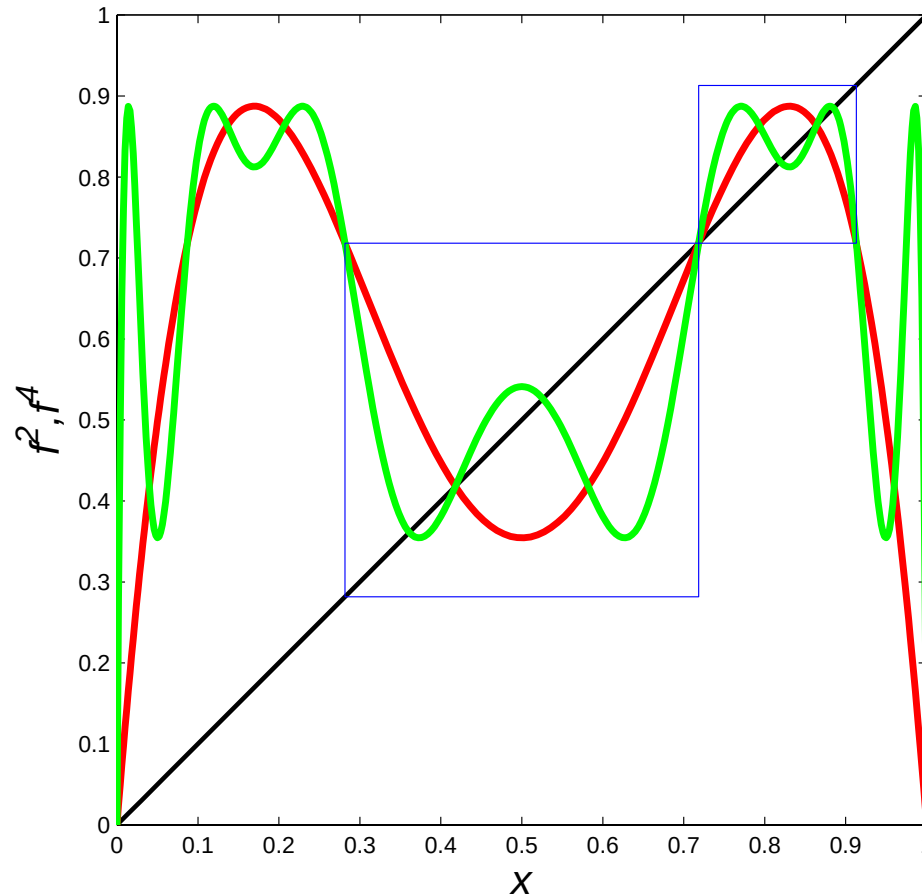
2周期解から4周期解

🔴 $f \rightarrow f^2$ と類似の関係が, $f^2 \rightarrow f^4$ にもある



2周期解から4周期解

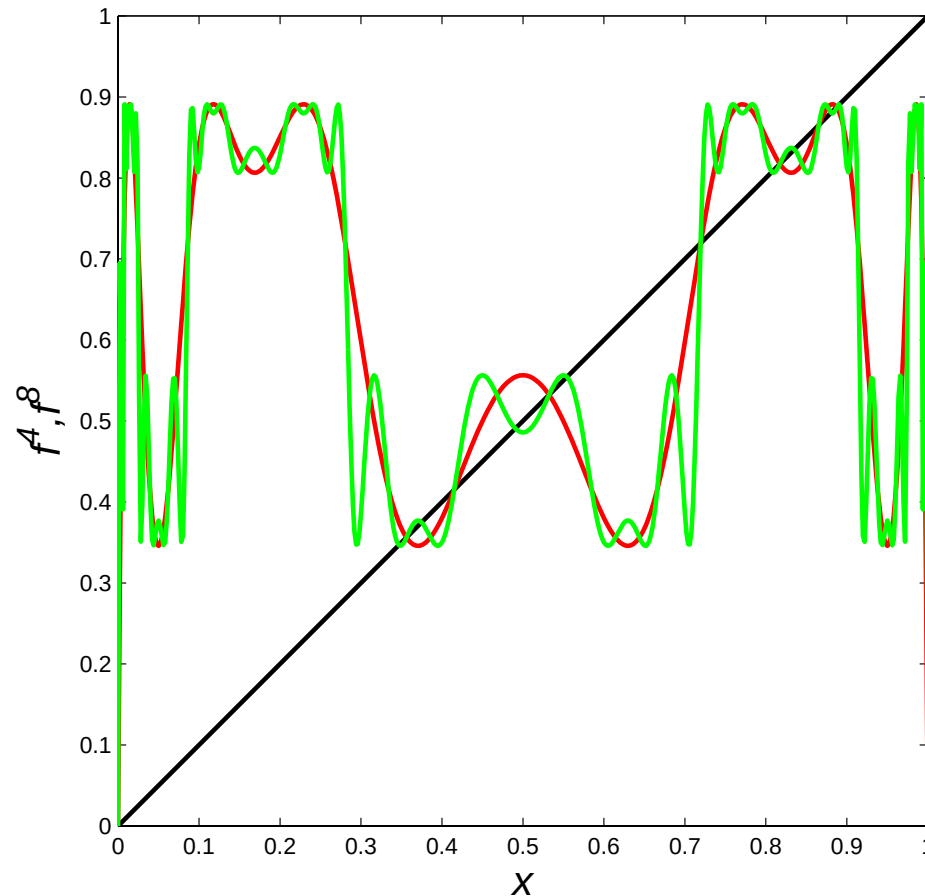
🔴 $f \rightarrow f^2$ と類似の関係が, $f^2 \rightarrow f^4$ にもある



🔴 4周期解から8周期解は?

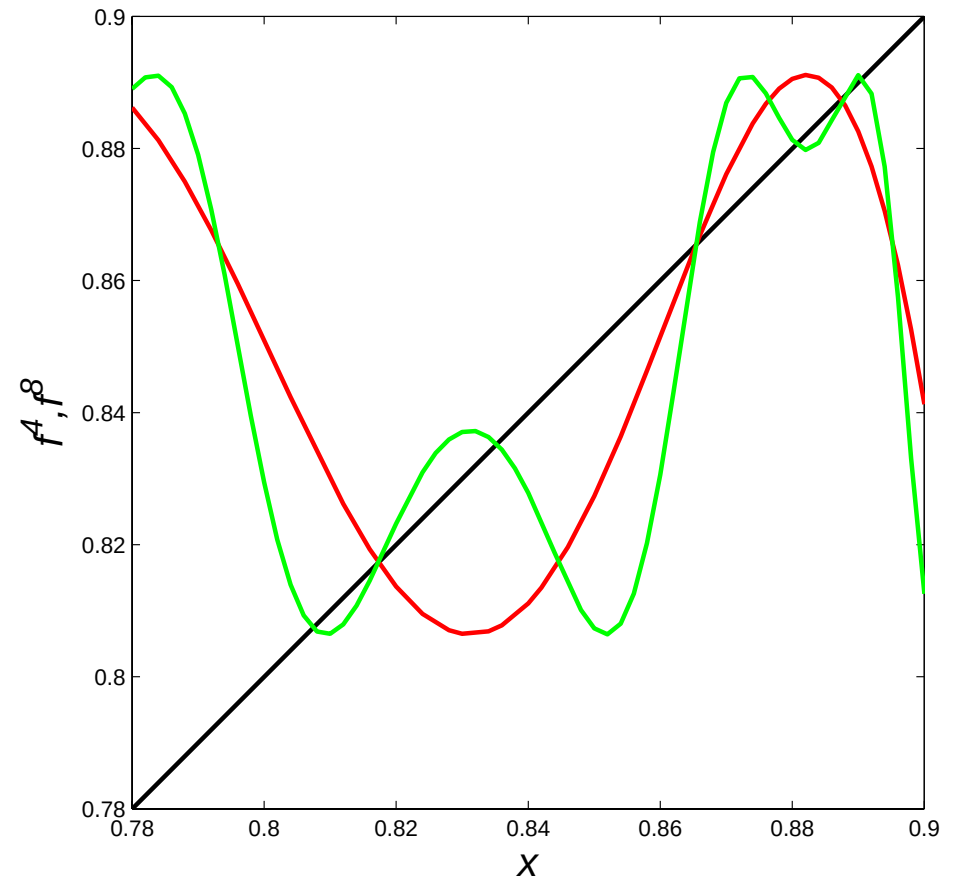
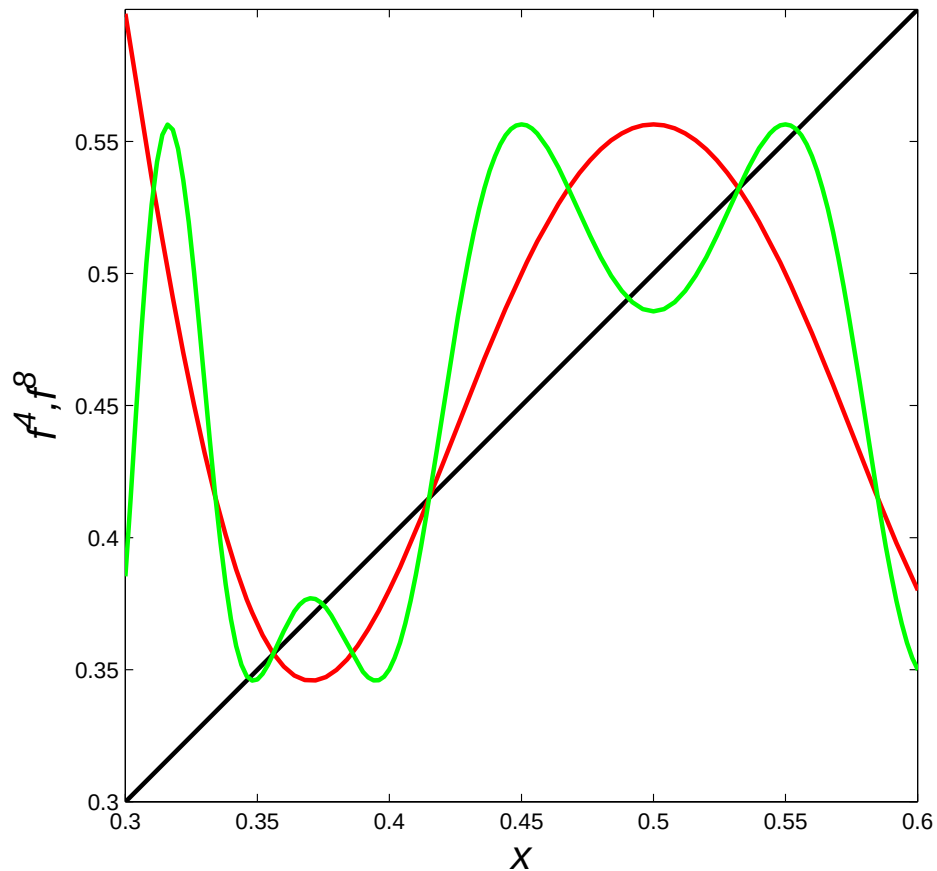
4周期解から8周期解

再び, $f \rightarrow f^2$, $f^2 \rightarrow f^4$ と類似の関係



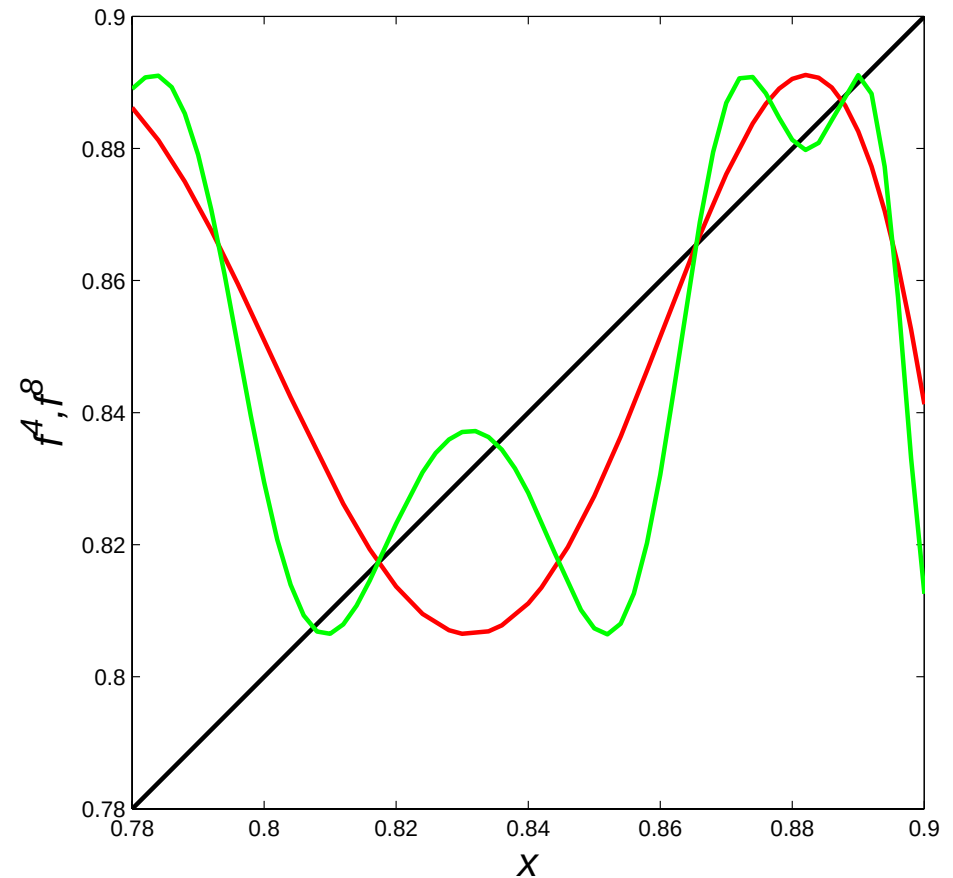
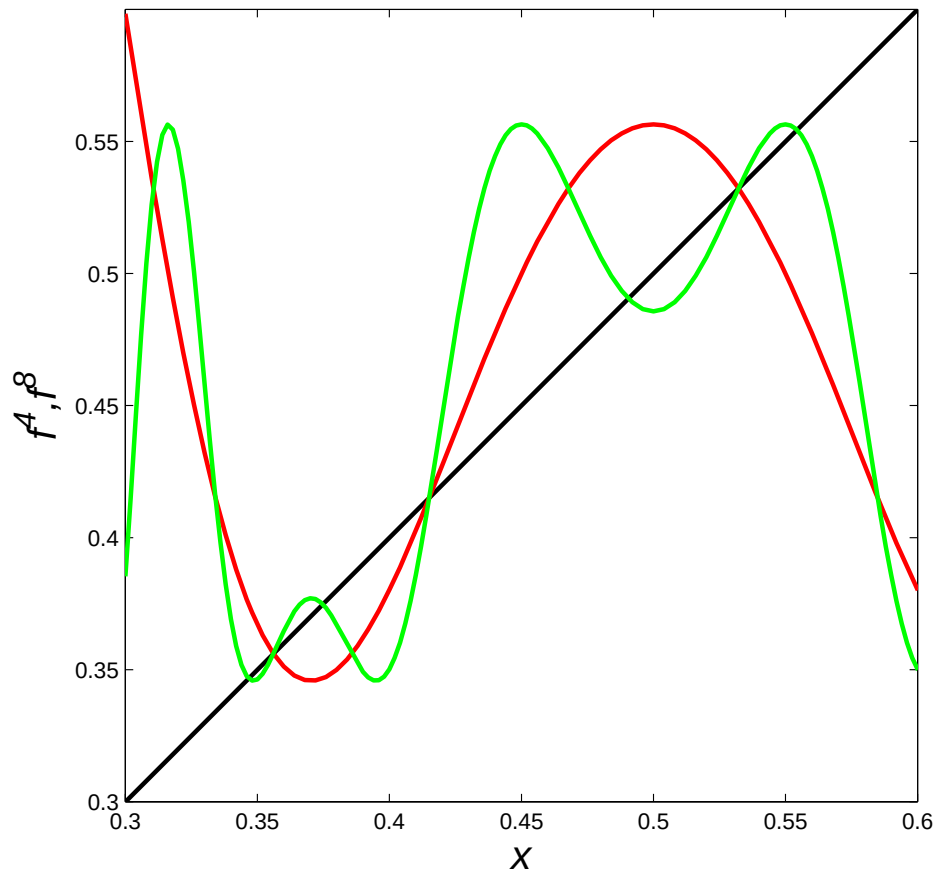
4周期解から8周期解

🔴 再び, $f \rightarrow f^2$, $f^2 \rightarrow f^4$ と類似の関係



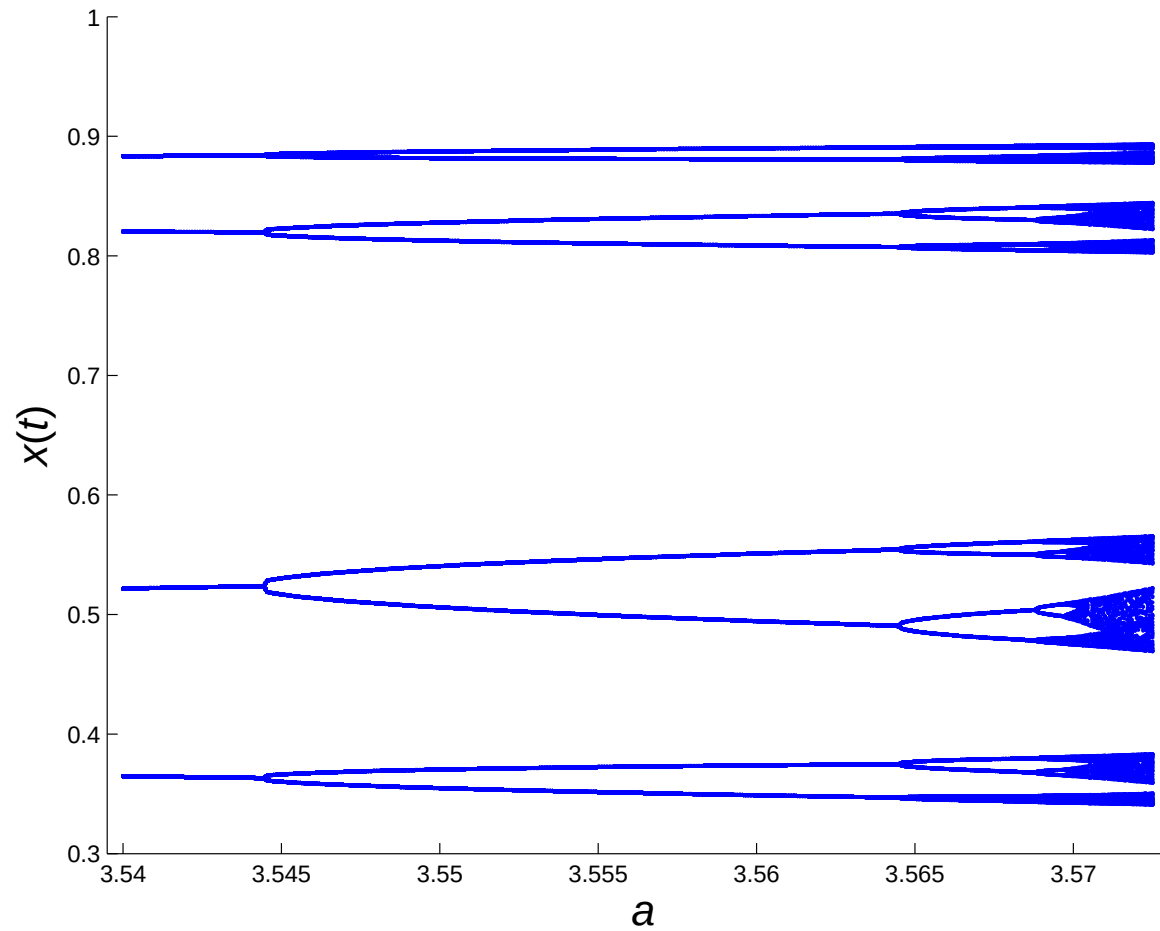
4周期解から8周期解

再び, $f \rightarrow f^2$, $f^2 \rightarrow f^4$ と類似の関係

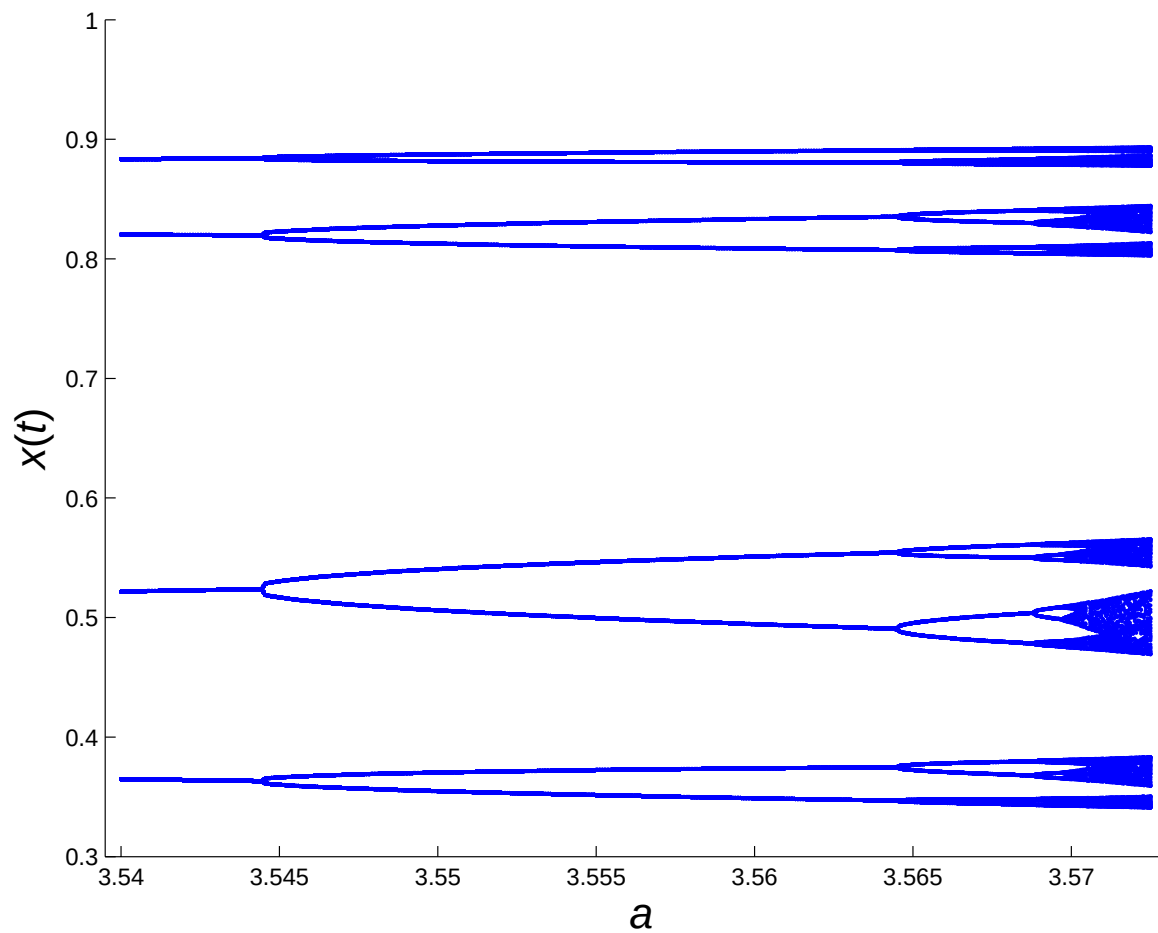


以降 ($8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow \dots$) も同様

$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \cdots \rightarrow 2^\infty$$



$$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \cdots \rightarrow 2^\infty$$



分岐点を $a_n : 2^{n-1} \rightarrow 2^n$ とすると...

ファイゲンバウム定数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.669201609103$$

- なぜこれが人々を驚かせたか？
- 1次元写像で求められた定数が，実験系においてもかなりの精度で推定されたため



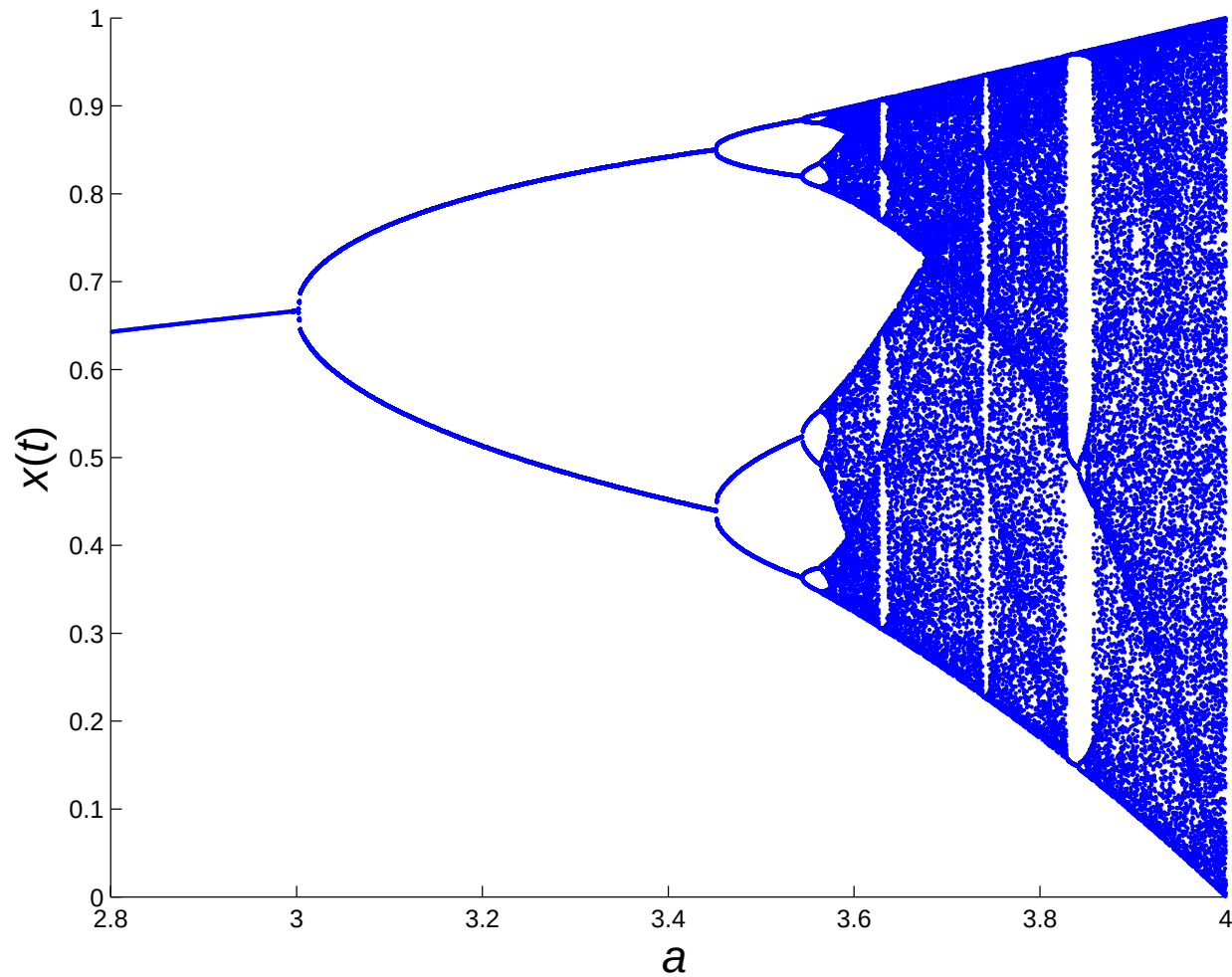
Universality 普遍性

条件

1. unimodal (単峰性) 1次元写像
2. $f''(x) \neq 0$ at peak
3. Schwarz 微分 $S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 < 0$

3周期の窓

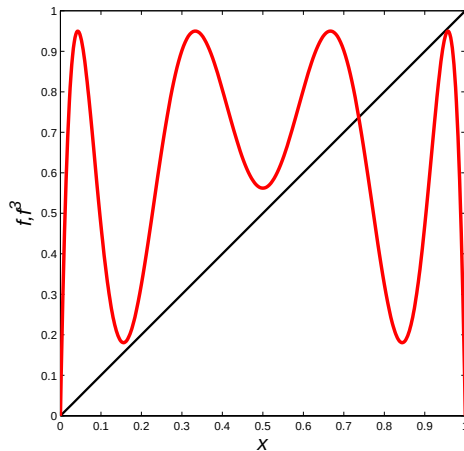
🔴 一番目立つ (?) 窓 → 周期3



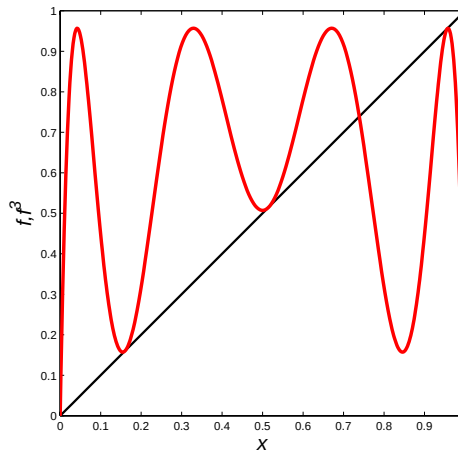
3 周期の窓

🔴 なぜ、周期 3 の窓が出現するのか $\Rightarrow f_a^3$ を考える

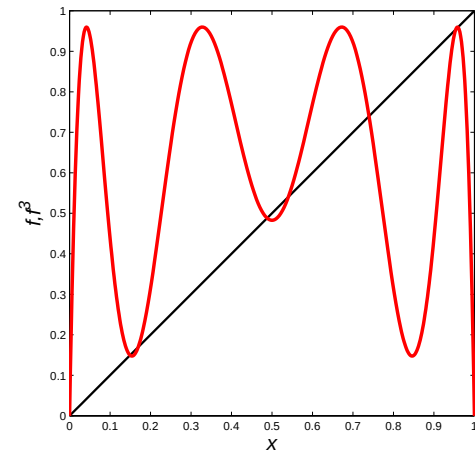
$$f_a^3(x) = x \iff x \left(x - 1 + \frac{1}{a} \right) (x \text{ の } 6 \text{ 次式})$$
$$\iff a^2 - 2a - 7 = 0 \iff a = 1 \pm \sqrt{8}$$



$$a = 3.8$$



$$a = 1 + \sqrt{8}$$



$$a = 3.84$$

$a = 1 + \sqrt{8}$ 前後

- 各接点では a の増加と共に直線を横切る
 $a = 3.82$, $a = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\dots$, $a = 3.835$
- 安定な周期解と不安定な周期解がペアで発生
 $\Rightarrow$ 接線分岐 (tangent bifurcation)

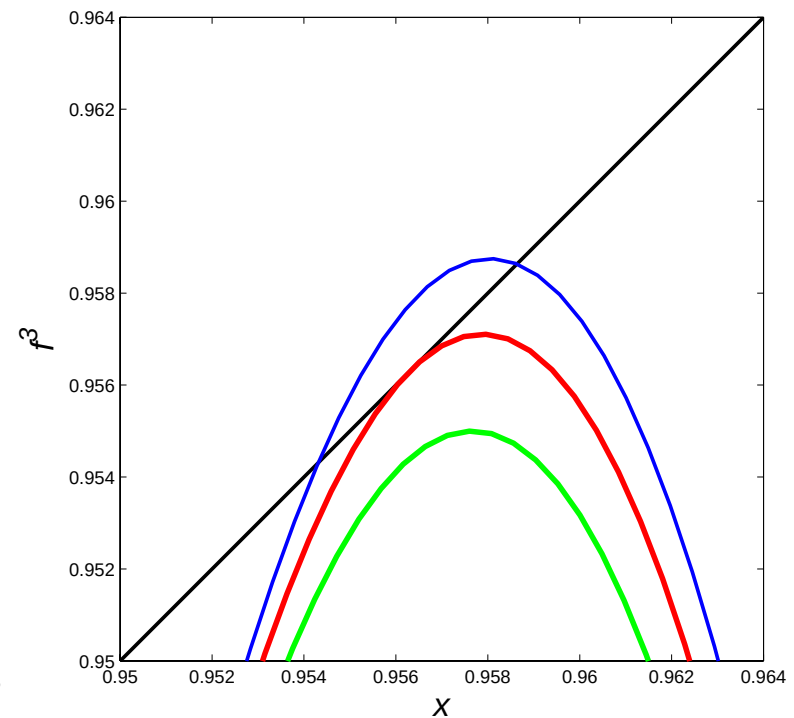
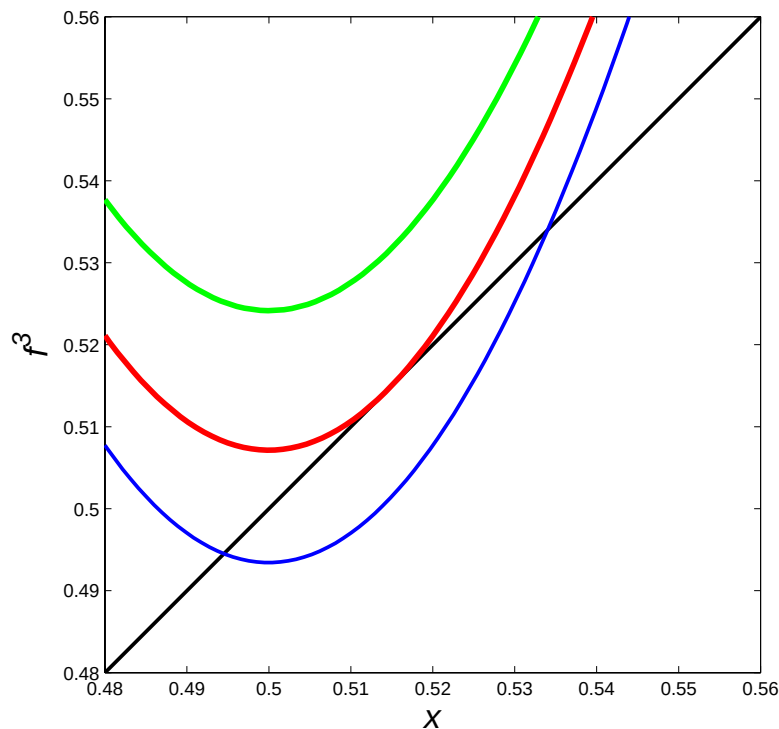
$a = 1 + \sqrt{8}$ 前後

- 各接点では a の増加と共に直線を横切る
 $a = 3.82$, $a = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\dots$, $a = 3.835$
- 安定な周期解と不安定な周期解がペアで発生
 $\Rightarrow$ 接線分岐 (tangent bifurcation)



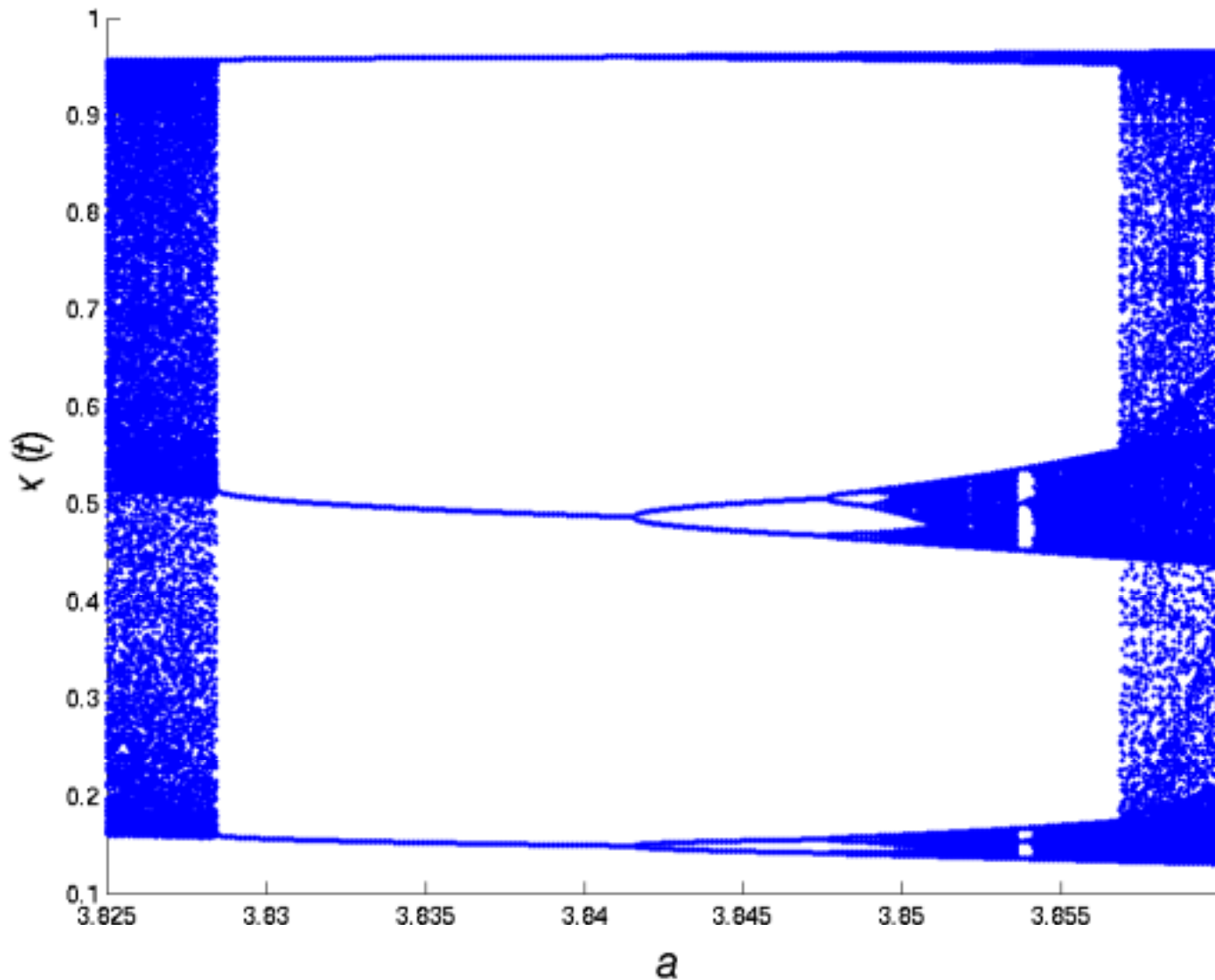
$a = 1 + \sqrt{8}$ 前後

- 各接点では a の増加と共に直線を横切る
 $a = 3.82$, $a = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\dots$, $a = 3.835$
- 安定な周期解と不安定な周期解がペアで発生
 $\Rightarrow$ 接線分岐 (tangent bifurcation)



3周期の窓付近

● $3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow \dots \rightarrow 3 \cdot 2^n \dots \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$



接線分岐

- 安定な周期解と不安定な周期解がペアになって生じる
- 接線分岐 (tangent bifurcation)
 - { 安定な 3 周期点 $\Rightarrow$ 周期倍分岐を経てカオス
 - { 不安定な 3 周期点
- 接線分岐を逆に辿ると間欠性カオス (intermittency) が発生

参考文献

- M. J. Feigenbaum : J. Stat. Phys, **19**(1), 25–32, 1978; **21**(6), 669–766, 1979
- 山口昌哉: カオスとフラクタル, ブルーバックス, 講談社.
- 早間 慧 (はやま さとし): カオス力学の基礎 第2版, 現代数学社.
- R. L. Devaney: カオス力学系入門 第2版, 共立出版.
- 他