

# カオスと時系列解析

## 非線形システム特論

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理学専攻

338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048-858-3577, Fax : 048-858-3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

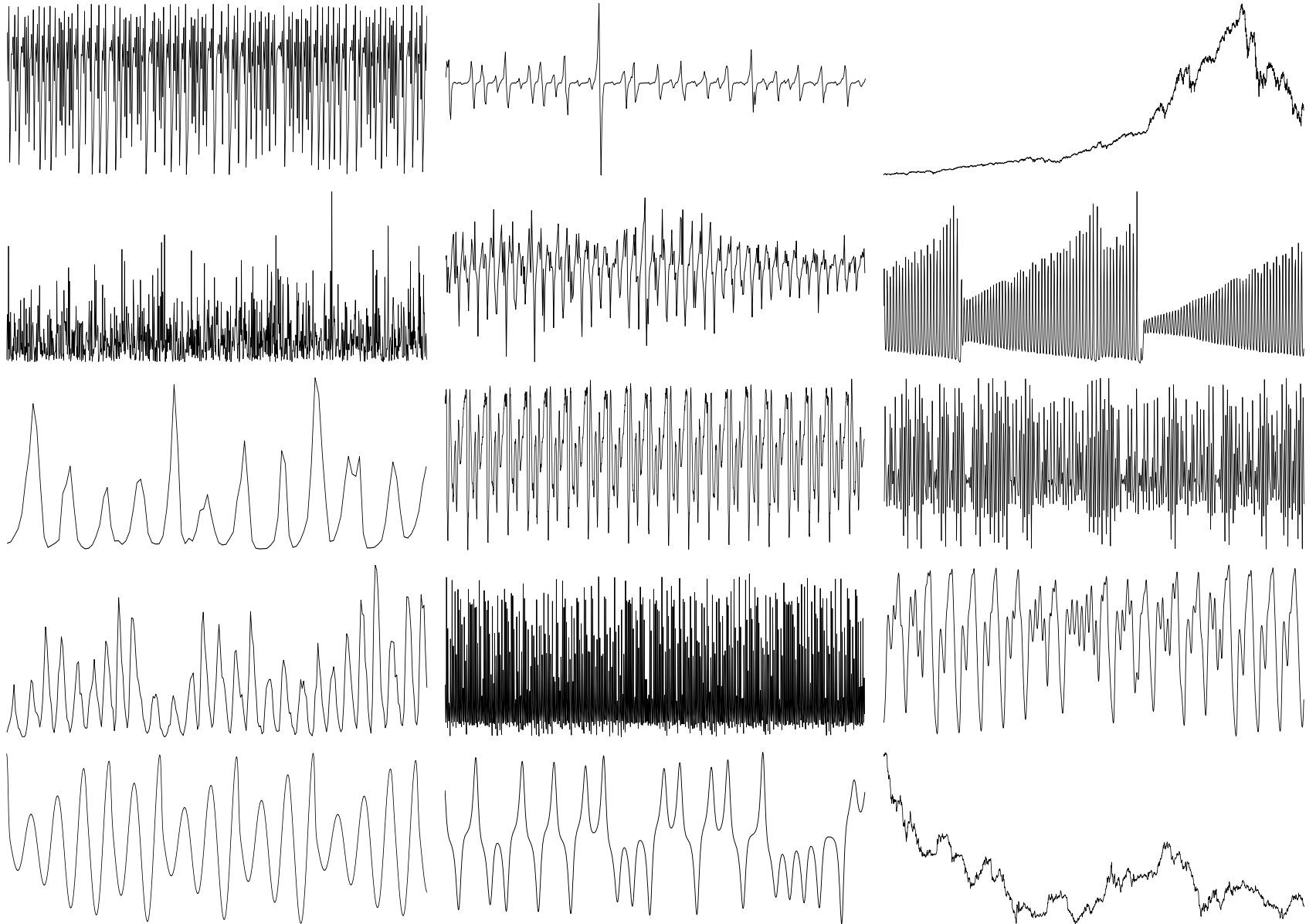
URL : <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru>

# 複雑な振る舞いを示す時系列 ...

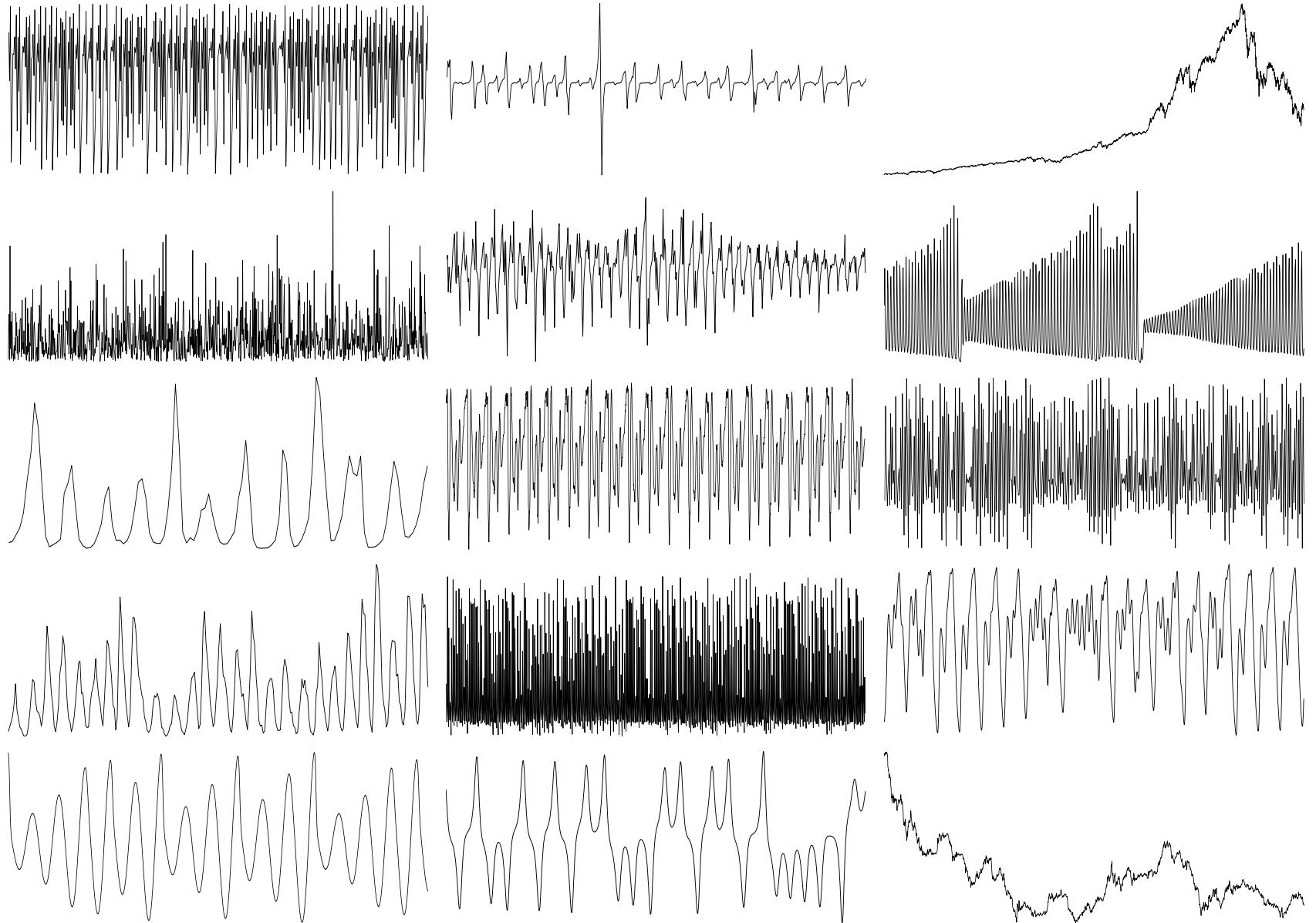
時間と共に変動する時系列信号 (time series)

- ◀ 温度，湿度，降水量
- ◀ 電気回路における電圧・電流
- ◀ 太陽黒点数，フレア数
- ◀ 経済指標 (日経 225，ダウ)
- ◀ 脳波・心電図・脈波，神経の発火パターン
- ◀ 化学反応
- ◀ 地震の発生間隔
- ◀ 感染症患者数
- ◀ 工学プラントにおける複雑な振動

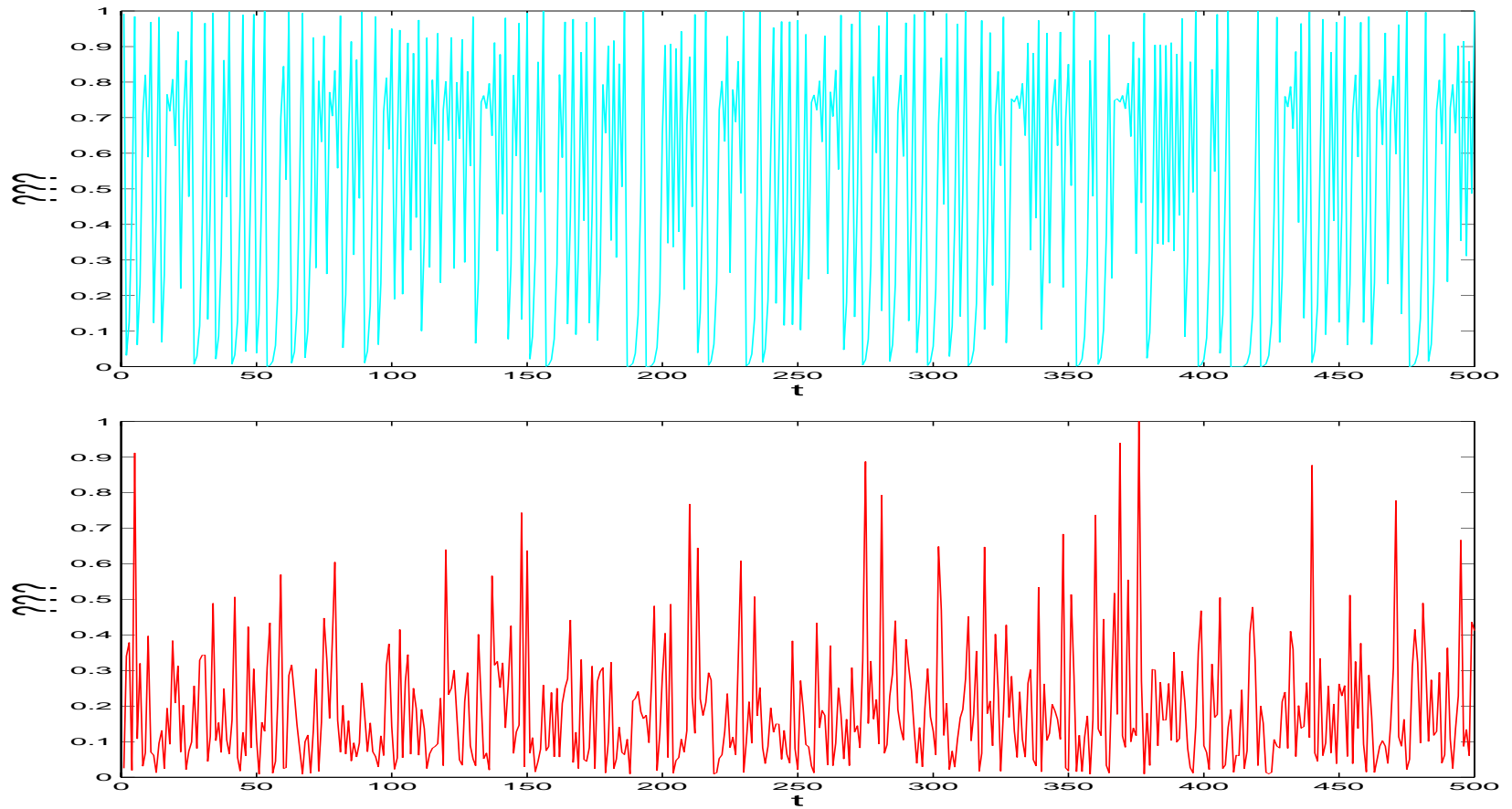
# 時系列信号の例



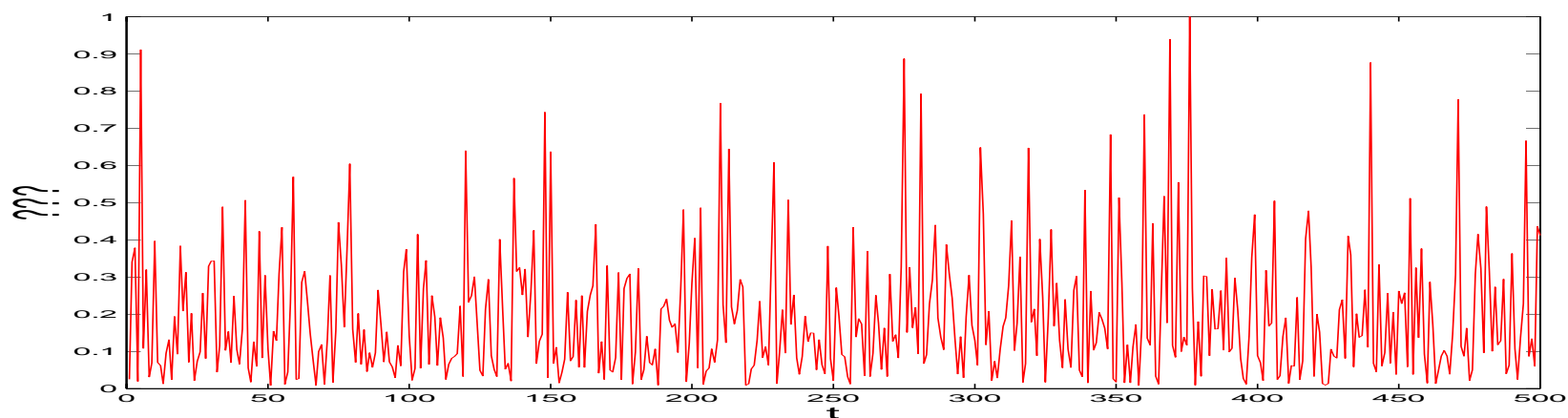
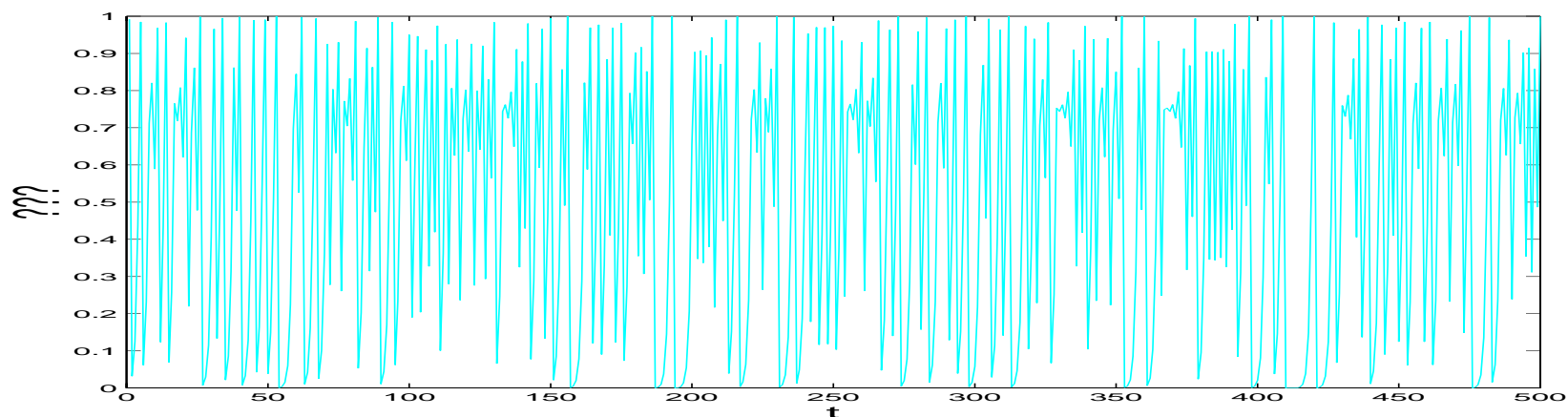
# 正体は?生み出した源は?



# 二つの複雑な時系列信号がある



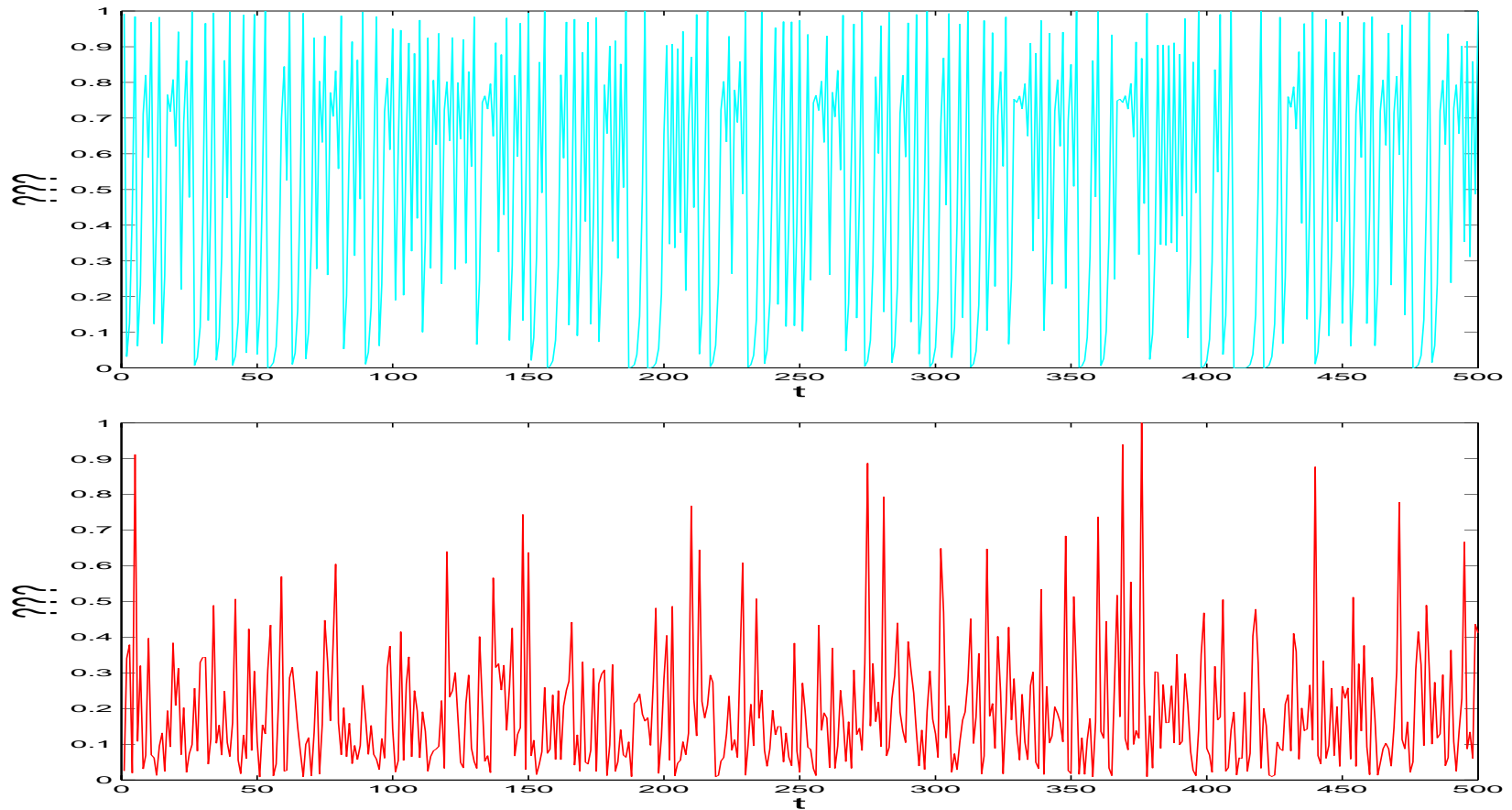
# 二つの複雑な時系列信号がある



これらの時系列は、

1. 共に、複雑な振る舞いを示している

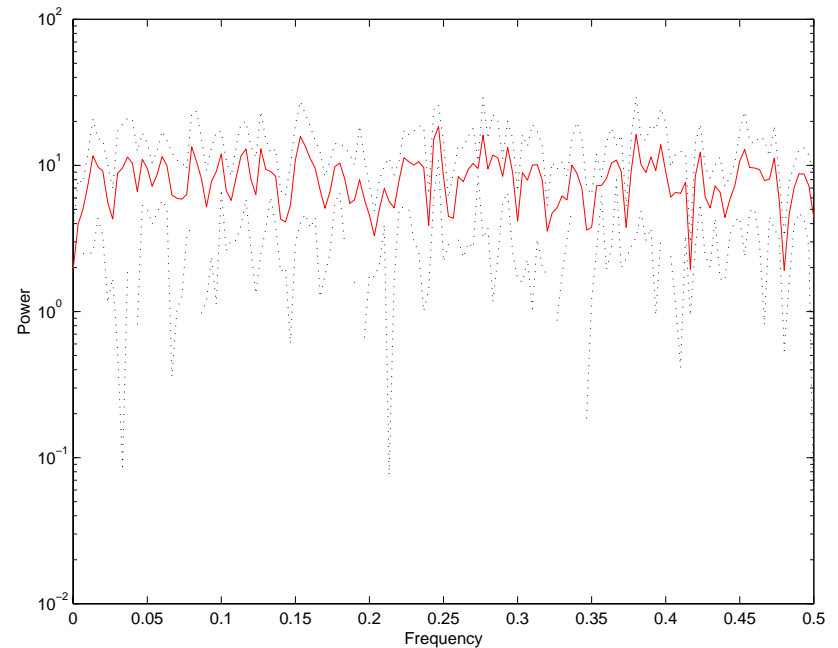
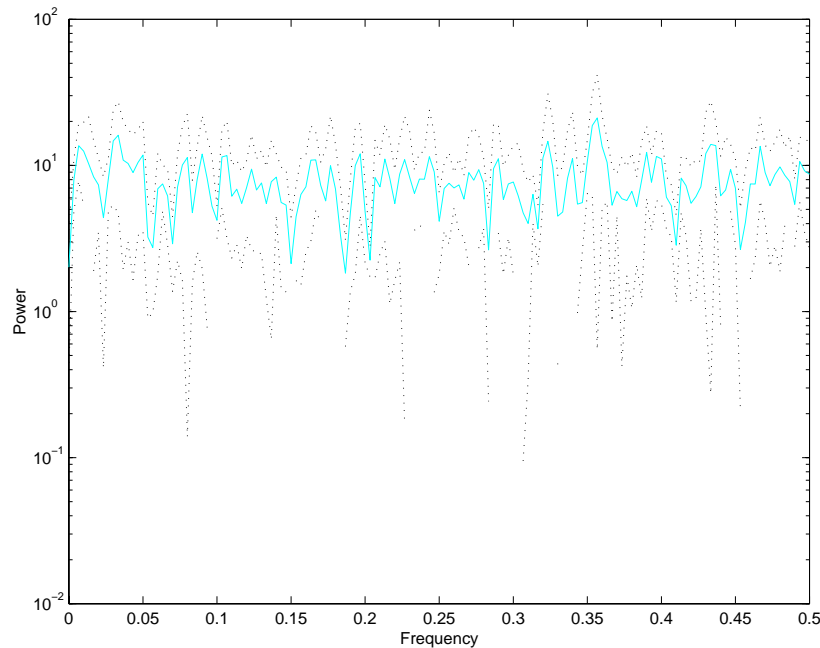
# 二つの複雑な時系列信号がある



これらの時系列は、

1. 共に、複雑な振る舞いを示している
2. 平均値と変動の大きさがほぼ同じ

# パワースペクトラムを推定すると



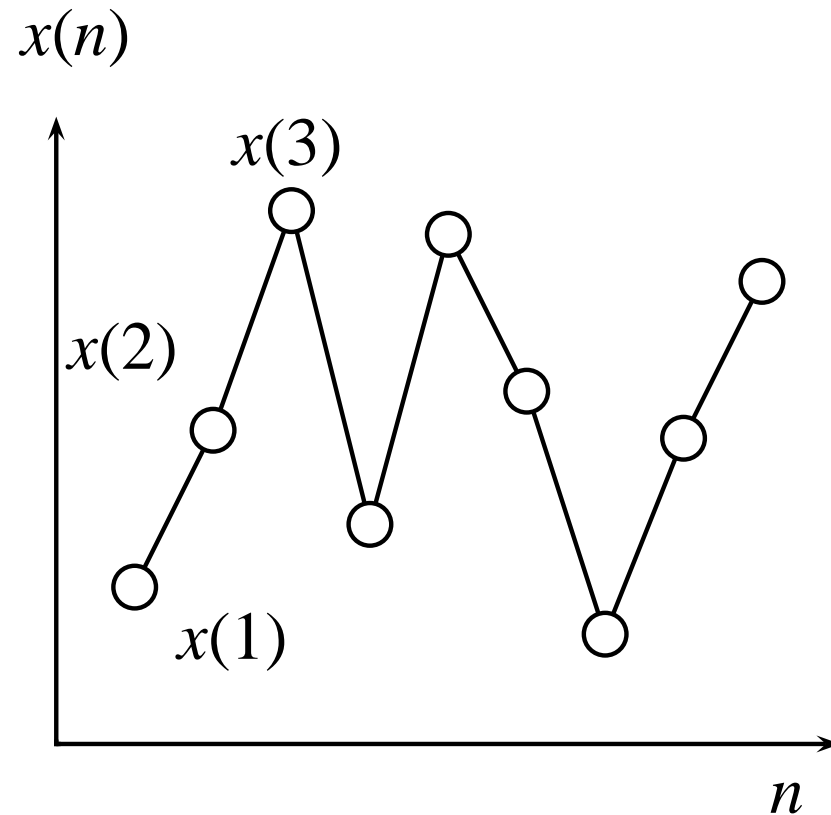
実線・パワースペクトラム, 点線・信頼区間



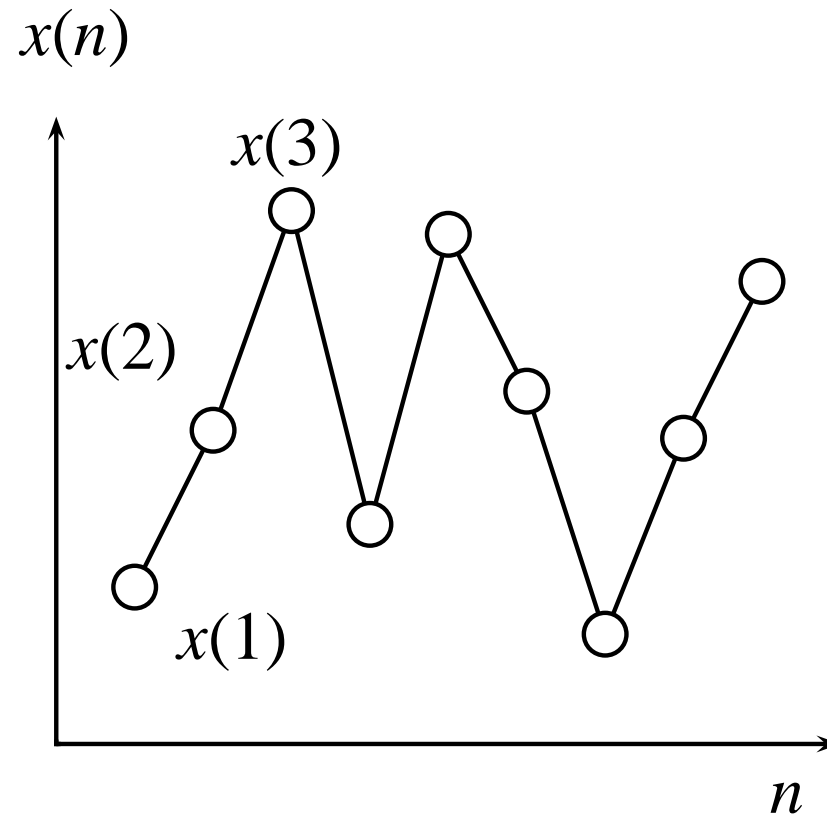
- ◀ 低周波から高周波まで一様にパワーがある
- ◀ 典型的なノイズが示す結果



# 少し違った見方をすると...

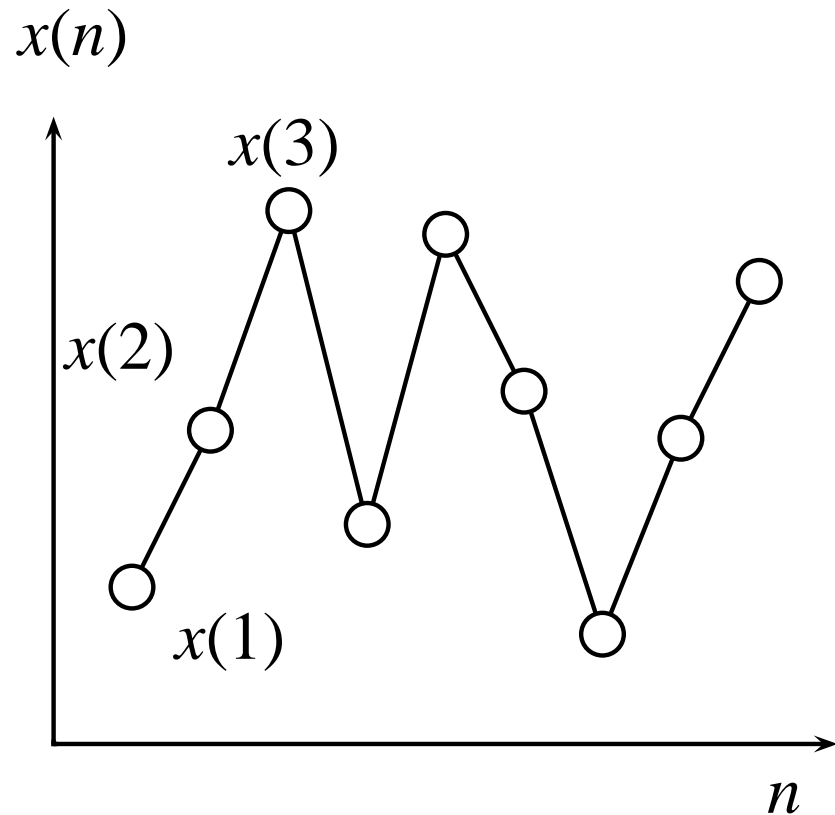


# 少し違った見方をすると...

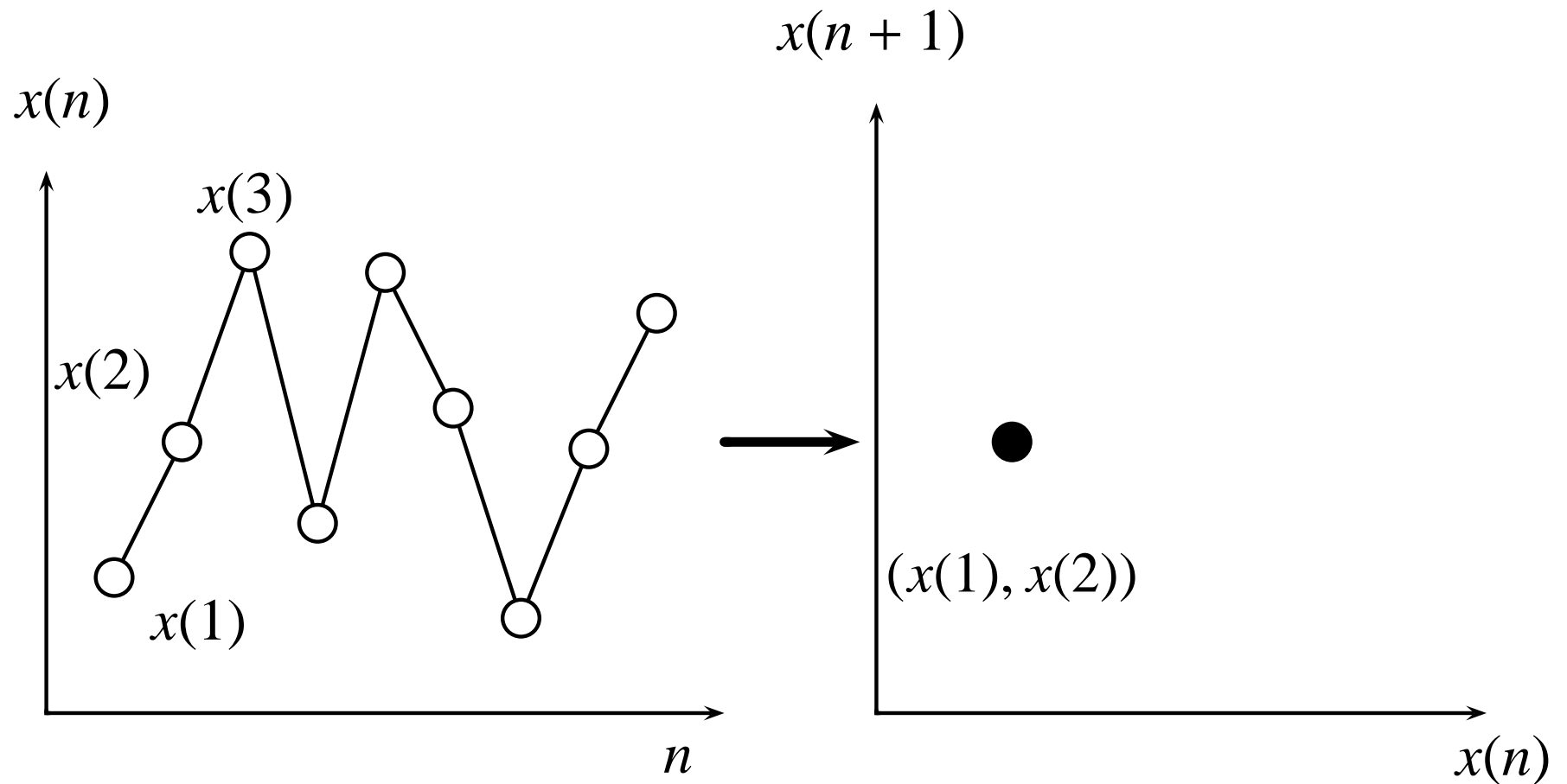


$x(n]$  と  $x(n + 1)$  のペアを考える .

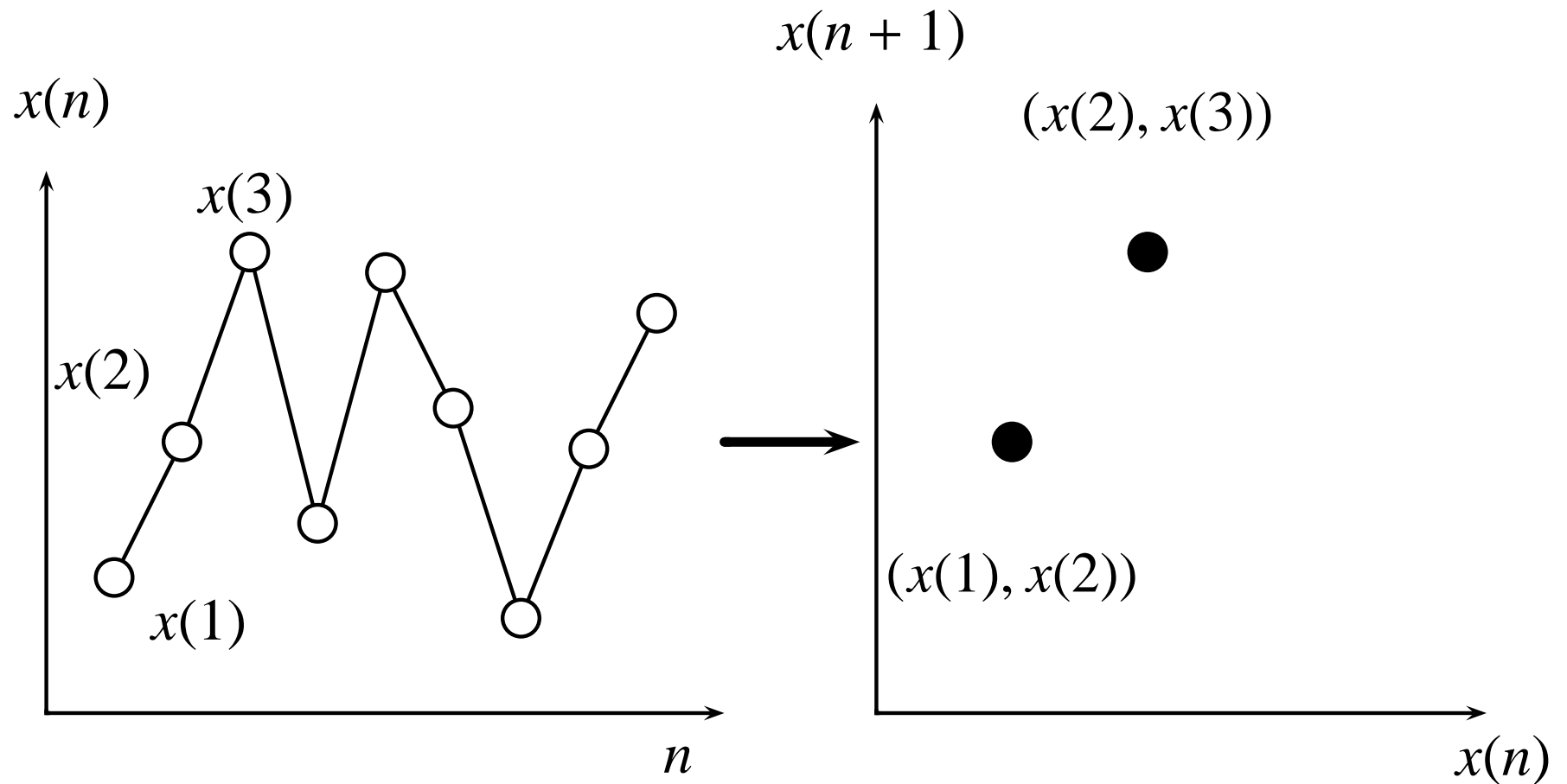
# 少し違った見方をすると...



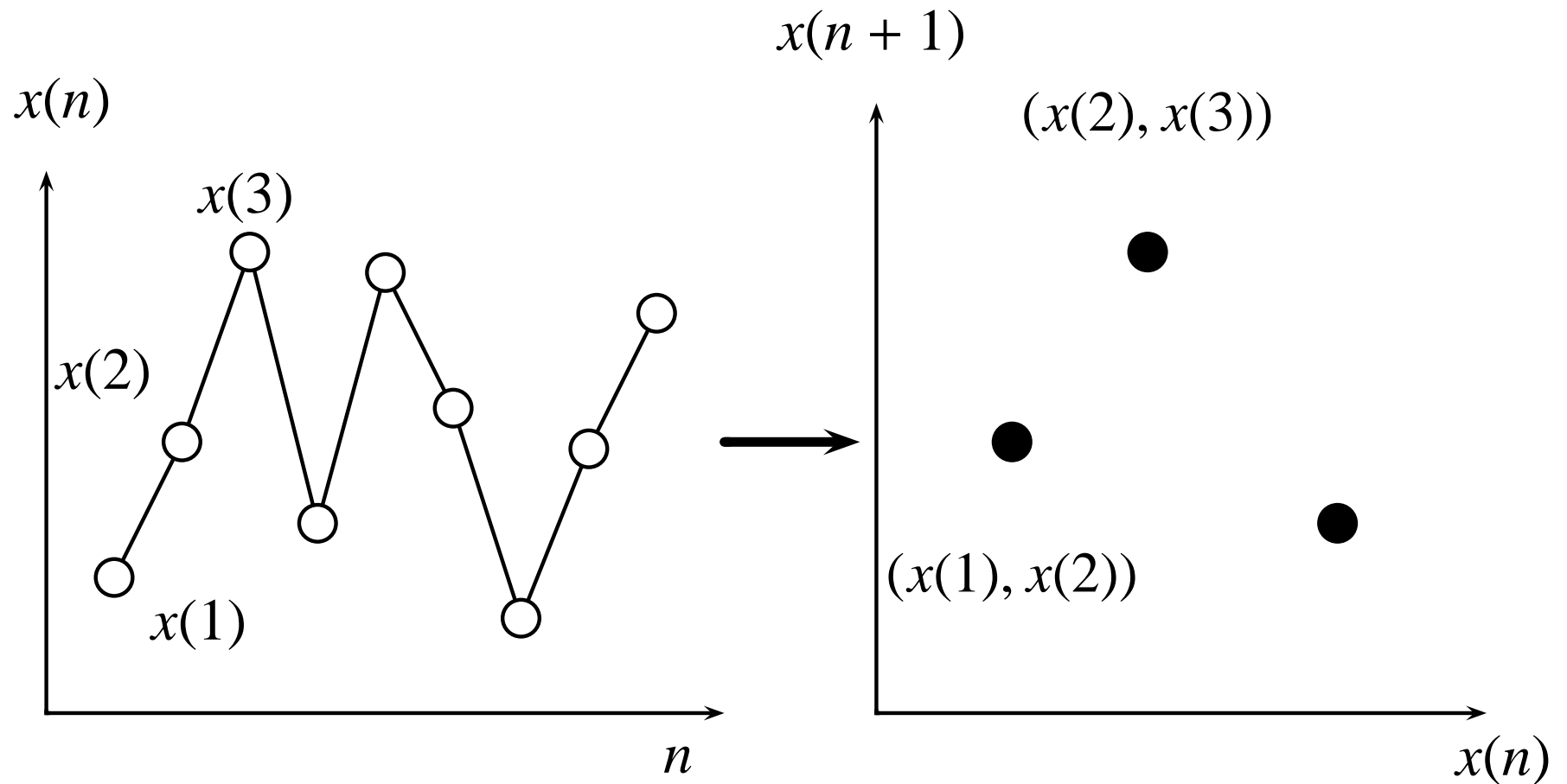
# 少し違った見方をすると...



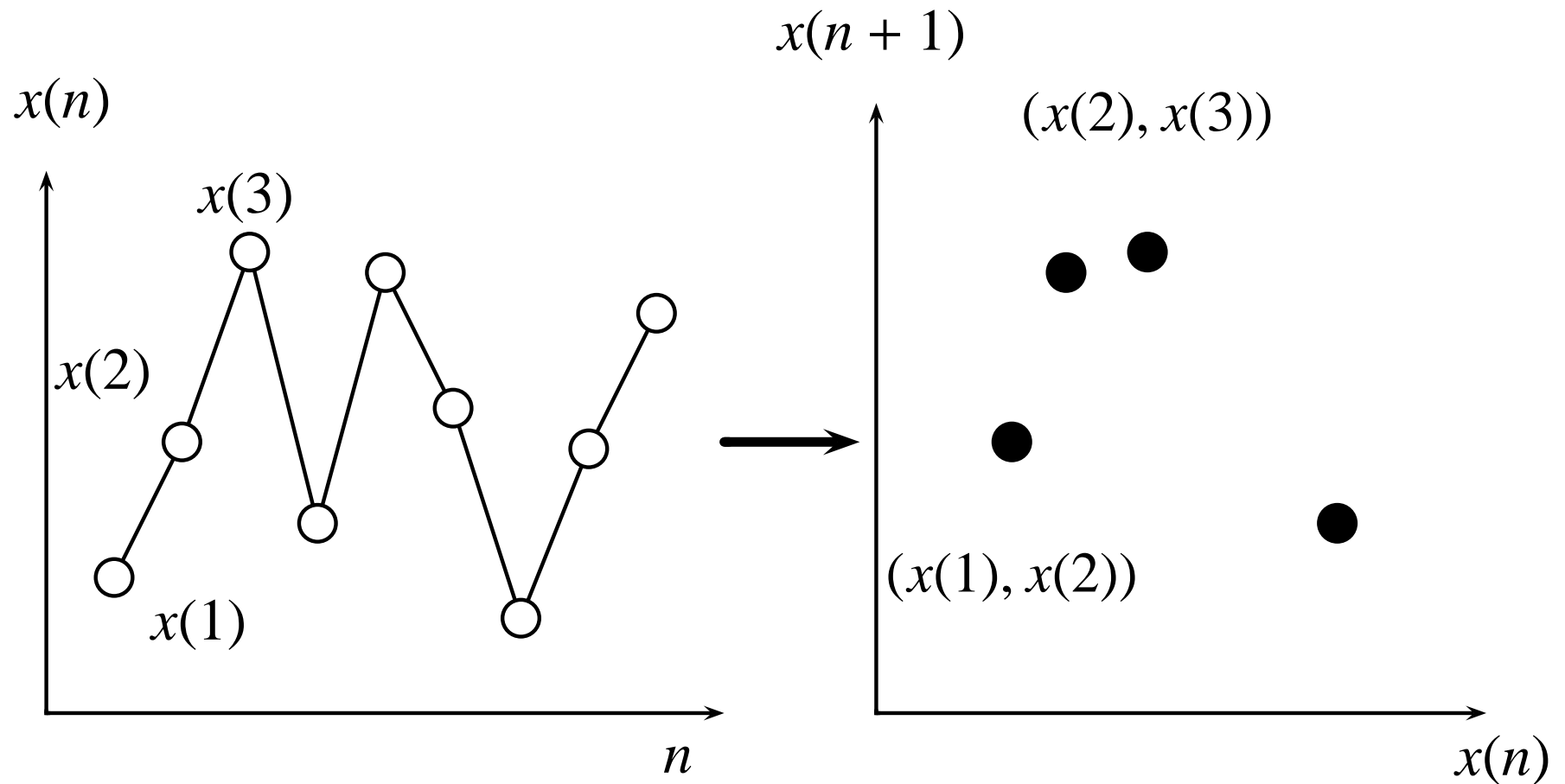
# 少し違った見方をすると...



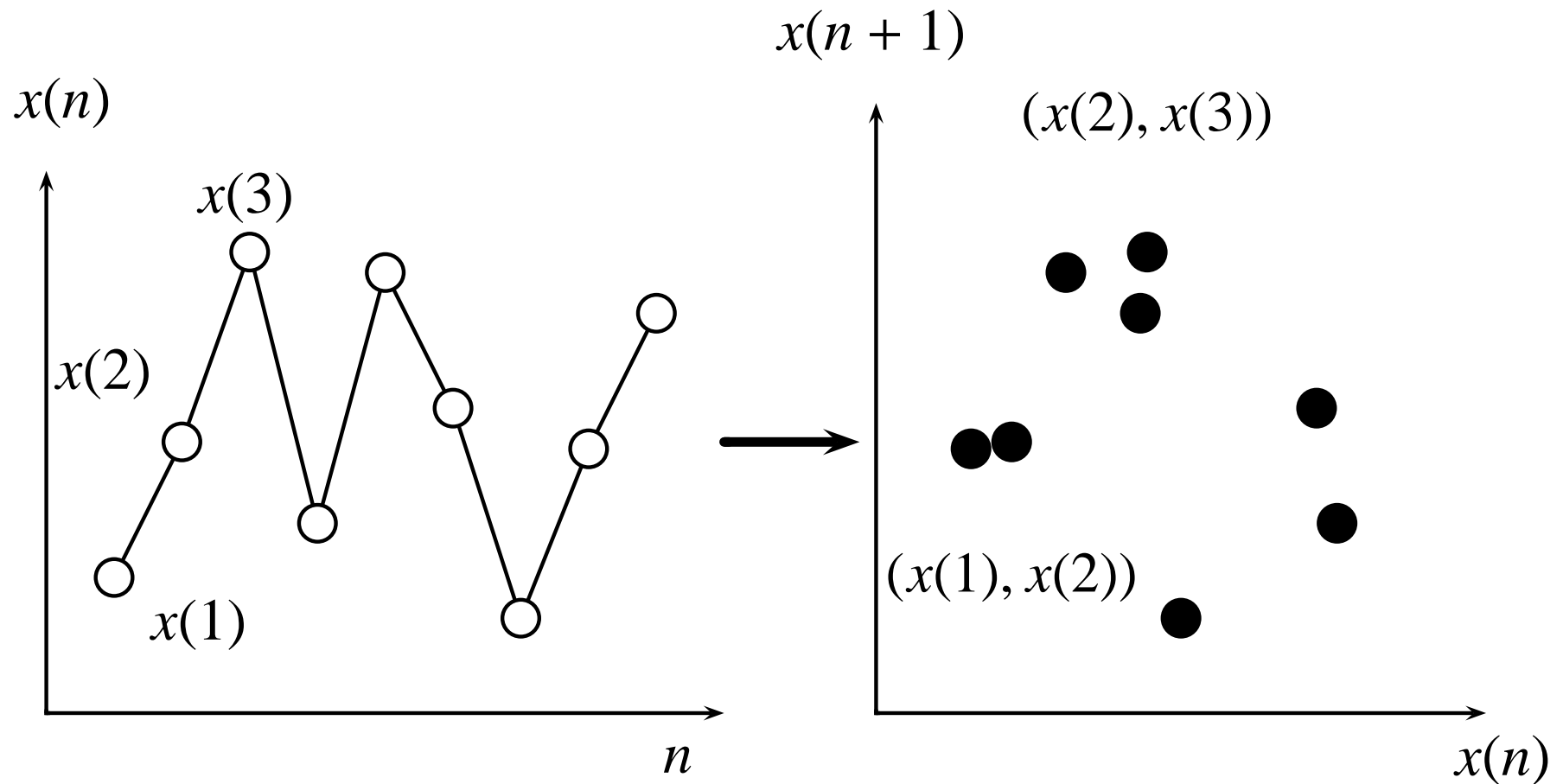
# 少し違った見方をすると...



# 少し違った見方をすると...



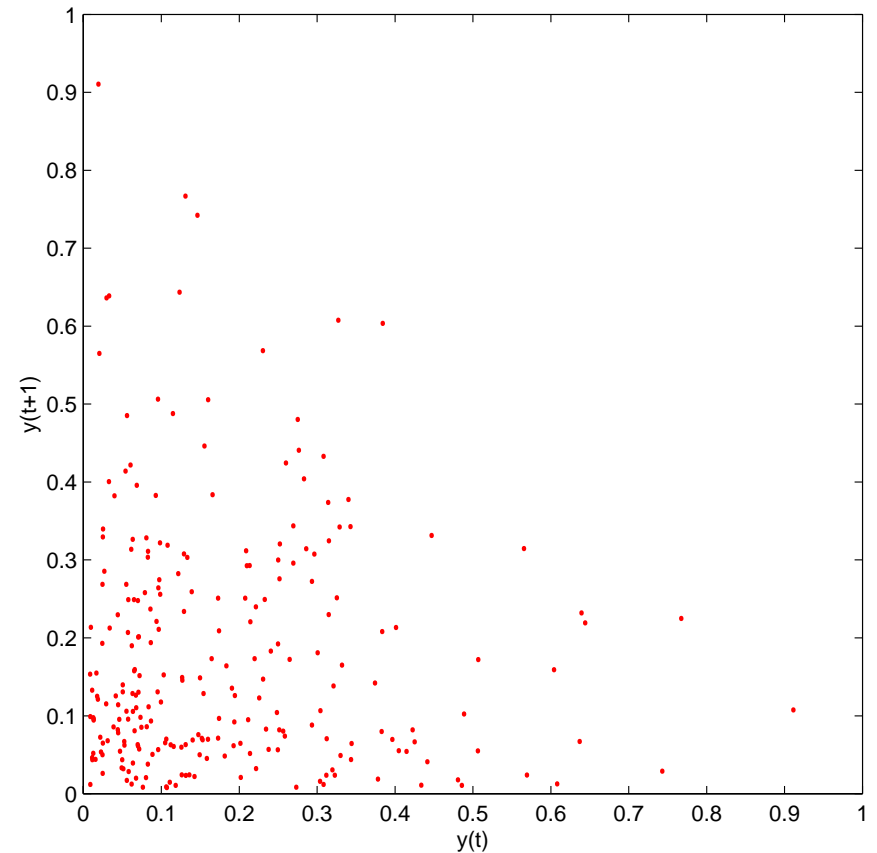
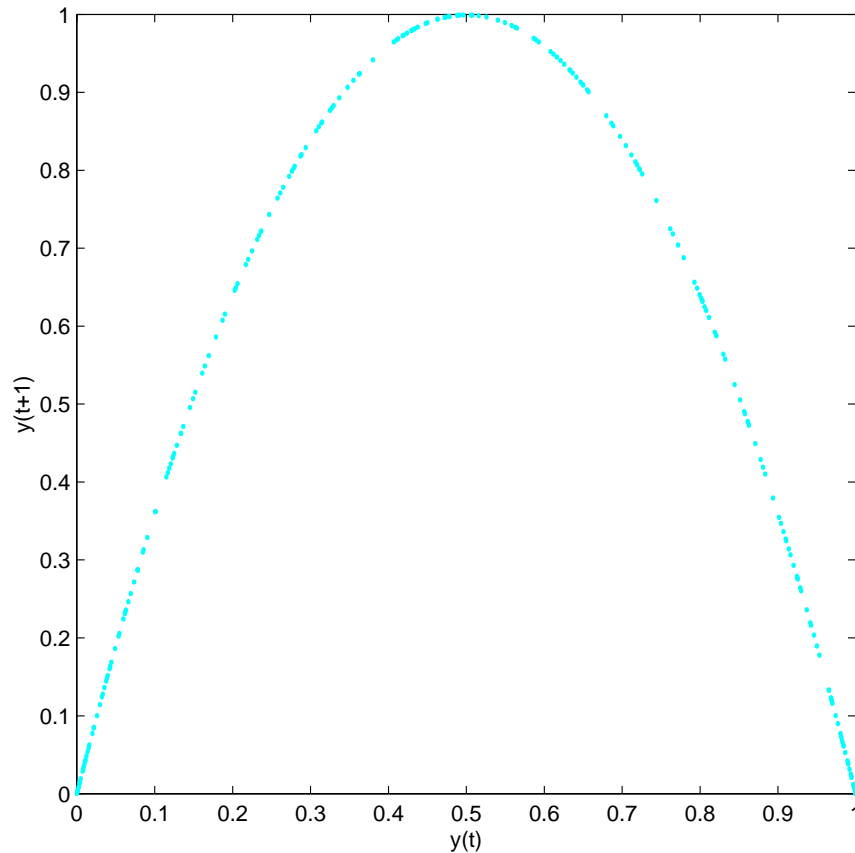
# 少し違った見方をすると...



$x(n)$  と  $x(n+1)$  → 状態空間の構成

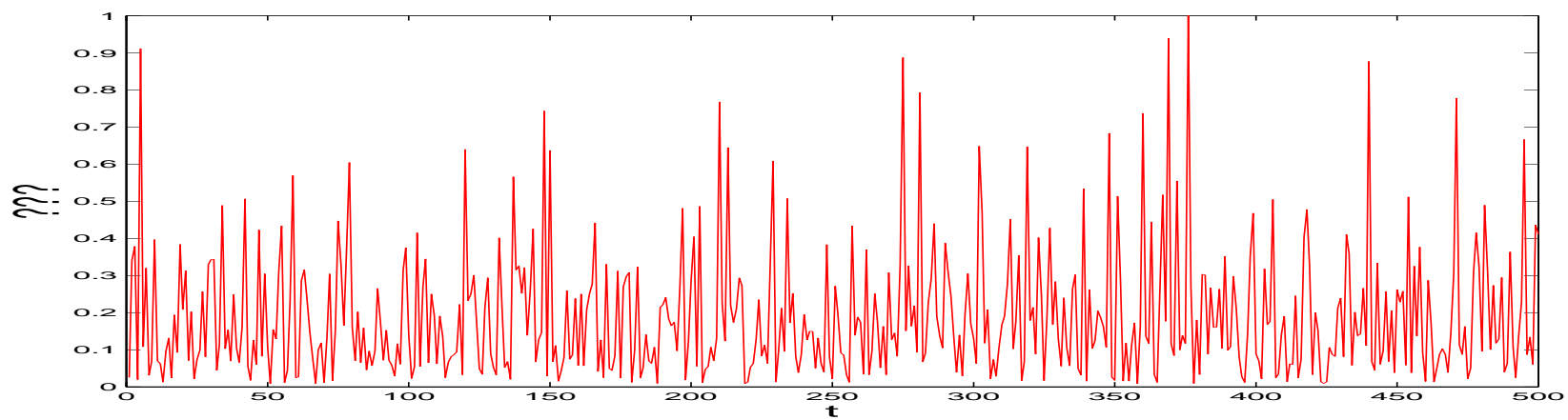
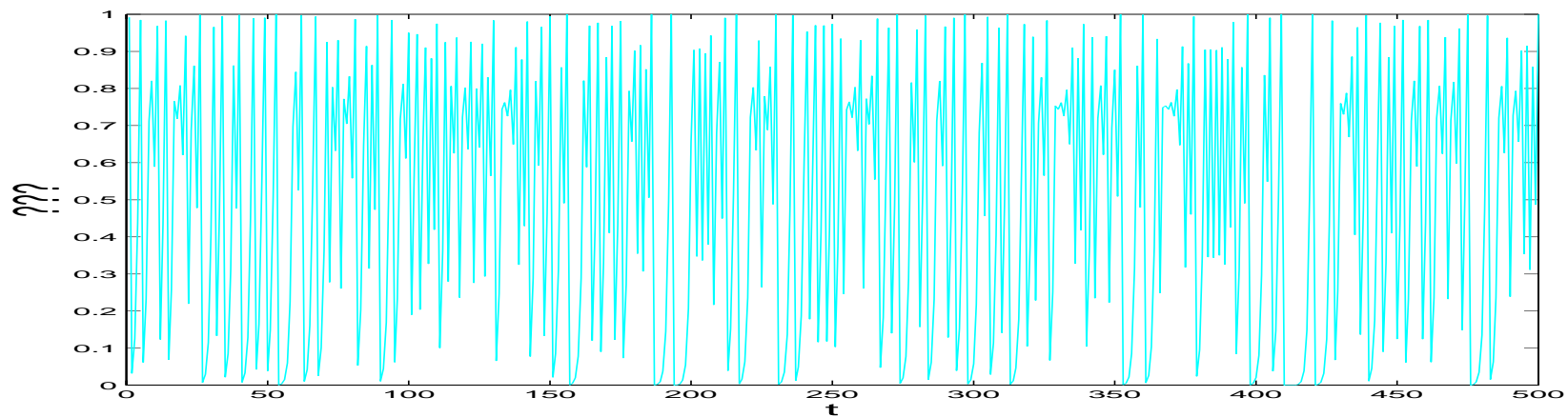


# 共に複雑な挙動を示していたが ...

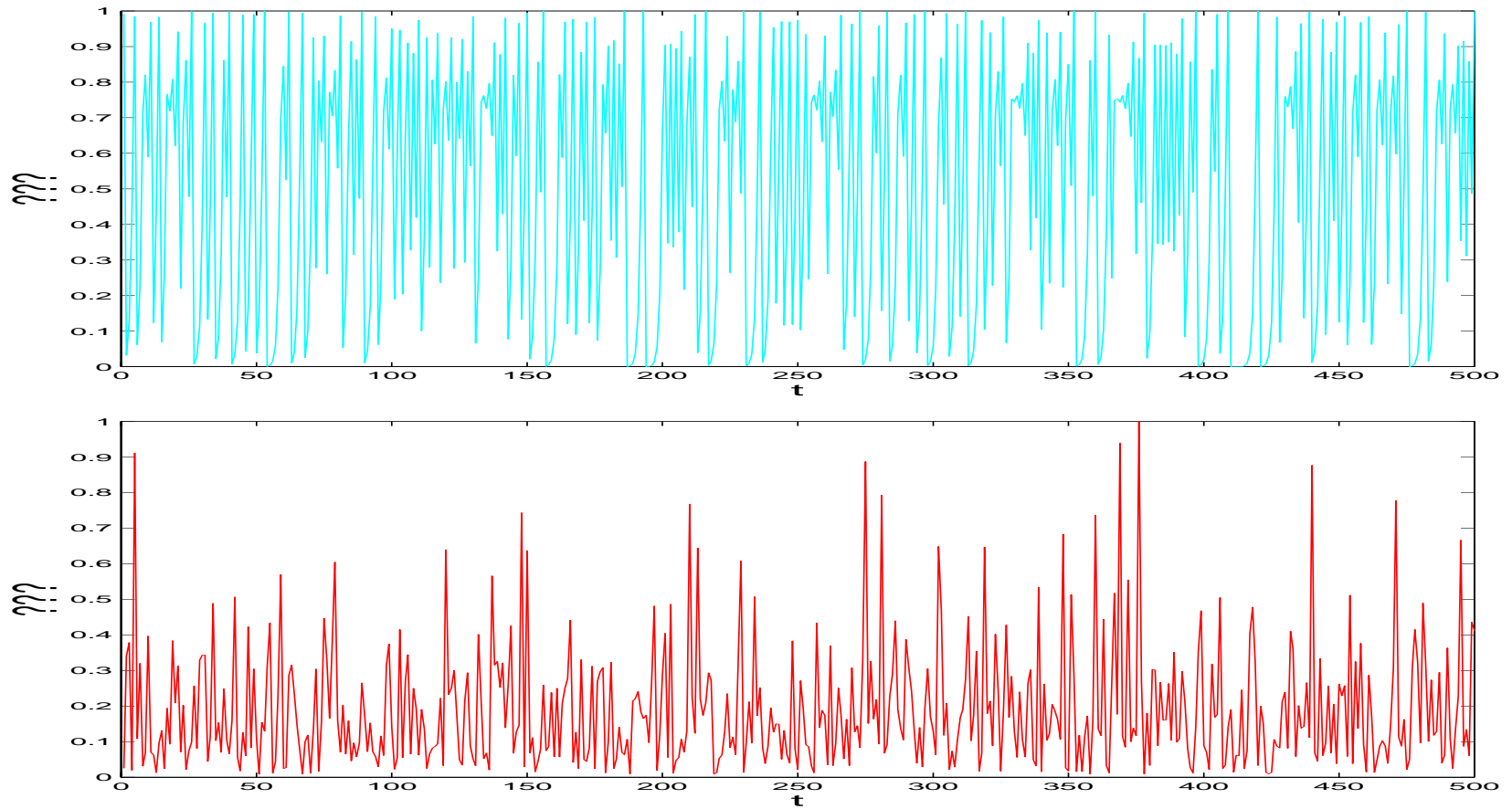


というように，差が現れる．

# 実は , , ,



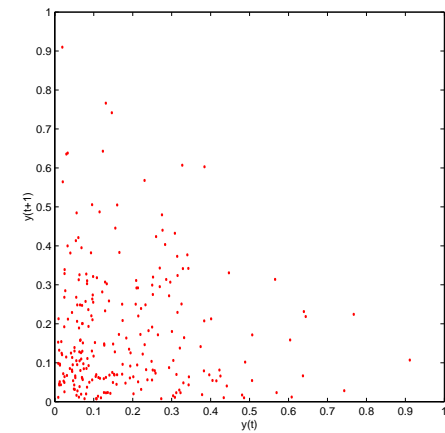
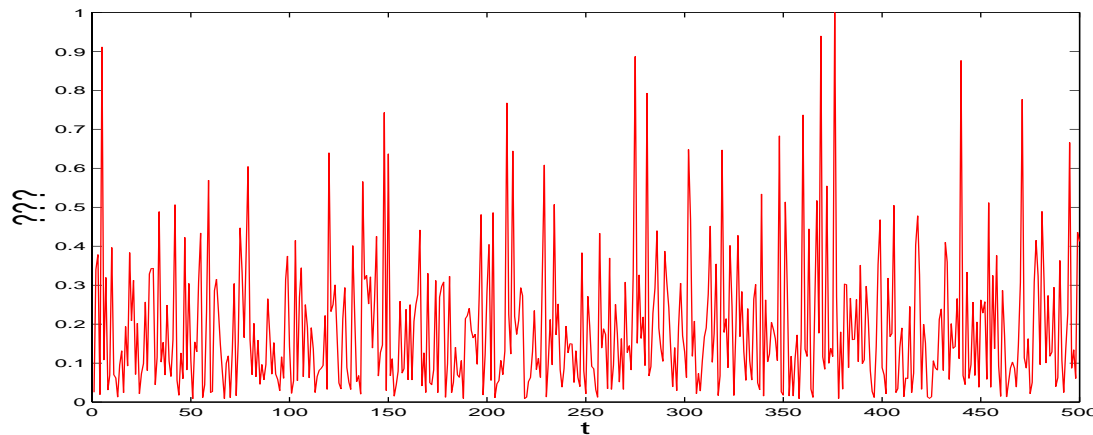
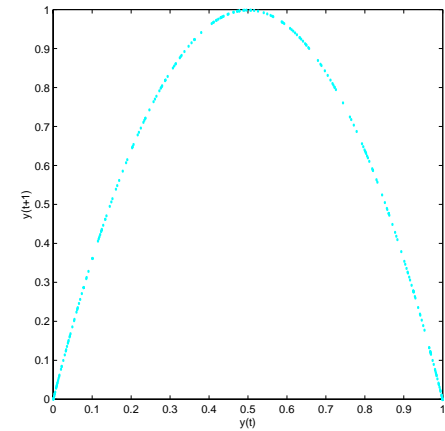
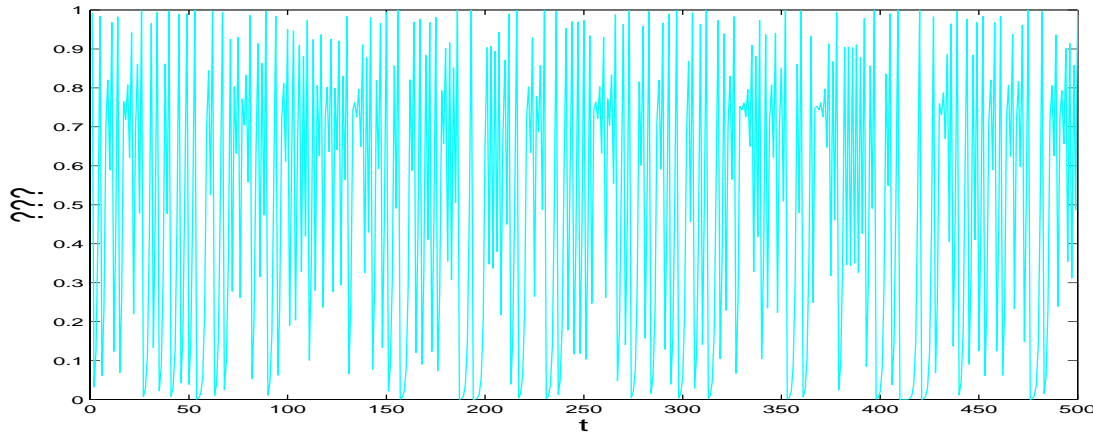
# 実は , , ,



ロジスティック写像  $x(n+1) = 4x(n)(1 - x(n))$

コバルト 線放射の時間間隔

# 実は , , ,



ロジスティック写像  $x(n+1) = 4x(n)(1 - x(n))$

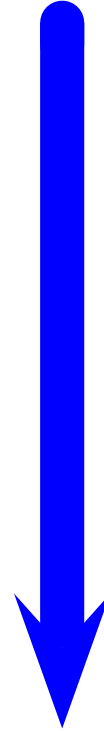
コバルト 線放射の時間間隔

# 動機

## 少数自由度の非線形力学系

Poincaré  
Hadamard  
Kalman  
Lorenz  
Rössler  
Li-Yorke  
...

数理モデルに対する解析

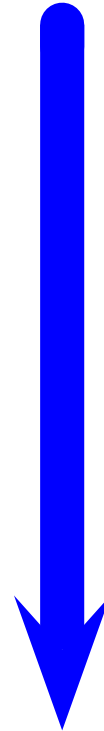


# 動機

## 少数自由度の非線形力学系

Poincaré  
Hadamard  
Kalman  
Lorenz  
Rössler  
Li-Yorke  
...

数理モデルに対する解析



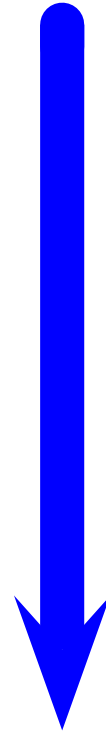
複雑な振る舞い

# 動機

## 少数自由度の非線形力学系

Poincaré  
Hadamard  
Kalman  
Lorenz  
Rössler  
Li-Yorke  
...

数理モデルに対する解析



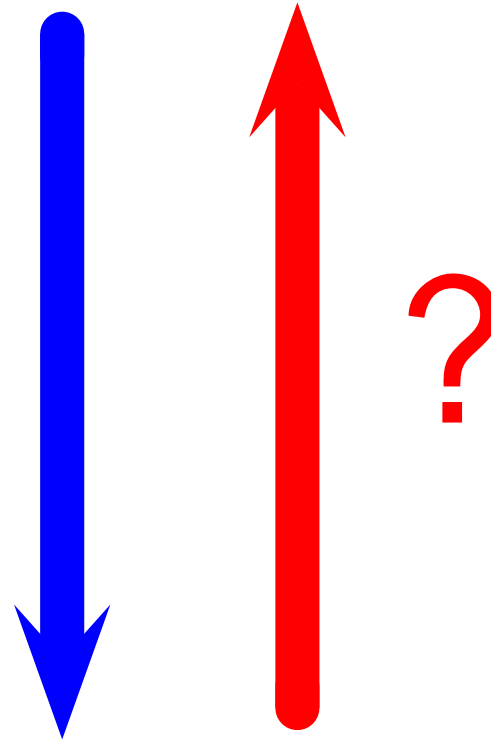
複雑な振る舞い = 決定論的カオス

# 動機

## 少数自由度の非線形力学系

Poincaré  
Hadamard  
Kalman  
Lorenz  
Rössler  
Li-Yorke  
...

数理モデルに対する解析



複雑な振る舞い = 決定論的カオス



# カオスとは

少数自由度の決定論的非線形力学系から  
生じる複雑な現象

例：ロジスティック写像

$$x(n + 1) = 4x(n)(1 - x(n))$$

1. 少数自由度  
ロジスティック写像は 1 自由度 .
2. 決定論的力学系  
確率的要素が全く含まれない  
→ 前状態が決まれば , 次状態が完全に決定される
3. 非線形性  
ロジスティック写像は 2 次の非線形性

# 力学系とは

1. 例えば,

$$\mathbf{x}(n+1) = f_{\mu}(\mathbf{x}(n)), \mathbf{x}(n) \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{Z}$$

2. 分類

離散時間 対 連続時間

差分方程式 (difference equation)

$$\mathbf{x}(n+1) = f(\mathbf{x}(n))$$

常微分方程式 (ordinary differential equation)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$$

微差分方程式 (delay differential equation)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau))$$

偏微分方程式 (partial differential equation)

自律系 対 非自律系

自律系 (autonomous system)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$$

非自律系 (non-autonomous system)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), t)$$

入出力システム (Input-Output System)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

# 力学系のアトラクタ

## 1. 力学系

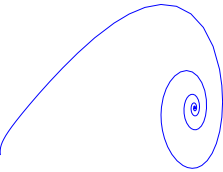
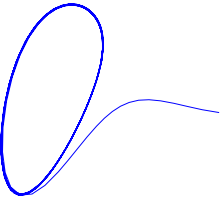
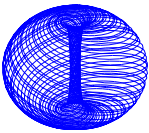
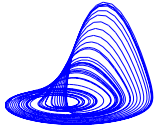
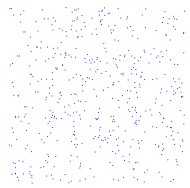
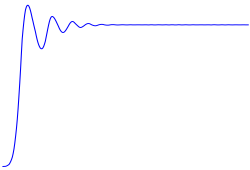
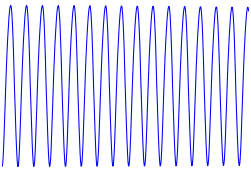
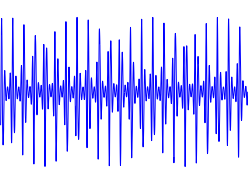
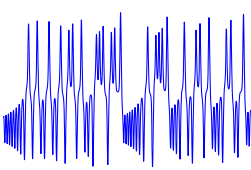
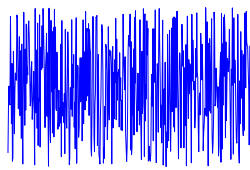
$$x(n+1) = f_{\mu}(x(n)), x(n) \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{Z}$$

に対し初期値  $x(0)$  を与える．十分時間が経過した後の  $d$  次元状態空間内での  $x(n)$  の漸近的振る舞い．

## 2. 分類

- (a) 固定点 (fixed point)
- (b) リミットサイクル (limit cycle)
- (c) トーラス (torus)
- (d) ストレンジアトラクタ (strange attractor) = カオス

# 力学系のアトラクタ

	平衡点	リミットサイクル	$k$ トーラス	ストレンジアトラクタ	ランダム
状態空間					
振舞	平衡状態	周期	準周期	カオス	ノイジー
構造	点	閉曲線 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$ ( $k \geq 2$ )	フラクタル	無構造
次元	0	1	$k$	非整数	状態空間 $d$
リアプノフ スペクトラム	$\lambda_i < 0$ ( $i=1, \dots, d$ )	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_i < 0$ ( $i=2, \dots, d$ )	$\lambda_i = 0$ ( $i=1, \dots, k$ ) $\lambda_i < 0$ ( $i=k+1, \dots, d$ )	$\lambda_i > 0$ ( $i=1, \dots, m-1$ ) $\lambda_m = 0$ $\lambda_i < 0$ ( $i=m+1, \dots, d$ )	
波形					

# カオス力学系の特徴

1. 軌道不安定性 (Orbital Instability)
2. 長期予測不能性と短期予測可能性  
(Long-term unpredictability and short-term predictability)
3. アトラクタの自己相似性 (Self-similarity)
4. 非周期性 (Non-periodicity)
5. 有界性 (Boundedness)

# 時系列解析の問題意識

◀ 観測時系列のみから元の力学系の統計的性質の推定が出来るか？

# 時系列解析の問題意識

◀ 観測時系列のみから元の力学系の統計的性質の推定が出来るか？

⇒ { 次元, リアプノフ指数, 不変測度  
統計量推定アルゴリズムの収束性  
統計量の誤差, 分散, 精度

# 時系列解析の問題意識

◀ 観測時系列のみから元の力学系の統計的性質の推定が出来るか？

⇒ { 次元, リアプノフ指数, 不変測度  
統計量推定アルゴリズムの収束性  
統計量の誤差, 分散, 精度

◀ 現象のモデリング

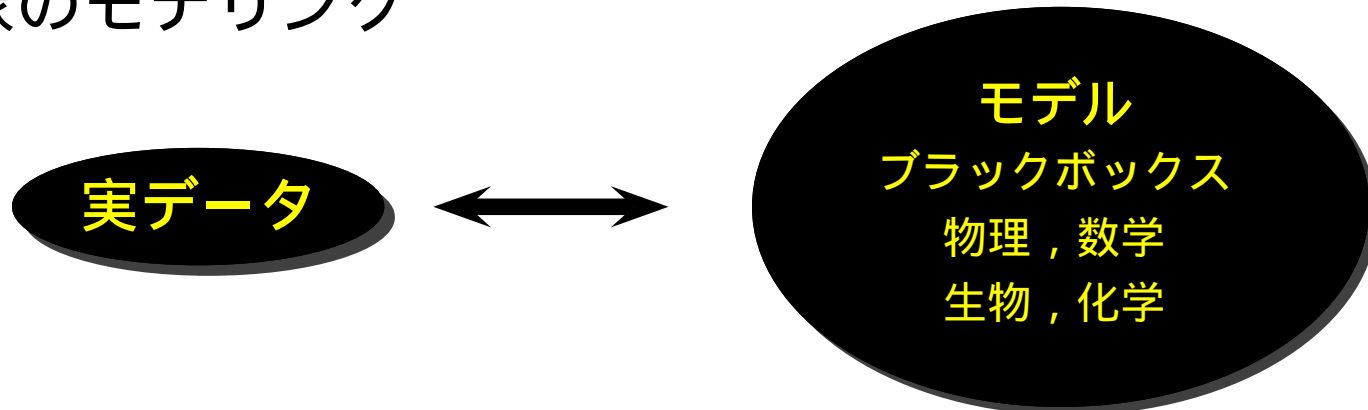


# 時系列解析の問題意識

◀ 観測時系列のみから元の力学系の統計的性質の推定が出来るか？

⇒ { 次元, リアプノフ指数, 不変測度  
統計量推定アルゴリズムの収束性  
統計量の誤差, 分散, 精度

◀ 現象のモデリング

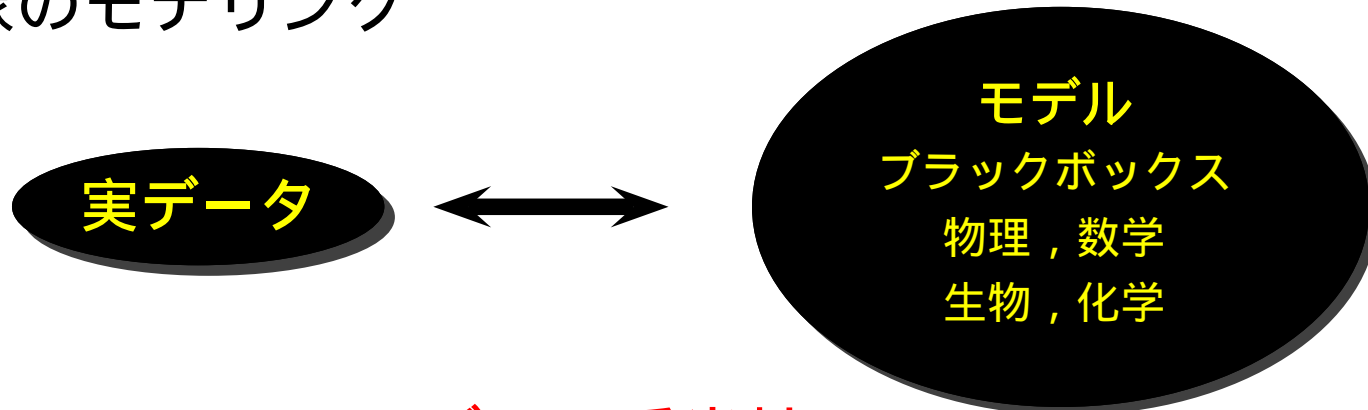


# 時系列解析の問題意識

◀ 観測時系列のみから元の力学系の統計的性質の推定が出来るか？

⇒ { 次元, リアプノフ指数, 不変測度  
統計量推定アルゴリズムの収束性  
統計量の誤差, 分散, 精度

◀ 現象のモデリング

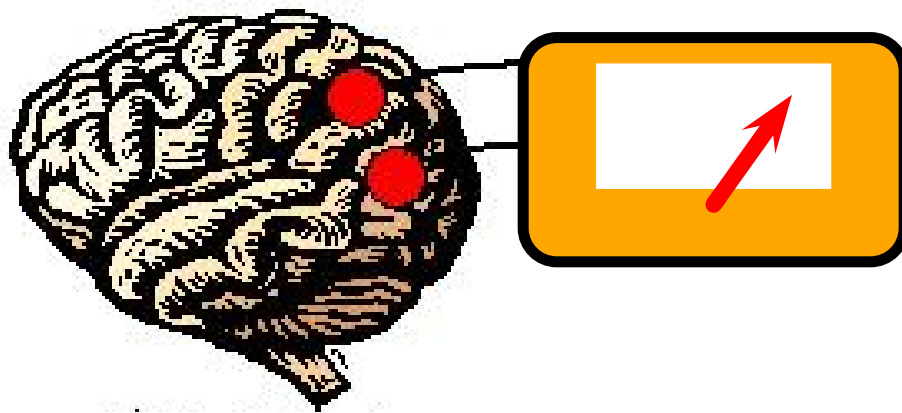


モデルの妥当性  
(実データとモデルとの比較)

# カオス時系列解析の問題意識

1. 複雑な挙動を生み出した源として，  
「決定論的非線形性」  
を候補として考える．
2. 決定論的非線形力学系の存在を仮定するので，状態空間を  
(再) 構成する必要がある．
3. カオスの挙動を示していた可能性もある．
4. カオスの特徴を表す尺度を時系列信号から推定する．
  - (a) 軌道不安定性
  - (b) 長期予測不能性，短期予測可能性
  - (c) 自己相似性
  - (d) 決定論性

# 解析の流れ



$y(t + 1)$

$y(t + 2)$

$y(t)$

実システム 観測時系列信号  $y(t)$

再構成

カオスの特徴

{ 自己相似性  
軌道不安定性  
長期予測不能性  
短期予測可能性

フラクタル次元  
リアプノフ指数  
KS エントロピー  
非線形予測

# 問題設定 – 力学系と観測系 –

$$\begin{cases} x(n+1) = f_{\mu}(x(n)) + \eta(n) \\ y(n) = g(x(n)) + \xi(n) \end{cases}$$

$x(n)$  : 時間  $n$  でのシステムの状態

$f$  :  $k$  次元非線形関数 未知

$\mu$  : システムのパラメータベクトル

$\eta(n)$  : ダイナミカルノイズ

$\xi(n)$  : 観測ノイズ

$g$  : 観測関数

$y(n)$  : 時刻  $n$  における観測時系列値

$y(n)$  のみから  $f$  に関する情報を得ることができるか?

# 問題設定 – 力学系と観測系 –

$$\begin{cases} x(n+1) = f_{\mu}(x(n)) + \eta(n) \\ y(n) = g(x(n)) + \xi(n) \end{cases}$$

$x(n)$  : 時間  $n$  でのシステムの状態

$f$  :  $k$  次元非線形関数 未知

$\mu$  : システムのパラメータベクトル

$\eta(n)$  : ダイナミカルノイズ

$\xi(n)$  : 観測ノイズ

$g$  : 観測関数

$y(n)$  : 時刻  $n$  における観測時系列値

YES!

$y(n)$  のみから  $f$  に関する情報を得ることができるか?

# 微分座標系による状態空間の再構成

(Packard et al., 1980)

$$\mathbf{v}(t) = \left\{ y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dy^2(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y(t)}{dt^m} \right\}$$

# 微分座標系による状態空間の再構成

(Packard et al., 1980)

$$\mathbf{v}(t) = \left\{ y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dy^2(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^m y(t)}{dt^m} \right\}$$

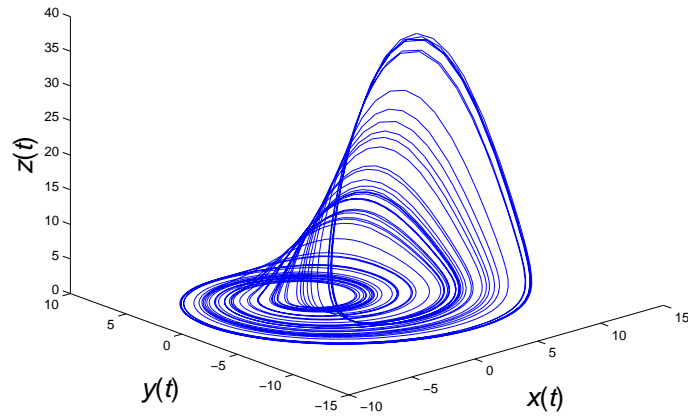
例: レスラー方程式 (O. Rössler, 1976)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = bx - cz + xz \end{cases}$$

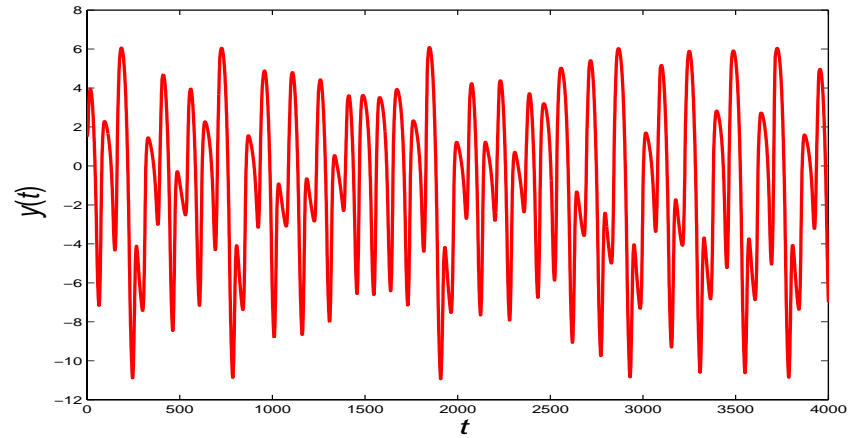
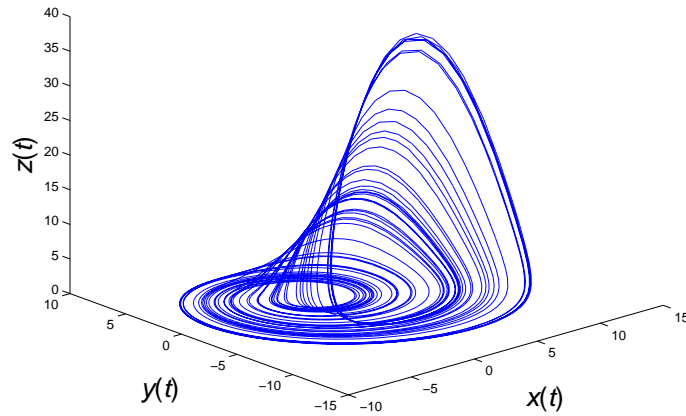
時系列として  $y(t)$  を観測  $\rightarrow (y, dy/dt)$



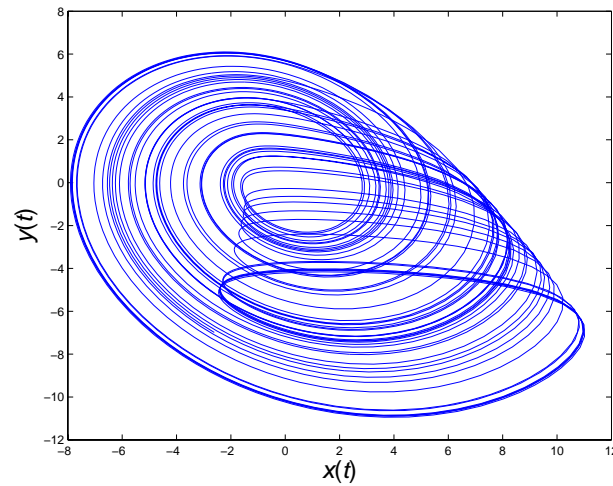
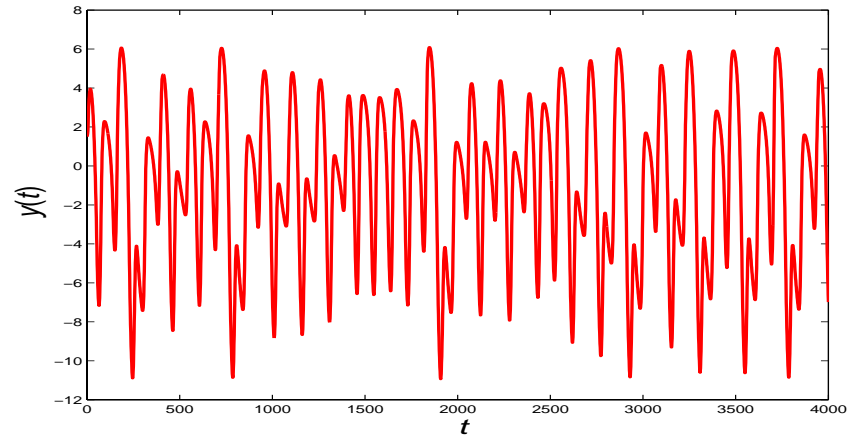
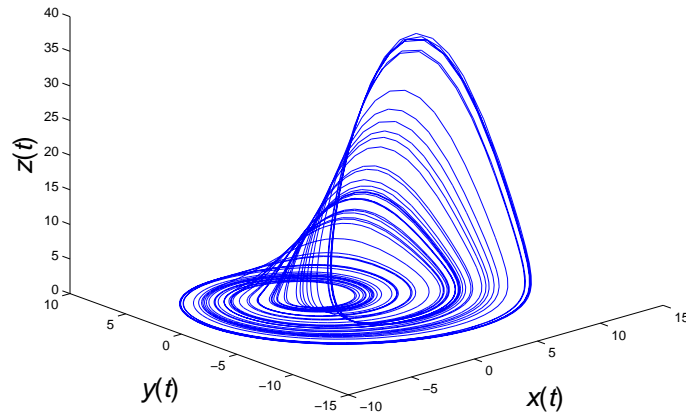
# 微分座標系による状態空間の再構成



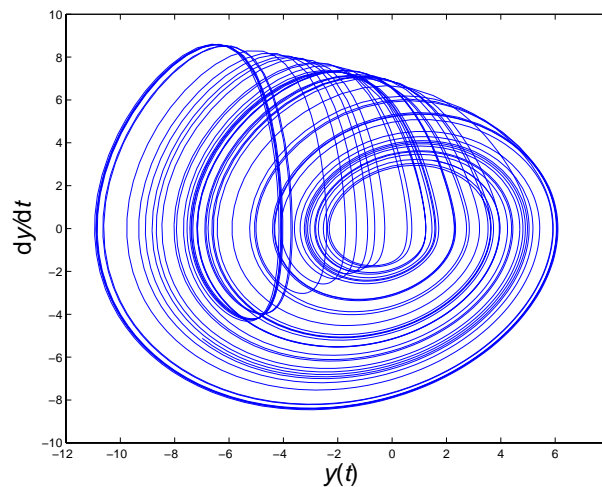
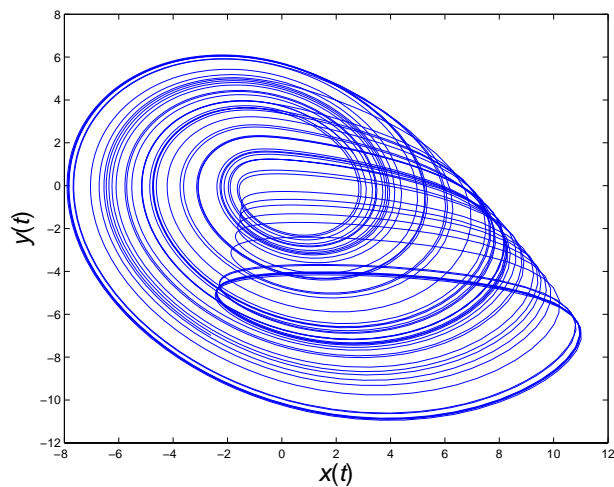
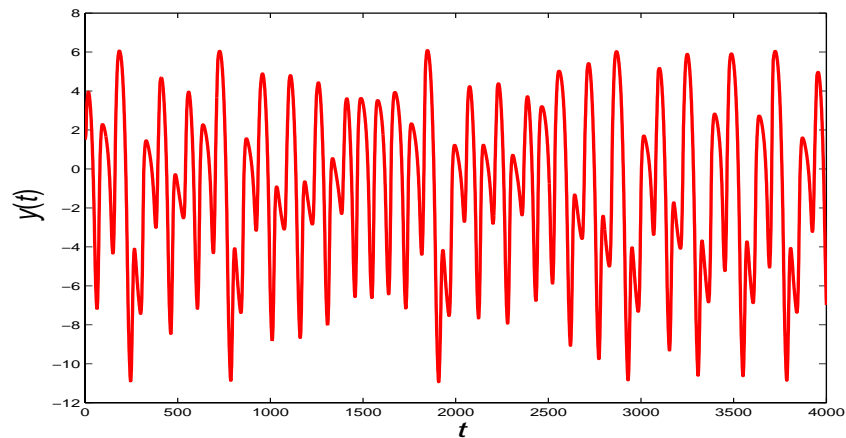
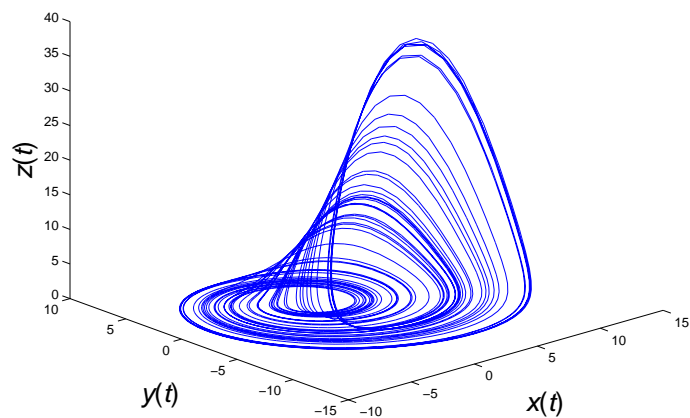
# 微分座標系による状態空間の再構成



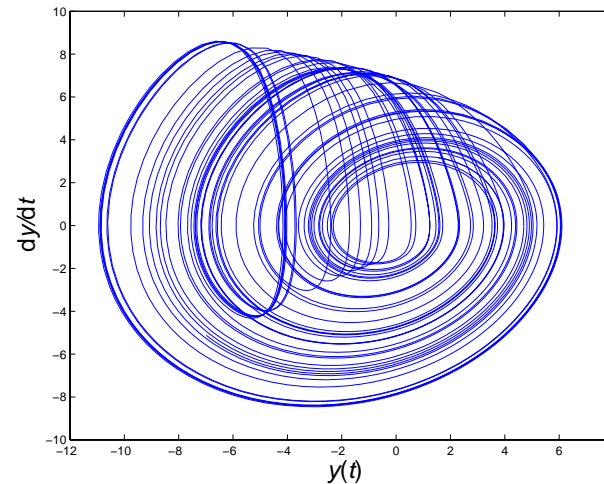
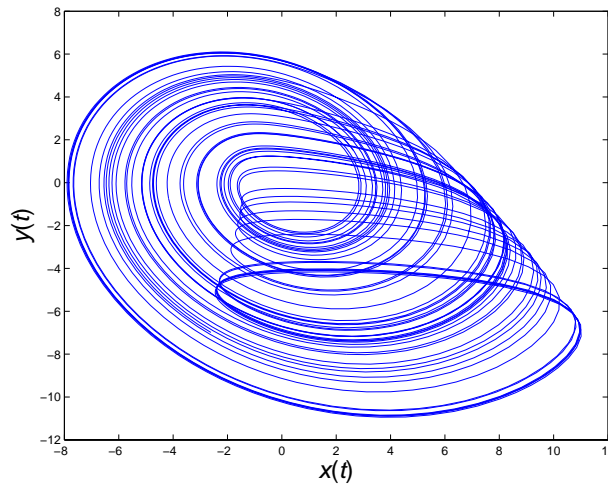
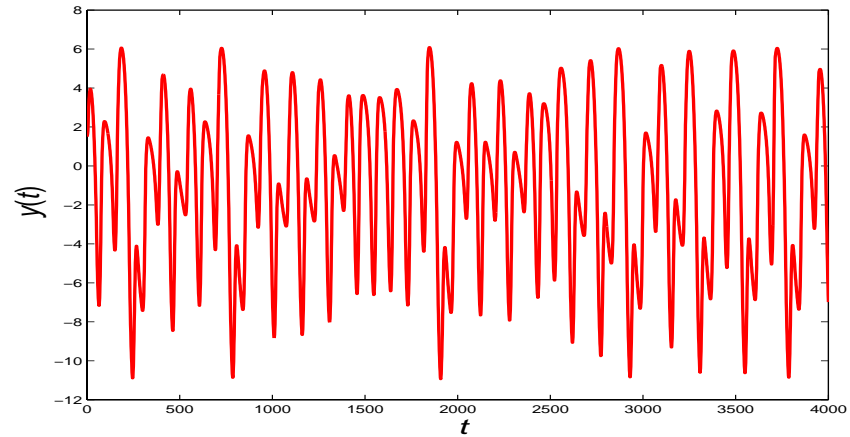
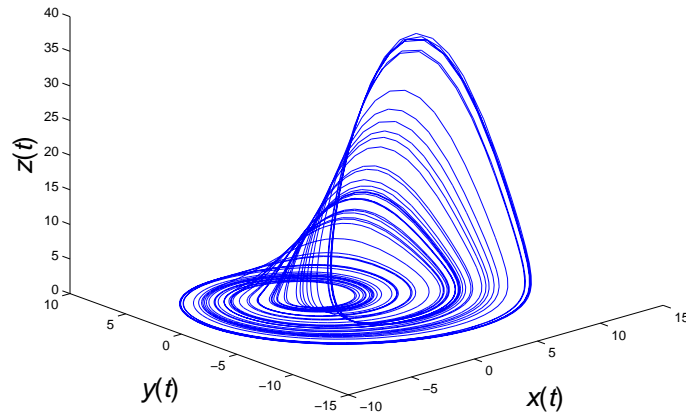
# 微分座標系による状態空間の再構成



# 微分座標系による状態空間の再構成



# 微分座標系による状態空間の再構成

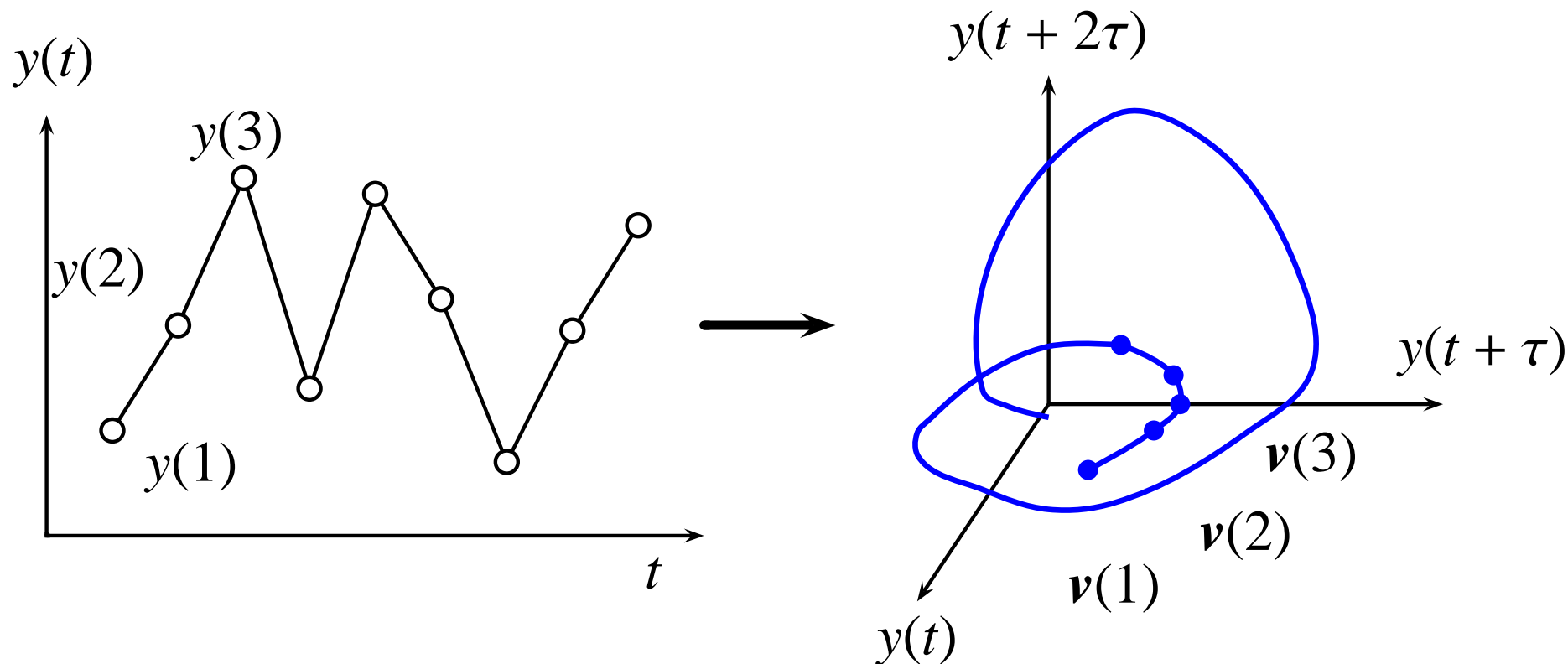


問題点:微分 = ハイパスフィルタ → **ノイズの強調**

# 遅延座標系によるアトラクタの再構成

(Takens, 1981; Packard et al., 1980)

$$\mathbf{v}(t) = \{y(t), y(t + \tau), y(t + 2\tau), \dots, y(t + (m - 1)\tau)\}$$

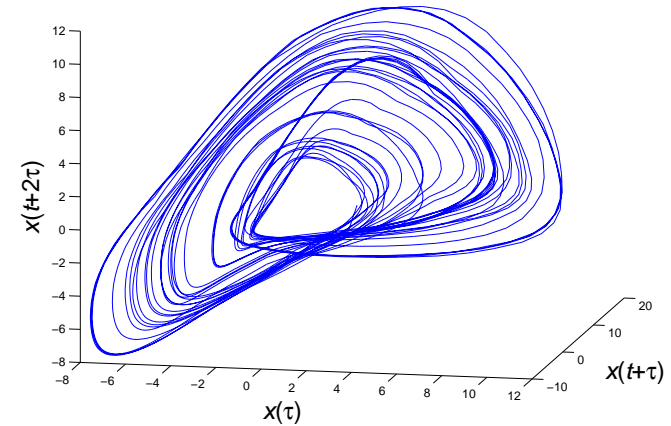
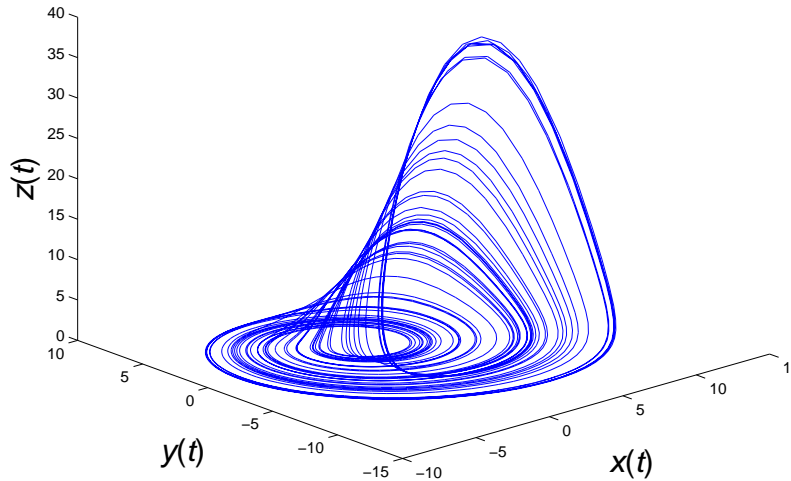
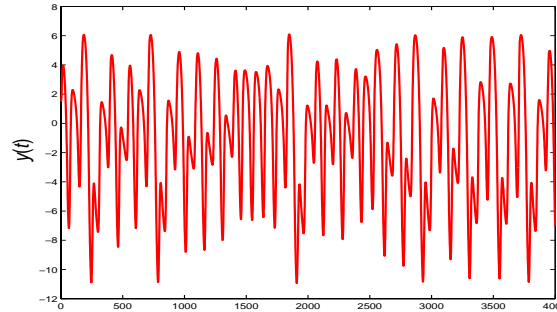


1. 埋め込み定理による保証
2. 時間遅れ値  $\tau$  は任意

# 遅延座標系によるアトラクタの再構成

$$\mathbf{v}(t) = \{y(t), y(t + \tau), y(t + 2\tau), \dots, y(t + (m - 1)\tau)\}$$

例: レスラー方程式 (O. Rössler, 1976)



# ターケンスの埋め込み定理 (Takens, 1981)

$d$  次元のコンパクトな多様体  $M$  と  $C^1$  級微分同相写像  $f : M \rightarrow M$ ,  $C^1$  級関数  $g : M \rightarrow \mathbf{R}^1$  が与えられたとき,  $m = 2d + 1$  であれば, 次式の写像  $V : M \rightarrow \mathbf{R}^m$  は, 埋め込みである.

$$V(x) = (g(x), g(f(x)), g(f^2(x)), \dots, g(f^{m-1}(x)))$$

◀ 埋め込み = 1 対 1 & はめ込み

◀  $m = k + 1$  で良いこともある (保証はない)

◀  $\left. \begin{array}{l} \text{多様体 } M \rightarrow \text{アトラクタ } A \\ m > 2d \rightarrow m > 2D_0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Embedology}$   
(Sauer et al., 1991)

◀  $m > D_2 \rightarrow$  次元解析 (Ding et al, 1994)



# ホイットニーの埋め込み定理 (Whitney, 1936)

$A$  を  $d$  次元のなめらかな多様体とする。このとき,  $A$  から  $\mathbf{R}^{2d+1}$  へのなめらかな写像全体の中で, 埋め込み (embedding) となる写像の集合は  $C^1$  位相で稠密な開集合となる。

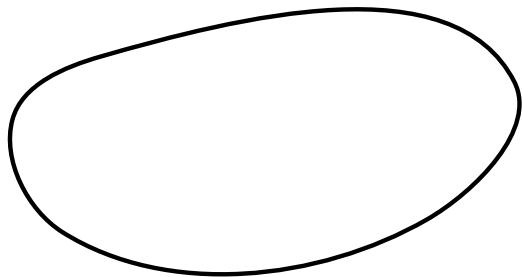
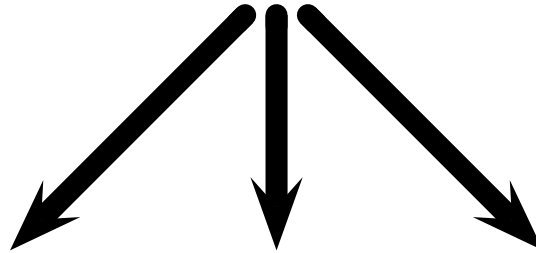
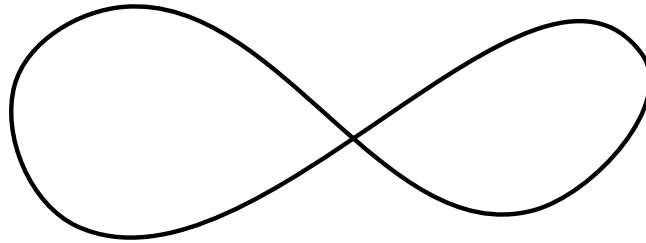
◀ なめらか =  $C^1$  級

◀  $F$  が埋め込み

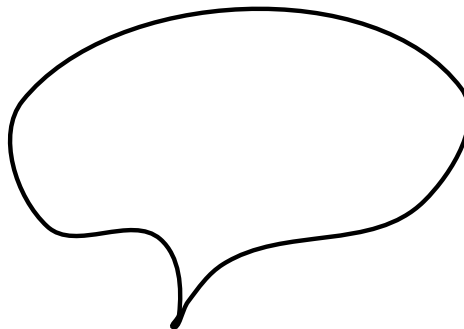
$$= \begin{cases} 1 \text{ 対 } 1 \text{ (one-to-one) + はめこみ (immersion)} \\ A \text{ から } F(A) \text{ への同相写像} \end{cases}$$

# 1対1・はめ込み・埋め込み

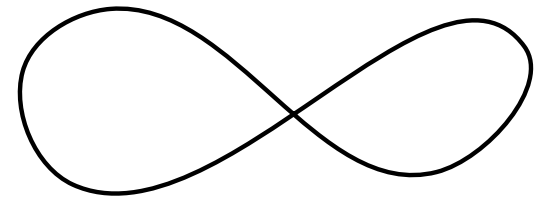
多様体  $A$  を  $g$  を用いて射影すると,



埋め込み

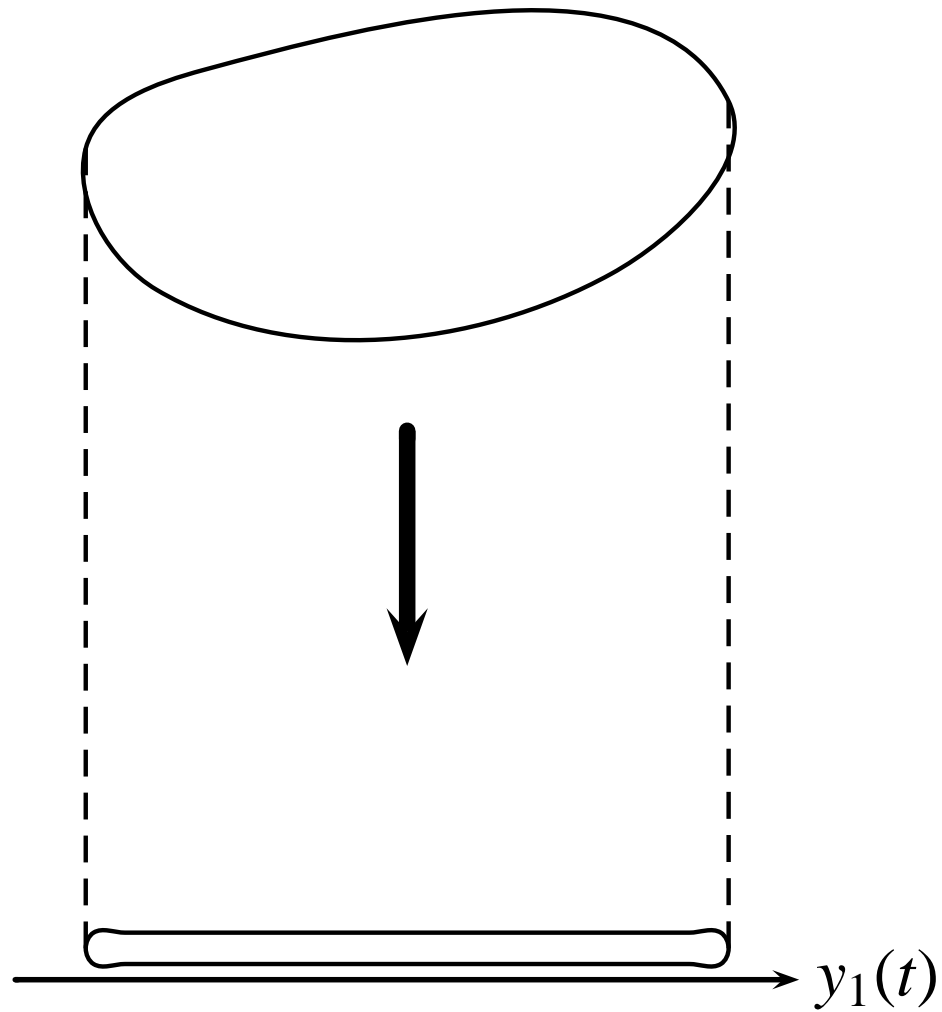


1対1だが  
はめ込みでない

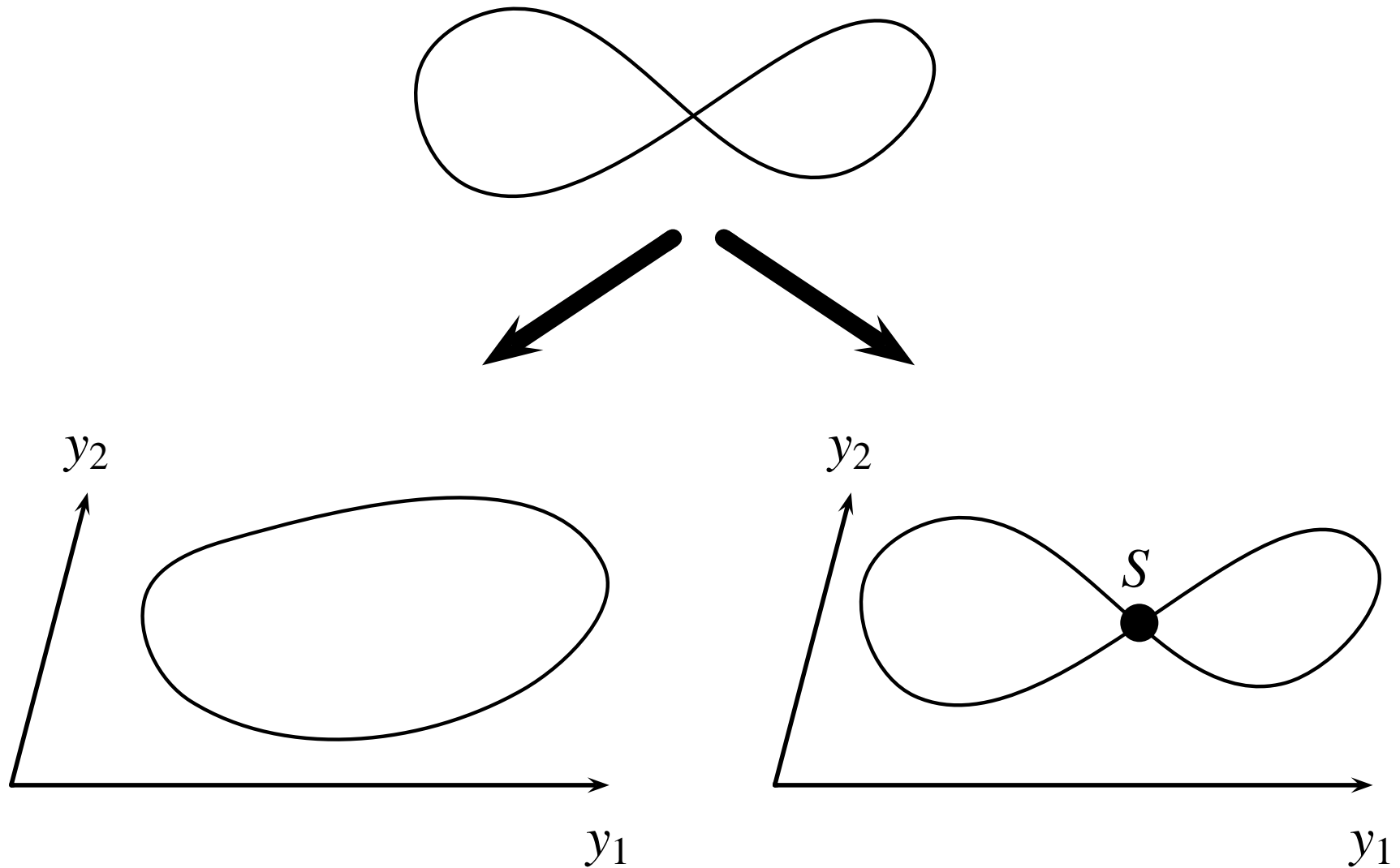


はめ込みだが  
1対1でない

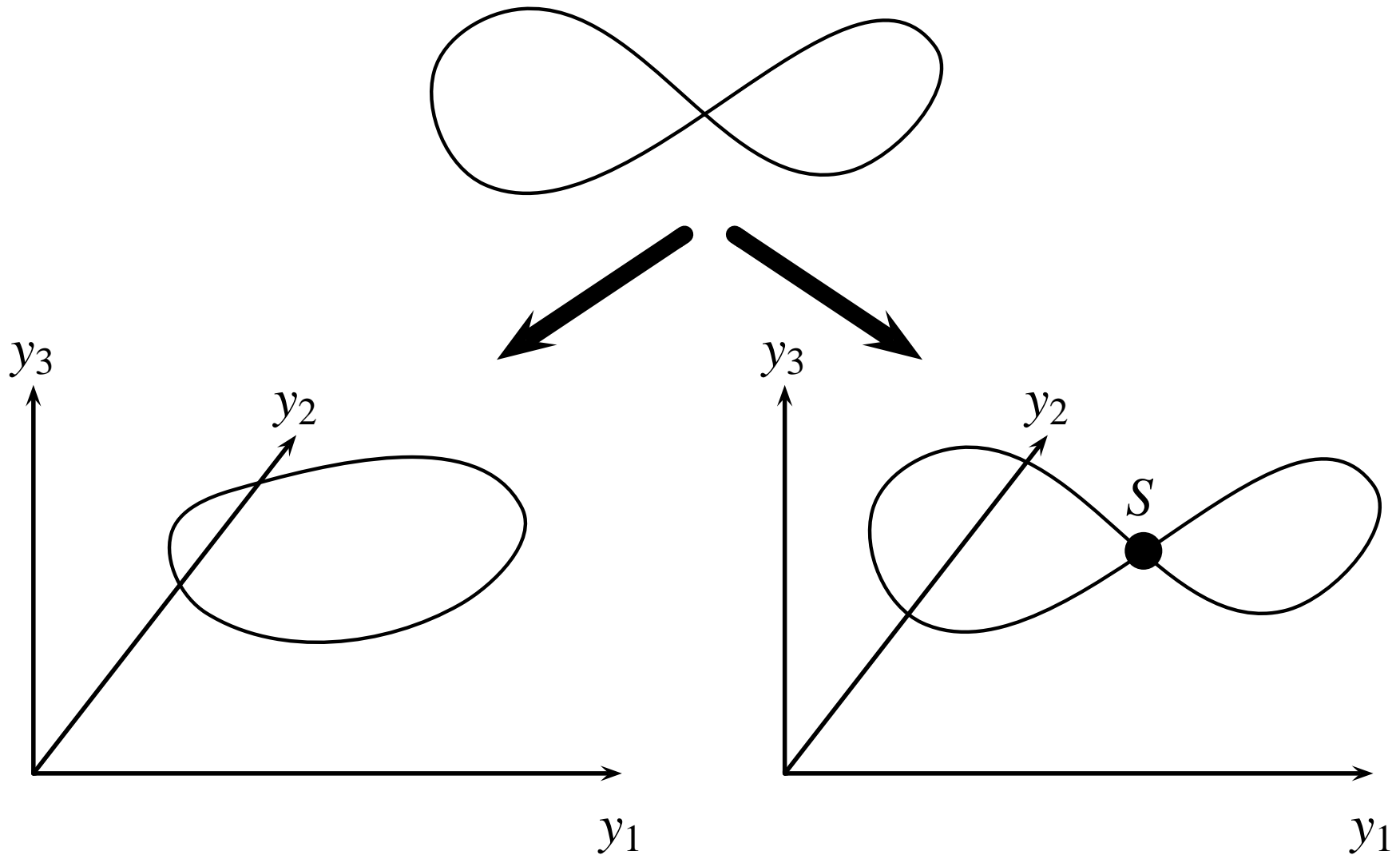
# $A \rightarrow \mathbb{R}^1$ への射影



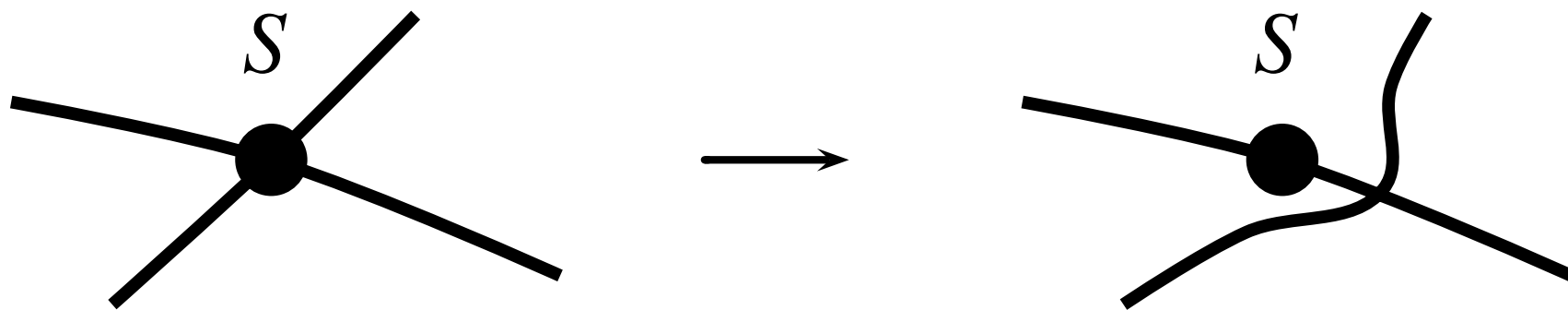
# $A \rightarrow \mathbb{R}^2$ への射影



# $A \rightarrow \mathbb{R}^3$ への射影



# $\mathbb{R}^3$ における交差の解消



摂動を与えると，交差が解消する。

# 自己交差定理

$\mathbb{R}^m$  において,  $d_1$  次元,  $d_2$  次元の集合



$$\text{交差の次元 } D_I = d_1 + d_2 - m$$



$$\begin{cases} D_I \geq 0 & \Leftrightarrow \text{交差が生じる} \\ D_I < 0 & \Leftrightarrow \text{交差が生じない} \end{cases}$$

$$D_I < 0 \Leftrightarrow m > d_1 + d_2$$

$$d_1 = d_2 = d \text{ とすれば, } m > 2d$$

# ホイトニー埋め込みプレバレント定理

(Sauer et al., 1991)

$A$  を  $\mathbb{R}^k$  内のコンパクトでなめらかな多様体とし, その次元を  $d$  とする.  $m > 2d$  のとき,  $\mathbb{R}^k$  から  $\mathbb{R}^m$  へのほとんどすべての  $C^1$  級関数  $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  は,  $\mathbb{R}^m$  で埋め込みとなる.



# ホイットニー埋め込みプレバレント定理

(Sauer et al., 1991)

$A$  を  $\mathbb{R}^k$  内のコンパクトでなめらかな多様体とし, その次元を  $d$  とする.  $m > 2d$  のとき,  $\mathbb{R}^k$  から  $\mathbb{R}^m$  へのほとんどすべての  $C^1$  級関数  $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$  は,  $\mathbb{R}^m$  で埋め込みとなる.



カオス的力学系のアトラクタへの対応

# ラクトルホイットニー埋め込みプレバレント定

(Sauer et al., 1991)

$A$  を  $\mathbb{R}^k$  内のコンパクトな部分集合, そのボックスカウント次元を  $D_0$  とする. また,  $m$  を  $m > 2D_0$  なる自然数とする. この時,  $\mathbb{R}^k$  から  $\mathbb{R}^m$  へのほとんどすべての  $C^1$  級写像は,

1.  $A$  上で 1 対 1
2.  $A$  に含まれるなめらかな多様体のコンパクトな部分集合上ではめ込み

# ターケンスの埋め込み定理 (Takens, 1981)

$d$  次元のコンパクトな多様体  $M$  と  $C^1$  級微分同相写像  $f : M \rightarrow M$ ,  $C^1$  級関数  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^1$  が与えられたとき,  $m = 2d + 1$  であれば, 次式の写像  $V : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  は, 埋め込みである.

$$V(x) = (g(x), g(f(x)), g(f^2(x)), \dots, g(f^{m-1}(x)))$$

# フラクタル時間遅れ埋め込みプレバレント定理

連続系

(Sauer et al., 1991)

$\Phi$  を  $\mathbb{R}^k$  の開部分集合  $U$  上のフロー,  $A$  を  $U$  のコンパクトな部分集合,  $A$  のボックスカウント次元を  $D_0$  とする. また,  $m > 2D_0$ , 時間遅れを  $\tau > 0$  とする.  $A$  には, たかだか有限個の平衡点と有限個の  $p\tau$  ( $3 \leq p \leq m$ ) の周期の周期解しか存在せず,  $\tau$  あるいは  $2\tau$  の周期解はないとする. さらに, これらの周期軌道のリターン写像のヤコビアン行列は異なる固有値を持つとする. この時, ほとんどすべての  $U$  上の  $C^1$  級関数に対して, 次式の時間遅れ座標への変換

$$V(x) = (g(x), g(\Phi_{-\tau}(x)), g(\Phi_{-2\tau}(x)), \dots, g(\Phi_{-(m-1)\tau}(x)))$$

は,

1.  $A$  上で 1 対 1
2.  $A$  に含まれるなめらかな多様体のコンパクトな部分集合上ではめ込み

# フラクタル時間遅れ埋め込みプレバレント定理

離散系

(Sauer et al., 1991)

$f$  を  $\mathbb{R}^k$  の開部分集合  $U$  上の微分同相写像,  $A$  を  $U$  のコンパクトな部分集合,  $A$  のボックスカウント次元を  $D_0$  とする. また,  $m > 2D_0$  とする.  $p \leq m$  なるすべての自然数  $p$  に対し,  $p$  周期点の集合  $A_p$  のボックスカウント次元は,  $p/2$  より小さいとする. さらに, これらの周期軌道に対するヤコビアン行列  $Df^p$  は異なる固有値を持つとする. この時, ほとんどすべての  $U$  上の  $C^1$  級関数  $g$  に対して, 次式の時間遅れ座標への変換

$$V(x) = (g(x), g(f(x)), g(f^2(x)), \dots, g(f^{m-1}(x)))$$

は,

1.  $A$  上で 1 対 1
2.  $A$  に含まれるなめらかな多様体のコンパクトな部分集合上ではめ込み

# ボックスカウント次元

$\mathbb{R}^n$  内の集合  $S$  のボックスカウント次元 (容量次元)  $D$  は,

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}}$$

但し,  $N(\epsilon)$  は,  $S$  を被覆するに必要な直径  $\epsilon$  の  $n$  次元超球の最小値

◀  $[0, 1]$  の閉区間

$\epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  とすると  $N(\epsilon) = 3^n$  となるので  $D_0 = 1$

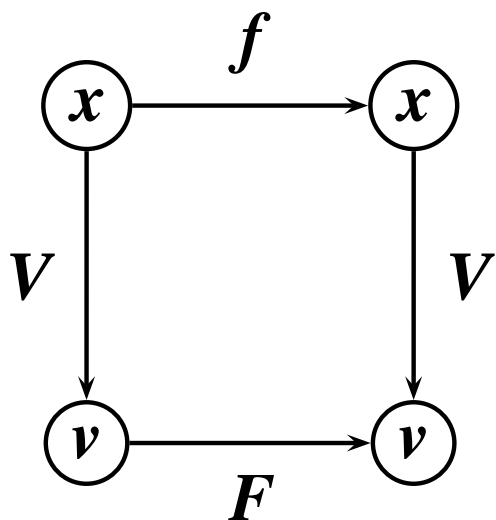
◀ カントールセット

$\epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  とすると  $N(\epsilon) = 2^n$  となるので,  $D_0 = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63092\dots$

# 真のダイナミクスと再構成ダイナミクス

$$x(n+1) = f_{\mu}(x(n)) + \eta(n)$$

$$y(n) = g(x(n)) + \xi(n)$$



$$\Longleftrightarrow F = V \circ f \circ V^{-1}$$

$f$  は未知であるが,  $F$  を推定することで  
ダイナミクスの再構成が可能

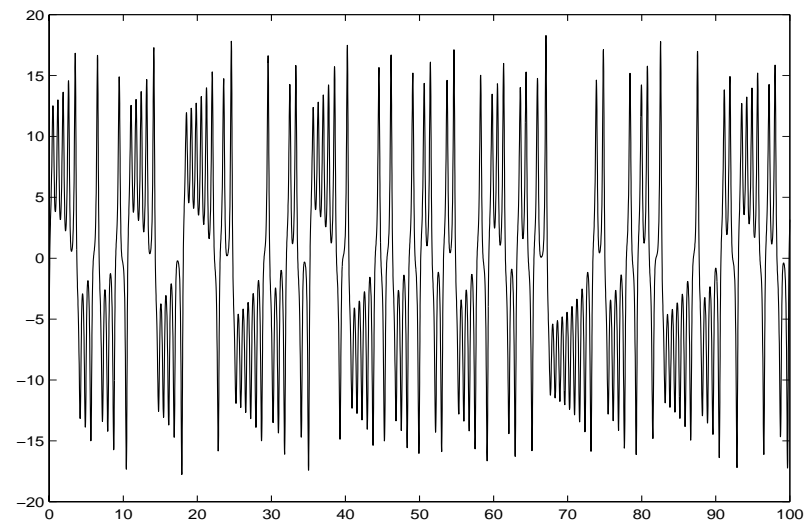
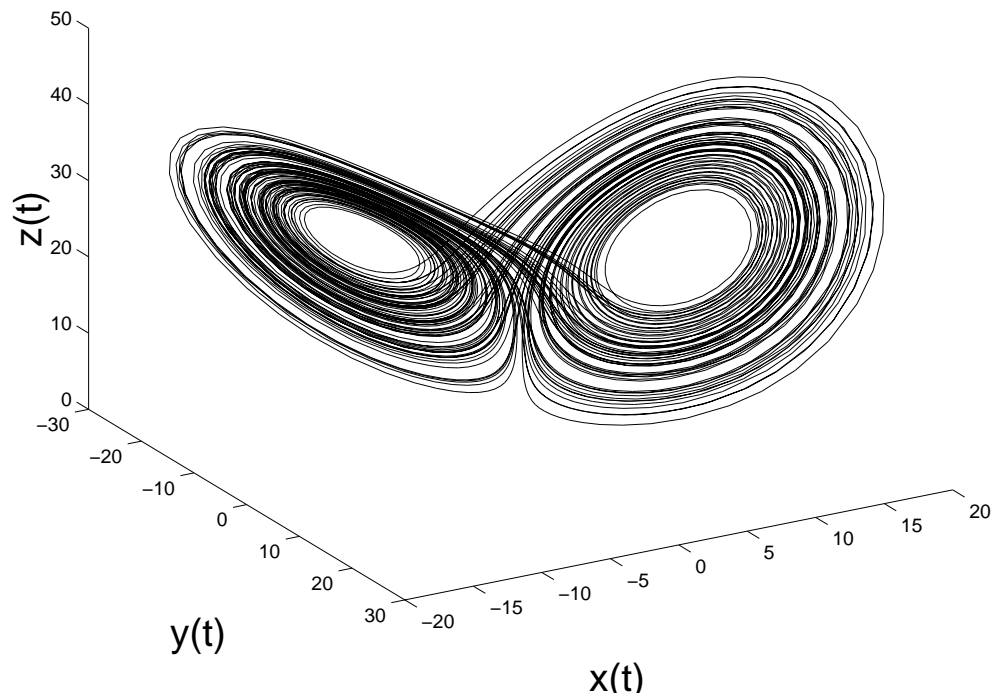
# 例:ローレンツ方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{cases}$$

1. 熱対流のダイナミクスを解析するための微分方程式
2. 初期値鋭敏依存性
3.  $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$

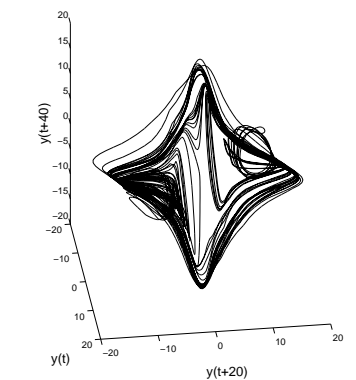
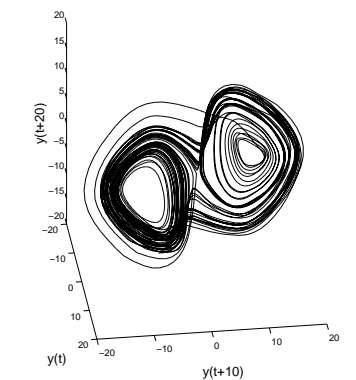
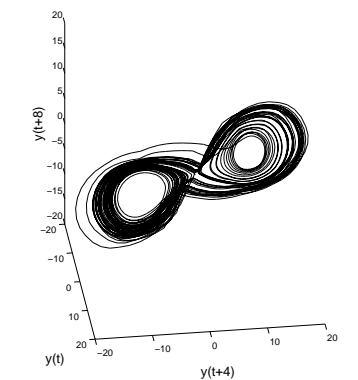
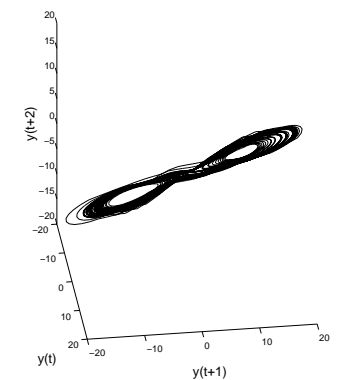
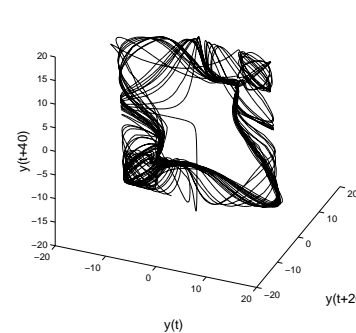
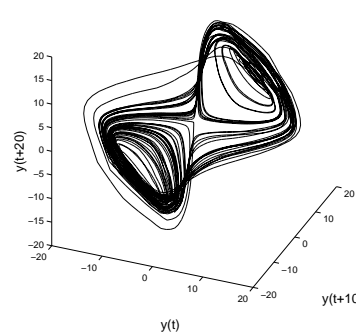
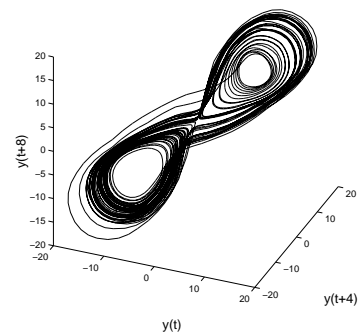
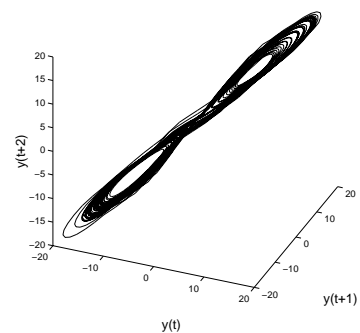
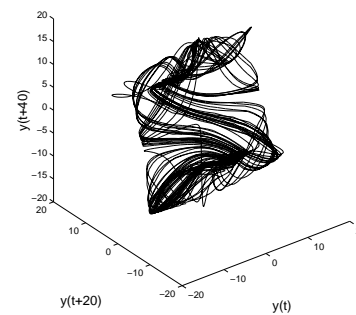
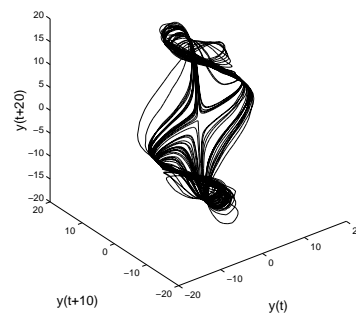
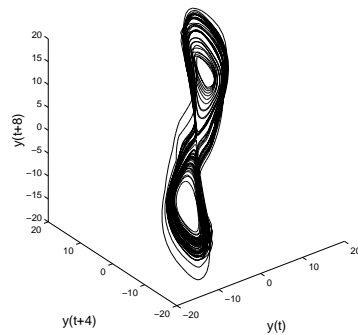
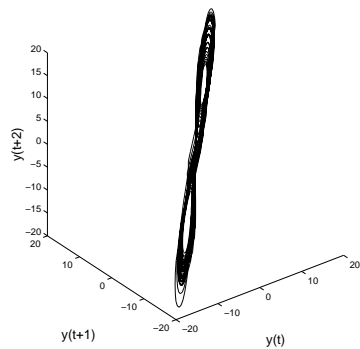


# ローレンツ方程式と第1変数

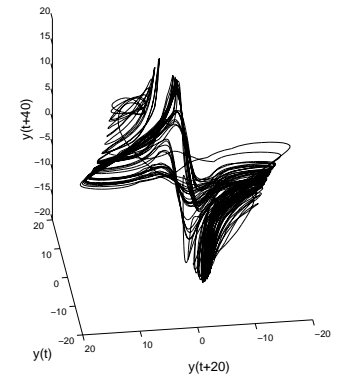
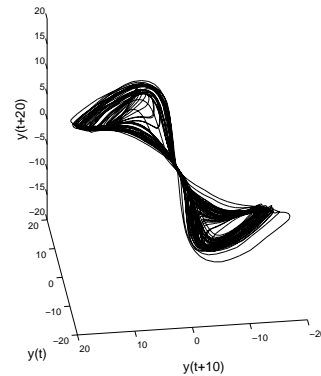
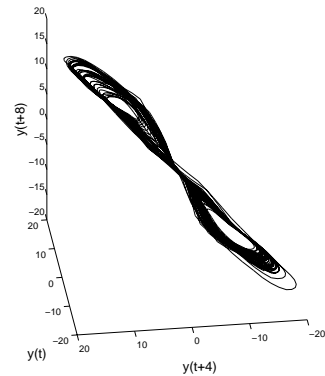
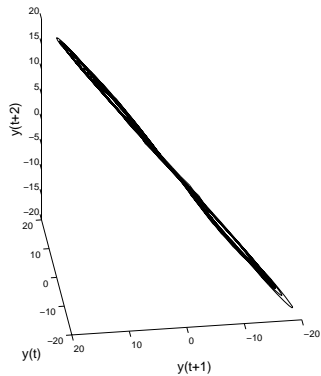
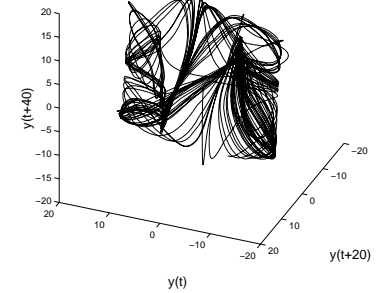
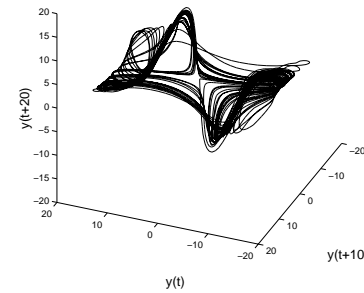
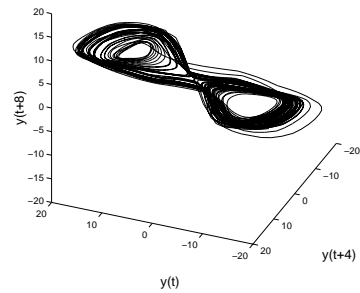
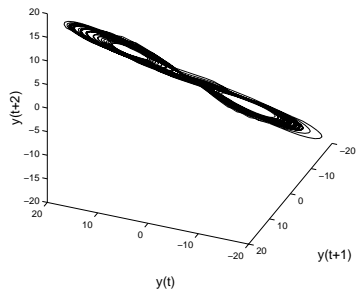
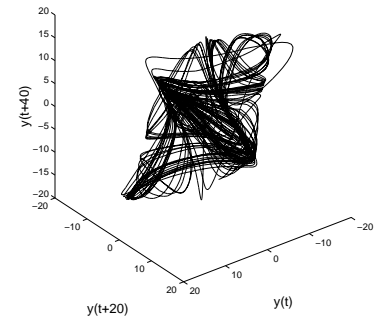
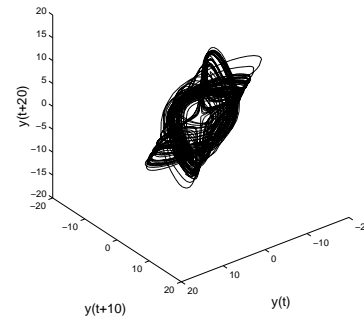
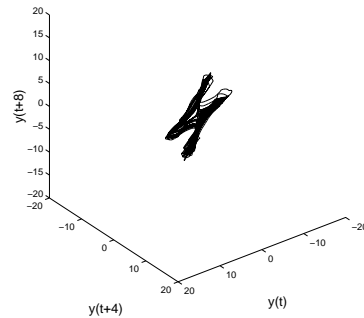
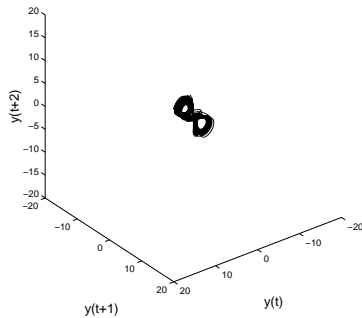


ローレンツ方程式の第1変数  $x(t)$

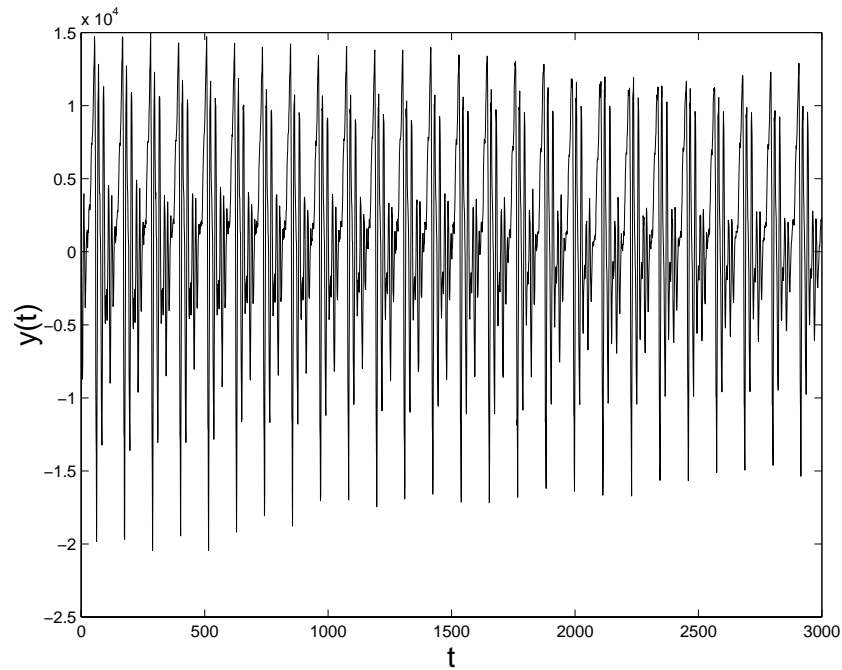
# ローレンツ方程式と再構成



# ローレンツ方程式と再構成

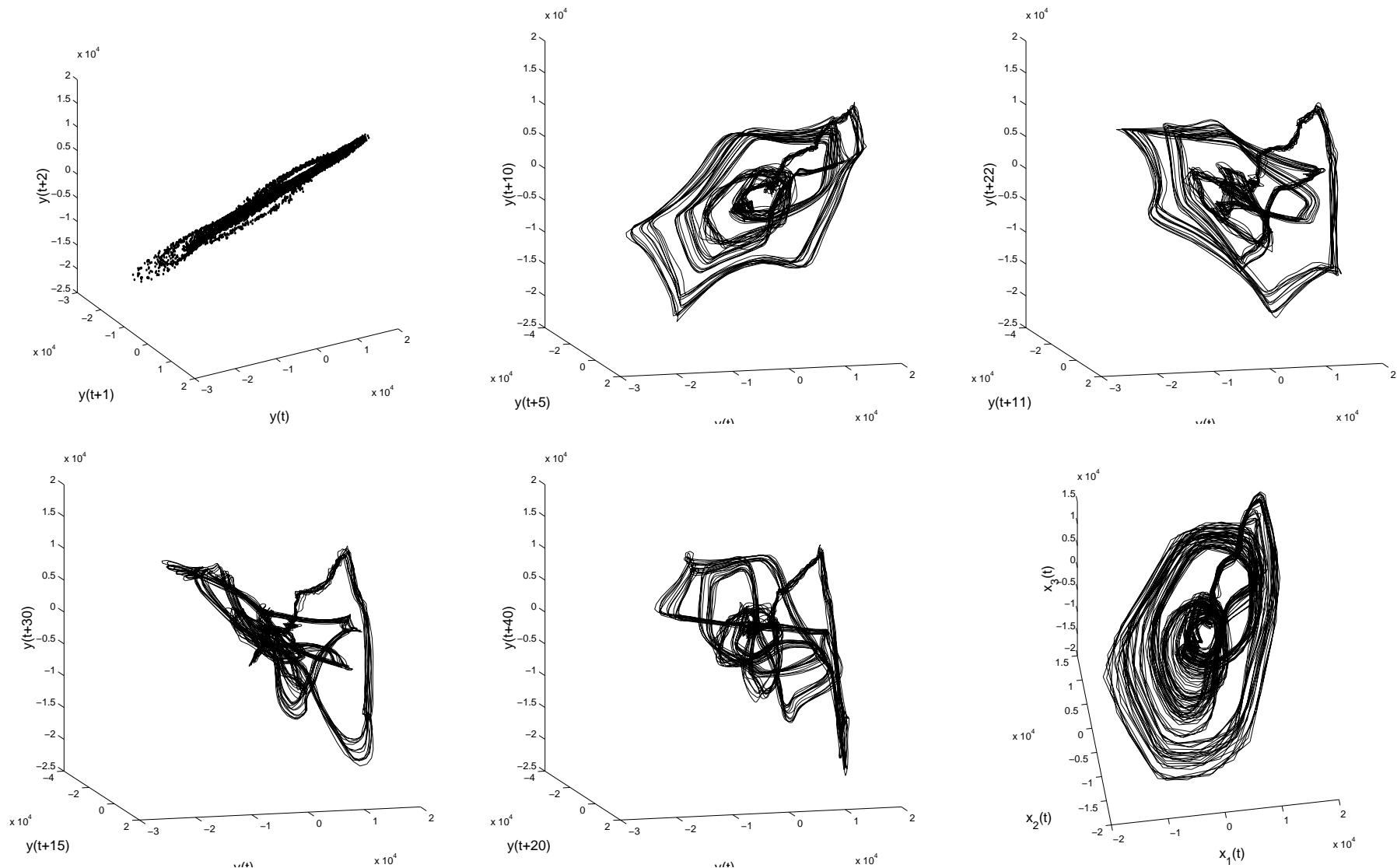


# 実例 – 日本語母音「あ」 –

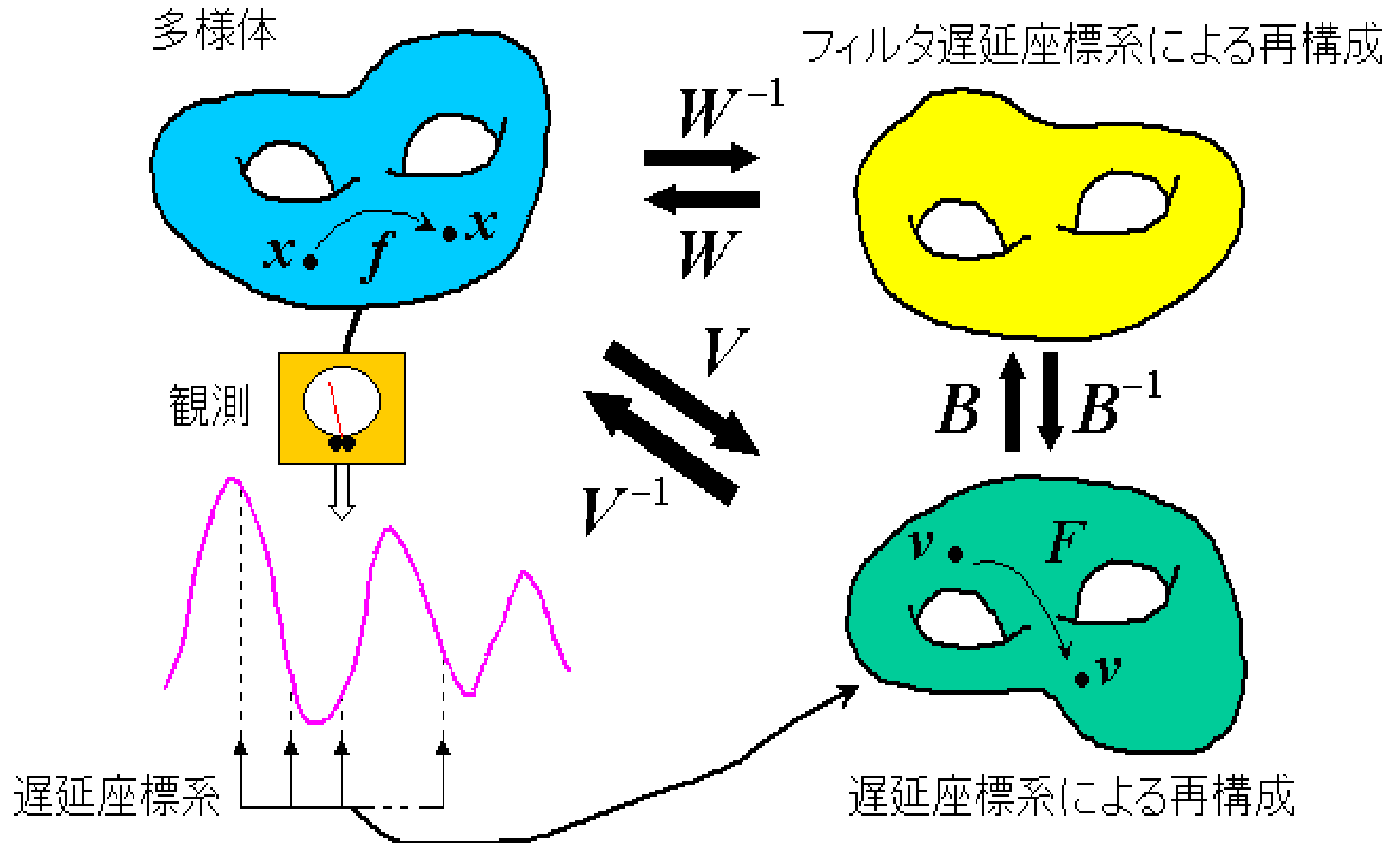


- ◀ 日本人男性「あ」
- ◀ サンプリング周波数 48[kHz]
- ◀ 量子化精度 12[bits]
- ◀ 1 秒間

# 実例 – 日本語母音「あ」 –



# 埋め込み定理のまとめ



# カオスと非線形予測

決定論的カオス { 長期予測不能性  
短期予測可能  
良いモデル = 非線形モデリング

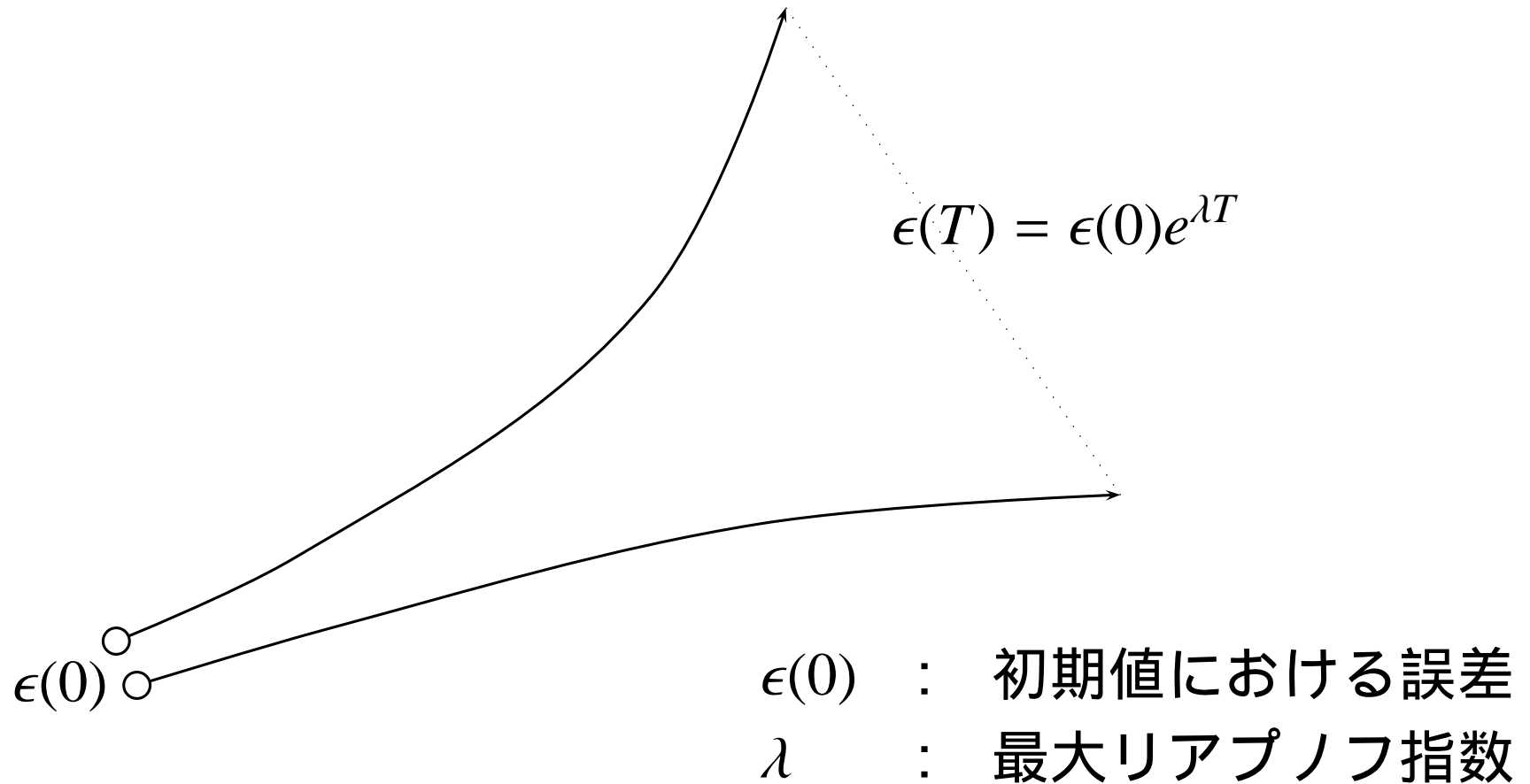
ダイナミクスの抽出

非線形予測の精度向上

カオスの同定

# 軌道不安定性 Orbital instability

◀ 初期値に与えた差が，指数関数的に拡大



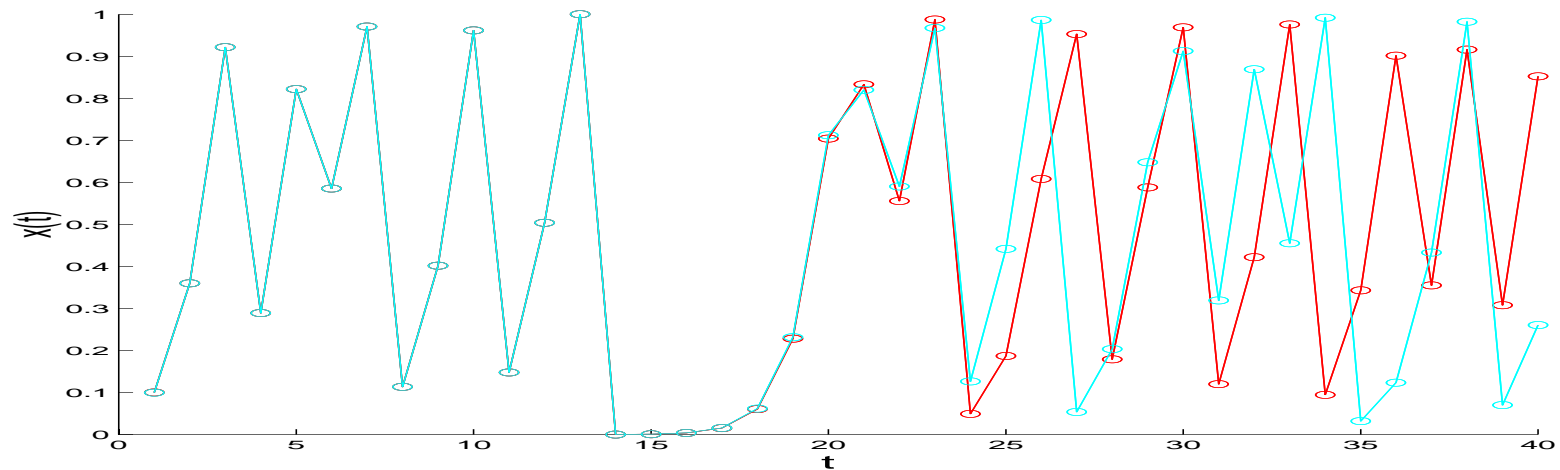
初期値に対する鋭敏な依存性      軌道不安定性



# カオス力学系の軌道不安定性

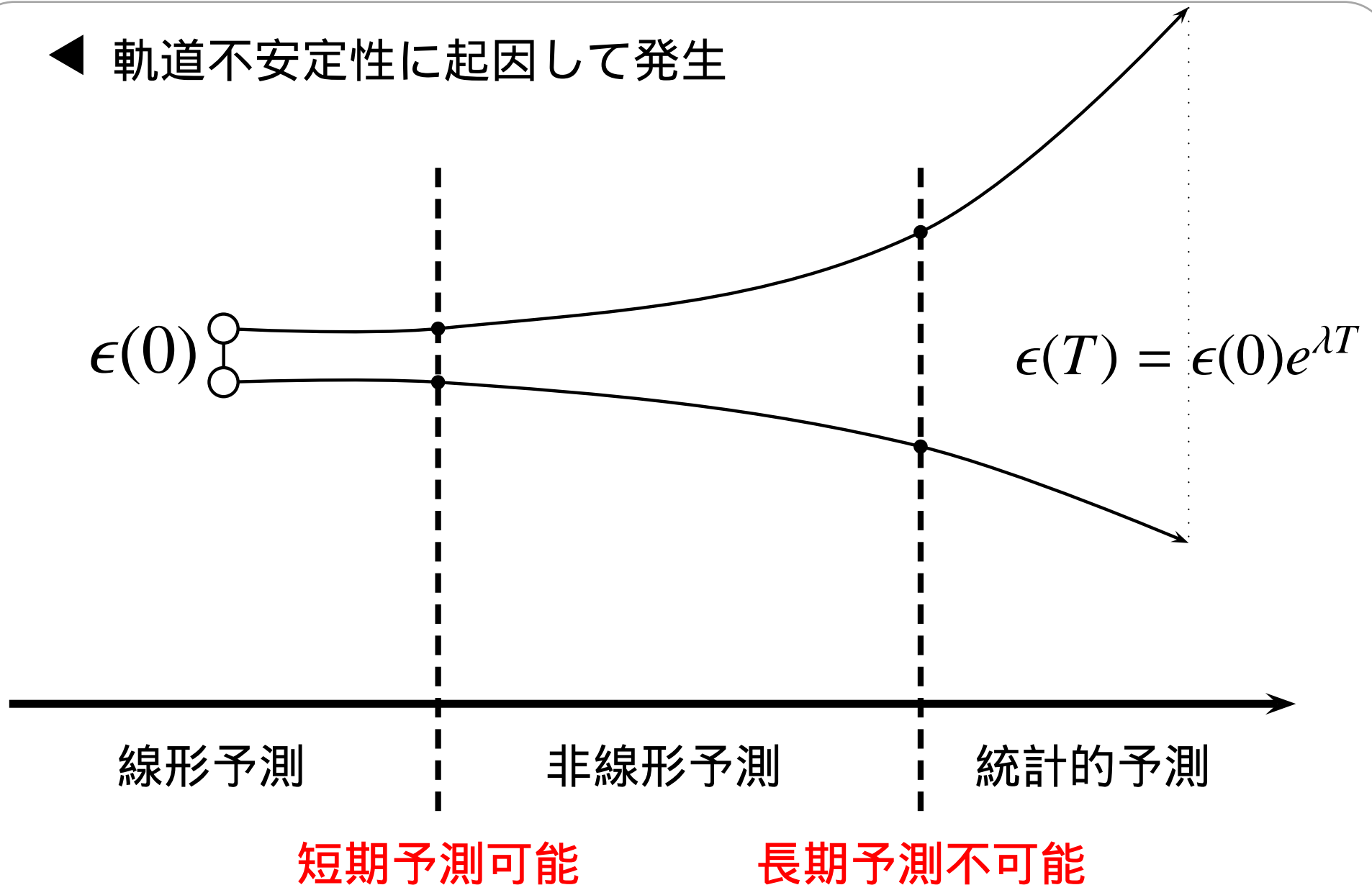
ロジスティック写像  $x(n+1) = 4x(n)(1-x(n))$

$$x(0) = \begin{cases} 0.1 & \text{cyan} \\ 0.1 + 10^{-8} & \text{red} \end{cases}$$



# 長期予測不能性と短期予測可能性

◀ 軌道不安定性に起因して発生



# 非線形予測とカオスの同定

## 歴史

Lorenz (1969)  
Tong & Lim (1980)  
Priestly (1985)  
Sano & Sawada (1985)  
Eckmann et al (1985,86)  
Farmer & Sidorowich (1987)  
Broomhead & Lowe (1987)  
Casdagli (1989)  
Sugihara & May (1990)  
Mees (1991)  
Mees et al.(1993)  
Judd & Mees (1995)  
Lapedes & Farber (1987)  
Weigend et al (1990)  
Wolpert & Miall (1990)  
Sauer (1993)  
Cao et al. (1995)  
...

最近傍法  
閾値自己回帰モデル  
状態依存モデル  
リアプノフ指数  
リアプノフ指数  
局所線形近似  
多変数近似  
動径基底関数  
三角分割  
ボロノイ分割  
動径基底関数 + アフィン項  
動径基底関数, MDL  
ニューラルネット  
ニューラルネット  
ニューラルネット  
ローパス埋め込み  
ウェーブレット

## カオスの同定

Sugihara & May (1990)  
Tsonis & Elsner (1992)  
Ikeguchi & Aihara (1993,97)

予測ステップ 対 予測精度  
log-log 対 semi-log  
実相関係数 対 差相関係数

## 非線形予測とカオスの予測可能性・不可能性

◀ カオスの特徴  $\Rightarrow$  軌道不安定性



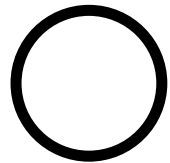
長期的なスケールでの予測は不可能となる。

◀ 互いに近傍であるような点は、短期的なスケールでは近傍関係を保つ。

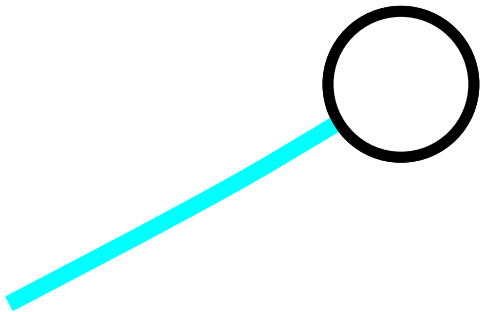


同じダイナミクスに従うため  
 $\Rightarrow$  短期予測可能性

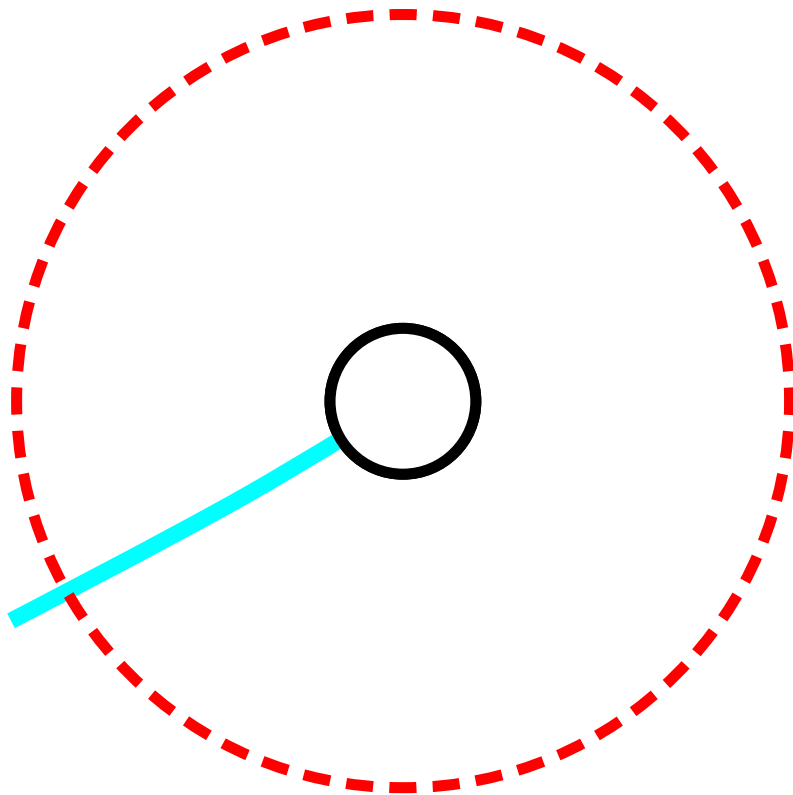
# 局所線形近似法



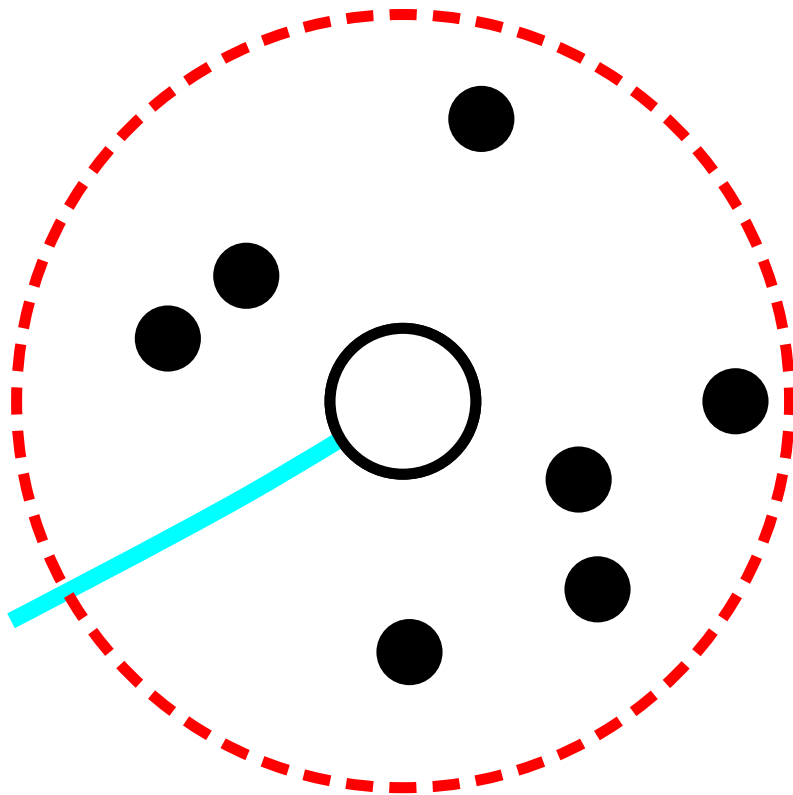
# 局所線形近似法



# 局所線形近似法

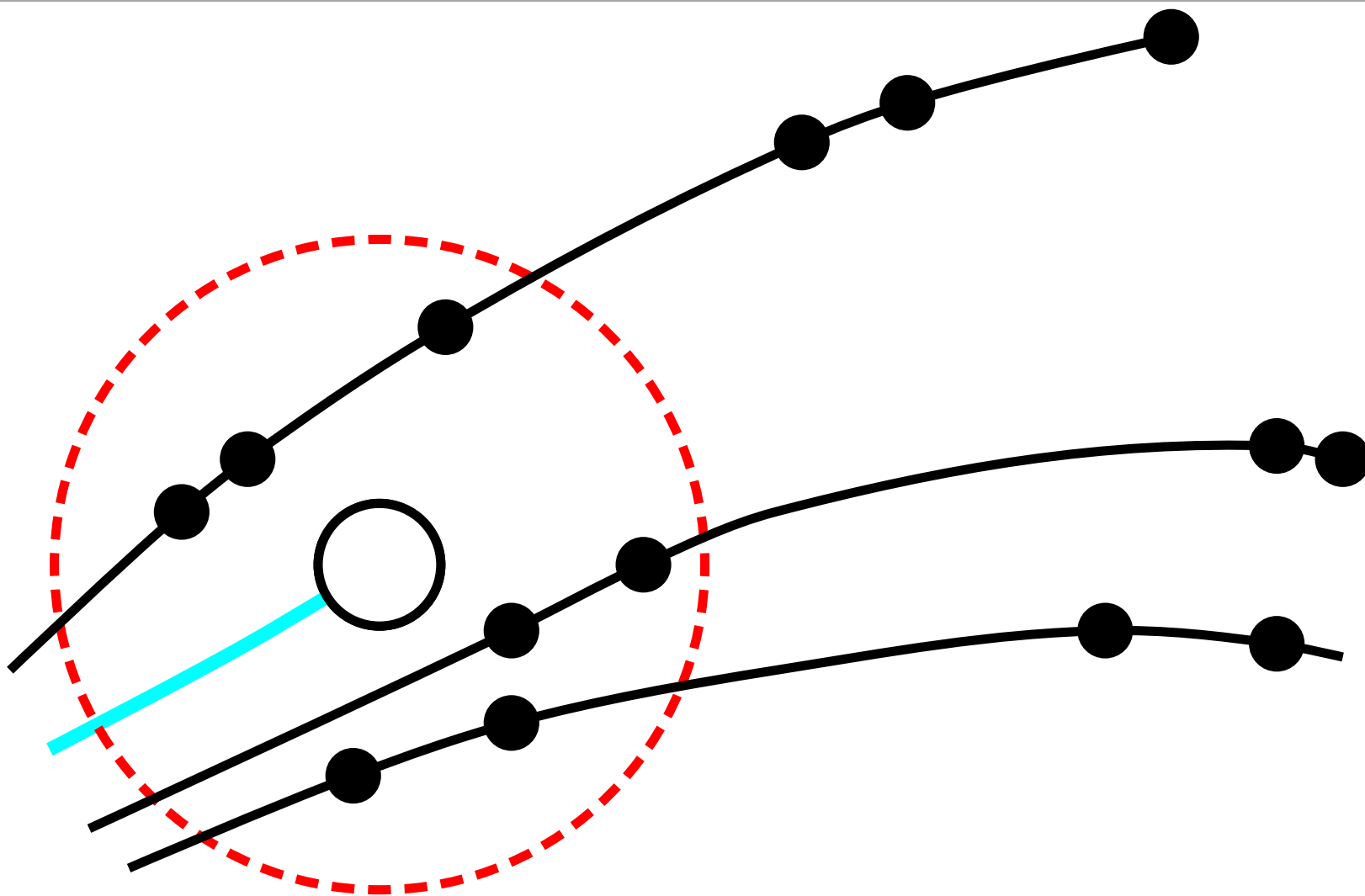


# 局所線形近似法

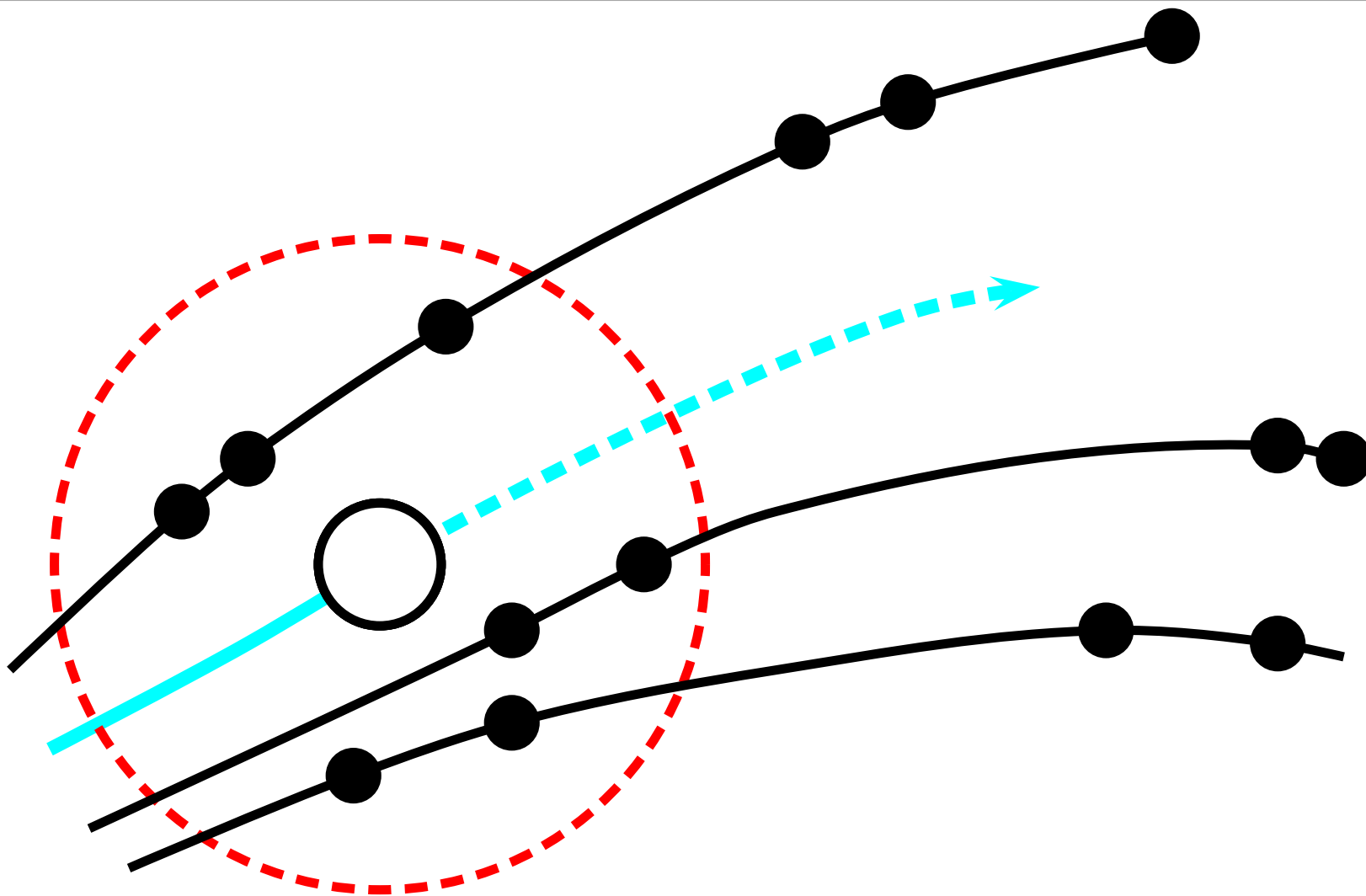




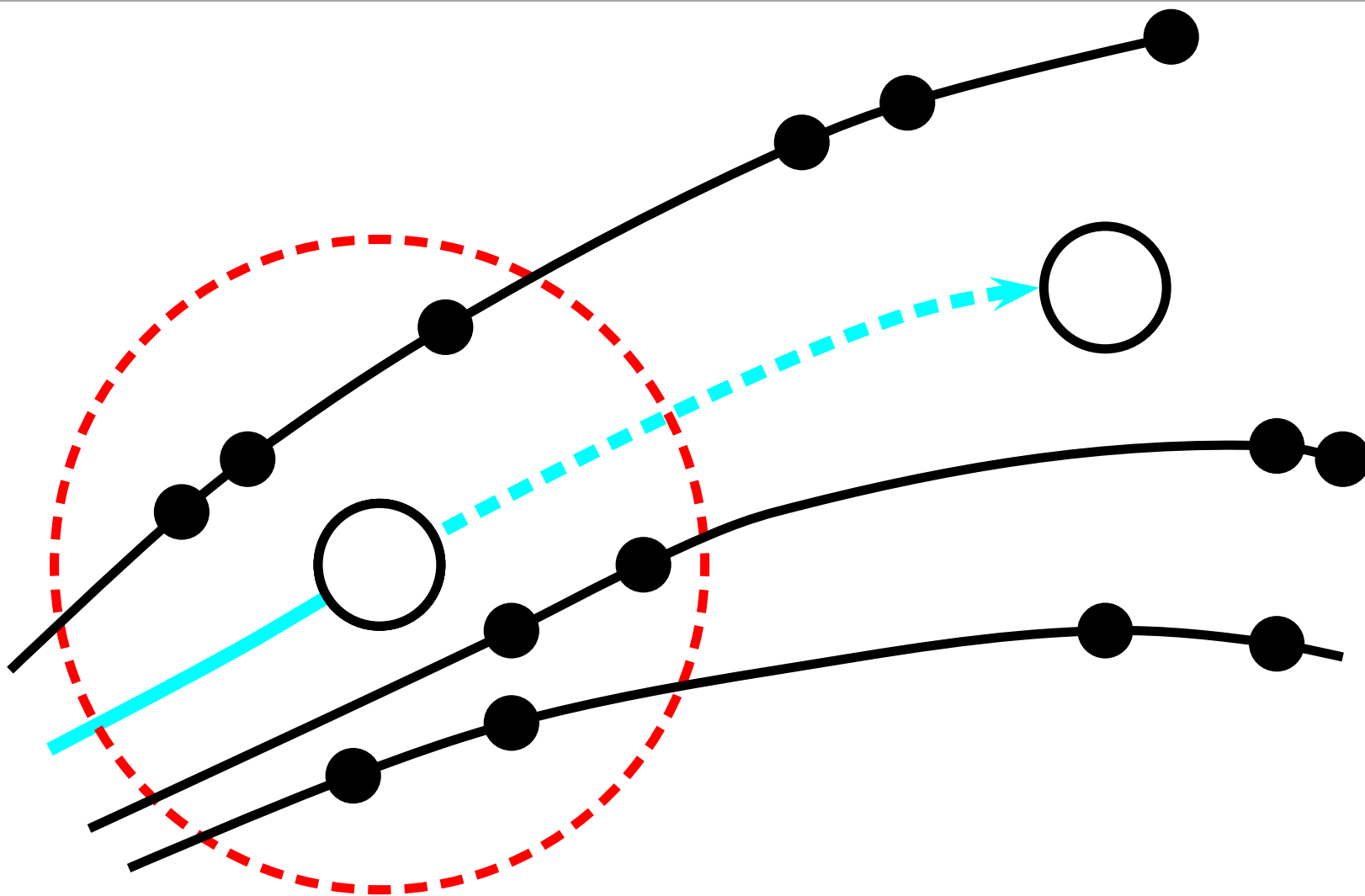
# 局所線形近似法



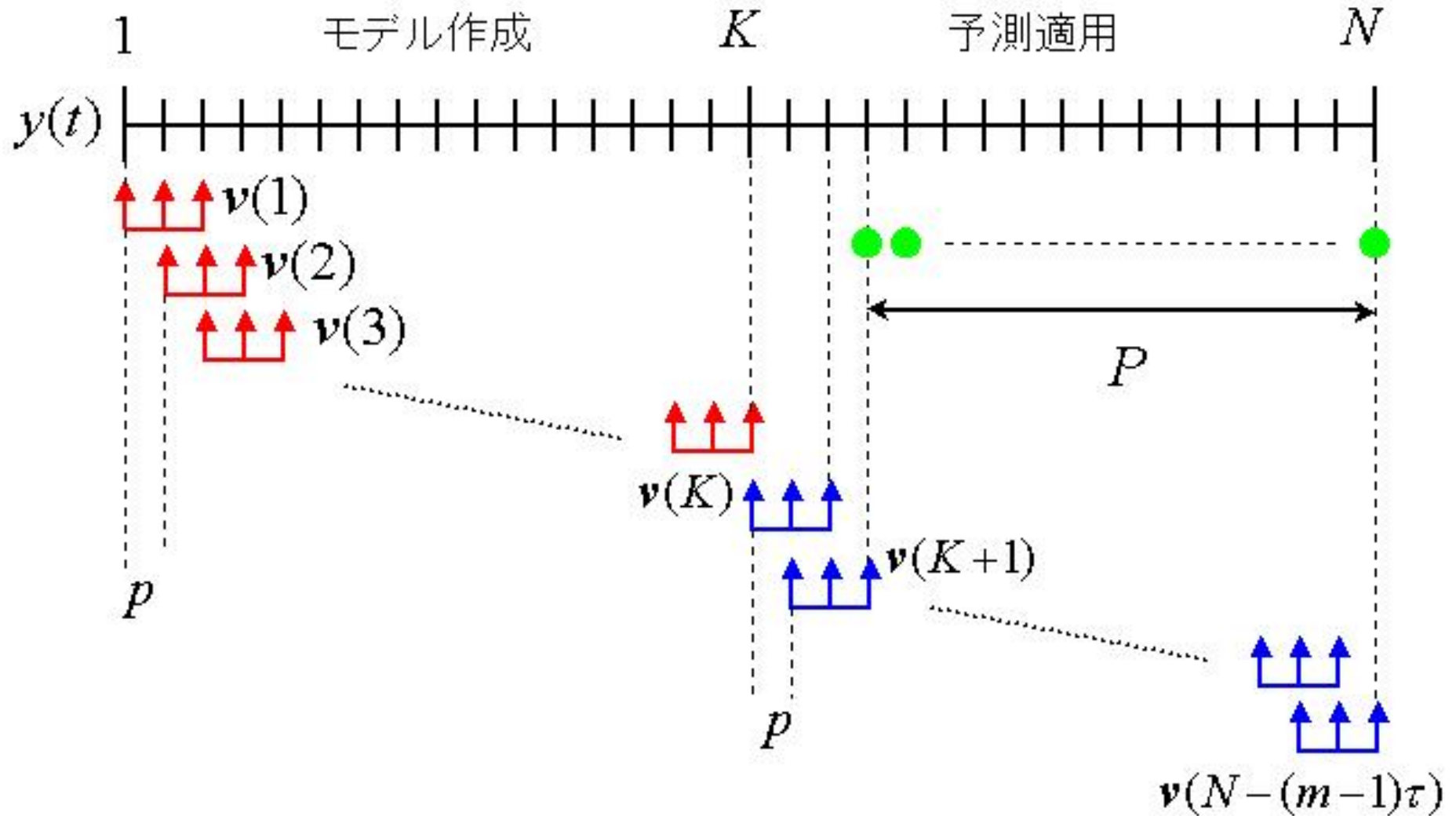
# 局所線形近似法



# 局所線形近似法



# 時系列信号へのモデリングの適用



# 予測の評価法

- ◀ 予測時系列  $\hat{z}(t)$  と真の時系列  $z(t)$  間の相関係数

$$R_1 = \frac{\sum_{t=1}^P (z(t) - \bar{z})(\hat{z}(t) - \bar{\hat{z}})}{\sqrt{\sum_{t=1}^P (z(t) - \bar{z})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^P (\hat{z}(t) - \bar{\hat{z}})^2}}$$

- ◀ 予測時系列  $\hat{z}(t)$  と真の時系列  $z(t)$  間の正規化平均自乗誤差

$$E_1 = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^P (z(t) - \hat{z}(t))^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^P (z(t) - \bar{z})^2}}$$

# 予測の評価法

◀  $\Delta z(t) = z(t+1) - z(t)$ ,  $\Delta \hat{z}(t) = \hat{z}(t+1) - z(t)$

◀  $\Delta z(t)$  と  $\Delta \hat{z}(t)$  の (差) 相関係数

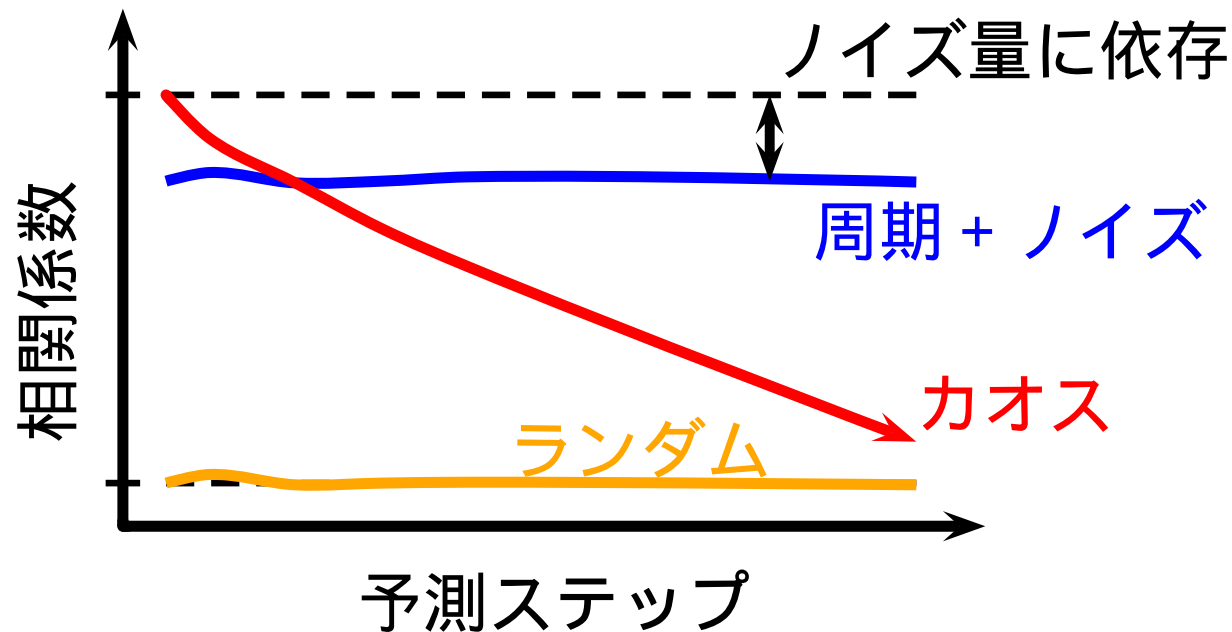
$$R_2 = \frac{\sum_{t=1}^P (\Delta z(t) - \Delta \bar{z})(\Delta \hat{z}(t) - \Delta \bar{\hat{z}})}{\sqrt{\sum_{t=1}^P (\Delta z(t) - \Delta \bar{z})^2} \sqrt{\sum_{t=1}^P (\Delta \hat{z}(t) - \Delta \bar{\hat{z}})^2}}$$

◀  $\Delta z(t)$  と  $\Delta \hat{z}(t)$  の符号非一致率

$$S_e = 1 - \frac{\sum_{t=1}^P I(\Delta z(t) \cdot \Delta \hat{z}(t))}{P}$$

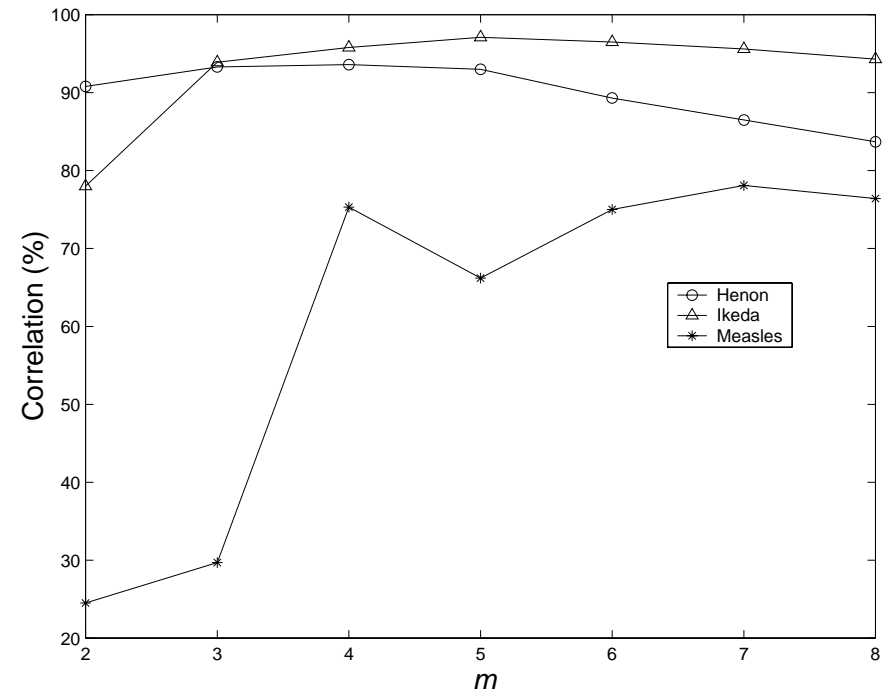
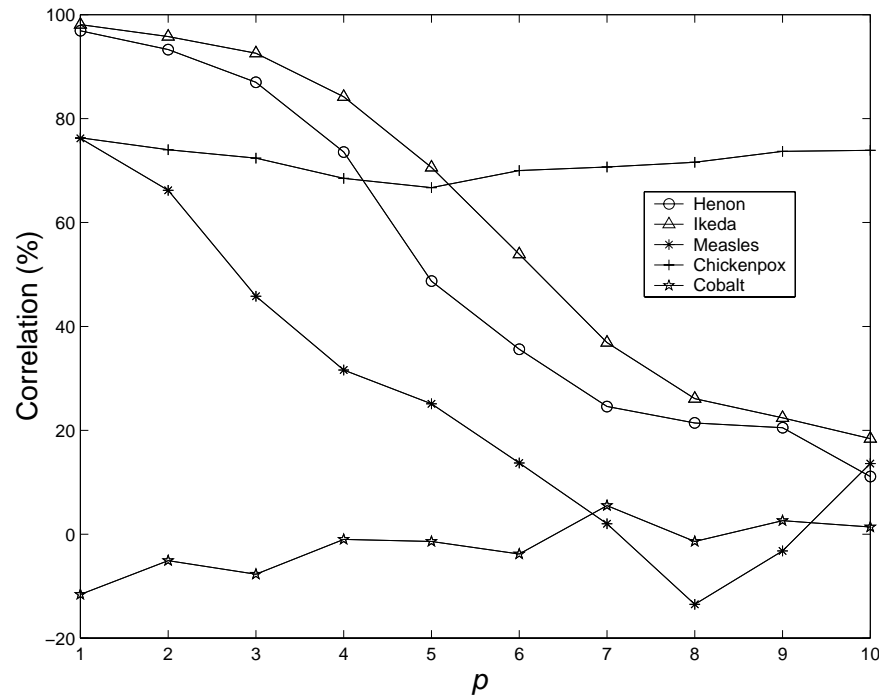
# 非線形予測を用いたカオスの同定法

(Sugihara & May, 1991)



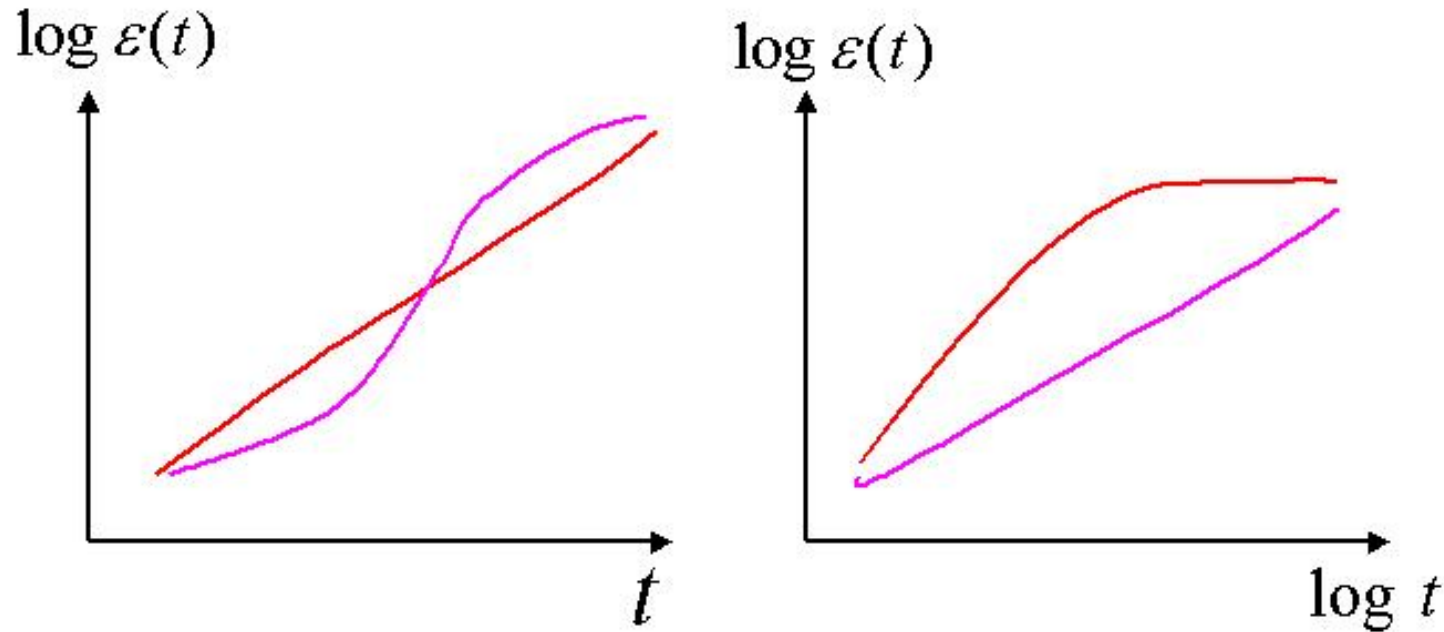
- ◀ 生態系データ への応用
  - 麻疹患者数                      カオス的
  - 水疱瘡患者数                  周期応答 + ノイズ
- ◀ 予測特性の変化      リアプノフ指数の推定 (Wales, 1991)

# カオスとリミットサイクル，ノイズの識別





# $1/f^\alpha$ ノイズの識別 (Tsonis & Elsner, 1992)



$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{カオス} & \rightarrow \epsilon(t) \sim \epsilon(0)e^{\lambda t} \rightarrow \log \epsilon(t) \sim \lambda t \\ \text{非整数ブラウン運動} & \rightarrow \epsilon(t) \sim t^H \rightarrow \log \epsilon(t) \sim H \log t \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  log-log プロット, semi-log プロットで違い

# 有色ノイズの識別 (TI & Aihara, 1994,97)

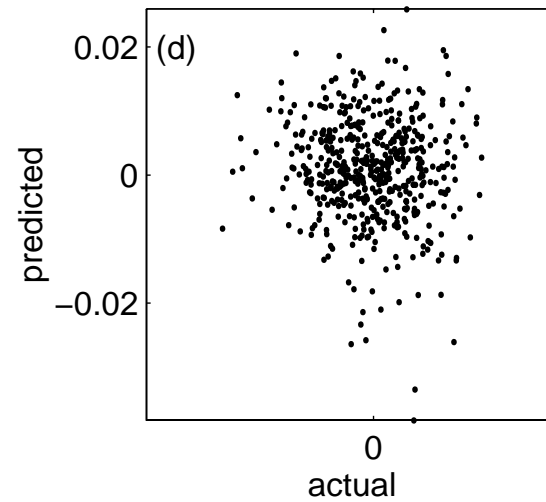
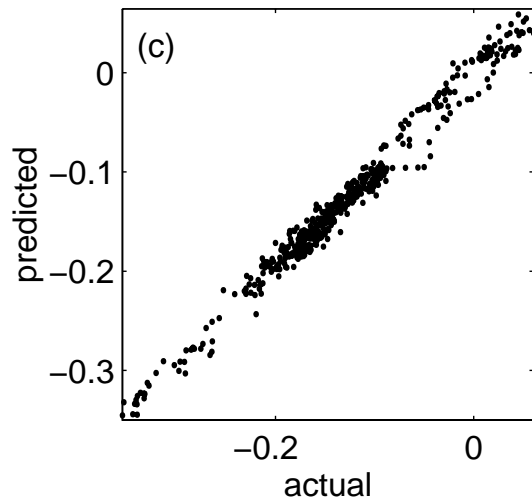
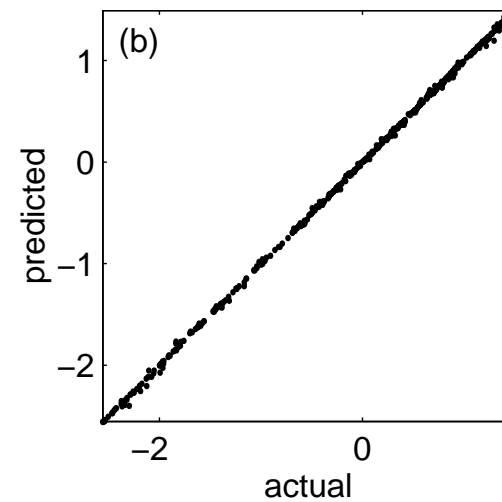
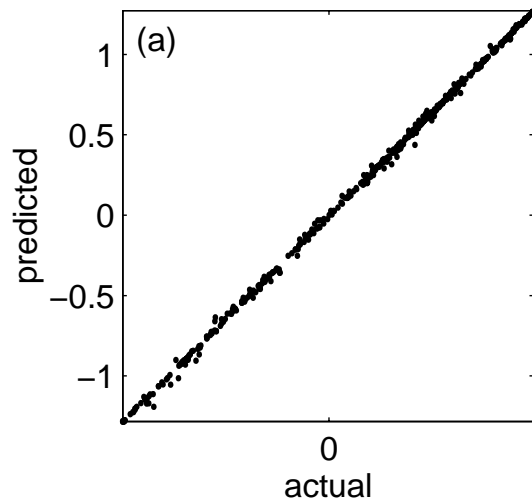
予測時系列と真の時系列について 2 種類の時系列

1.  $z(t)$  : 真の時系列  
 $\hat{z}(t)$  : 予測時系列
2.  $\Delta z(t) = z(t+1) - z(t)$  : 真の時系列の変動  
 $\Delta \hat{z}(t) = \hat{z}(t+1) - z(t)$  : 予測時系列の変動

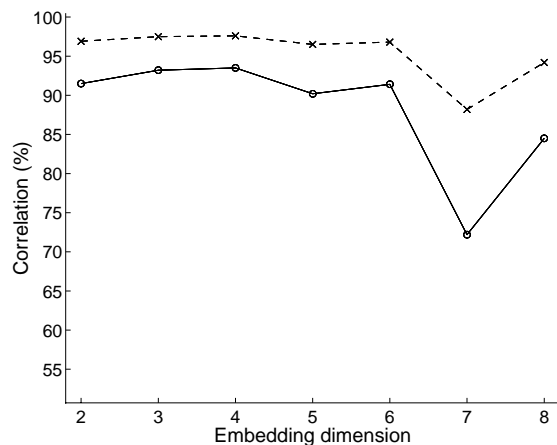
$\{z(t), \hat{z}(t)\}$ 間の相関係数	実相関係数 $R_1$
$\{\Delta z(t), \Delta \hat{z}(t)\}$ 間の相関係数	差相関係数 $R_2$

{	カオス	$R_1, R_2$ 共に高い
	有色ノイズ	$R_1 \sim 1, R_2$ 低い

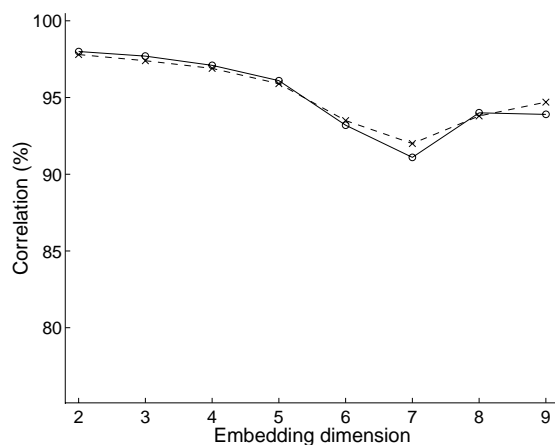
# カオスと有色雑音の違い



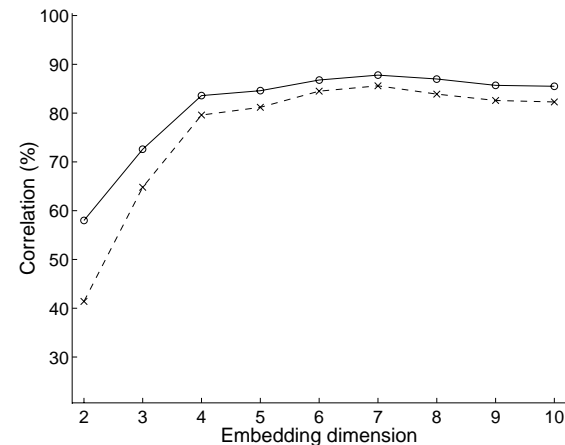
# 実データへの適用結果



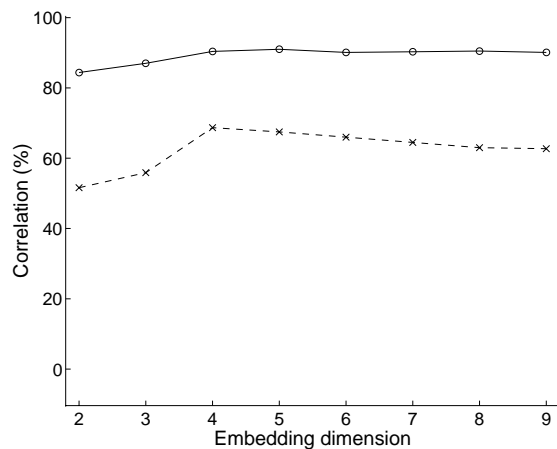
(a) ヤリイカ



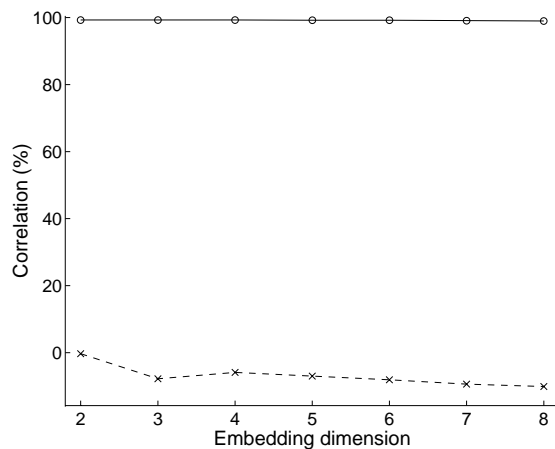
(b) A.dat



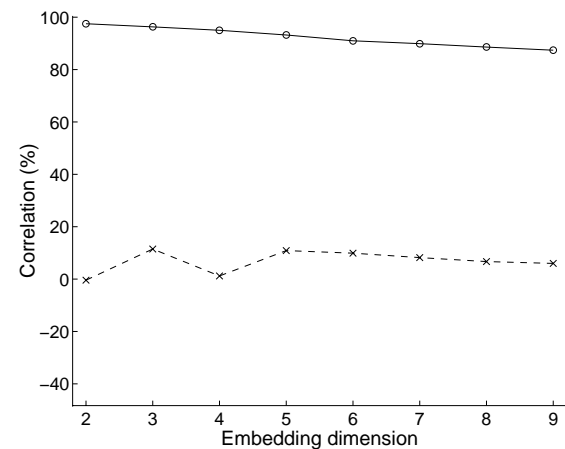
(c) 麻疹



(d) 太陽黒点



(e) NYEX



(f) 脳波

# カオスと時系列解析のまとめ

1. 時系列解析の動機
2. カオスとは何か，カオス現象についての簡単な復習
3. 時系列信号の観測とアトラクタの再構成
  - (a) 力学系と観測関数，ノイズ
  - (b) 埋め込み定理とアトラクタの再構成
4. カオスと非線形予測



# 最後に

- ◀ 非線形システム特論 2003 年度の講義はこれでおしまい.
- ◀ 今年度の講義で触れることが出来なかった話題
  - カオス制御
    - ◆ カオスアトラクタに埋め込まれた非可算無限個の不安定周期軌道
    - ◆ パラメータを制御することにより安定化
  - カオスと計算論
    - ◆ (従来の) カオスの軌道不安定性  $\Rightarrow$  予測不能
    - ◆ 決定不能なシステム  $\Rightarrow$  コンプレックスカオス力学系
    - ◆ チューリングマシンとの関連

# レポート課題

1. 講義中に紹介した離散時間力学系，及び，連続時間力学系の解の振舞いを，以下の語句等を用いて議論しなさい．コンピュータを用いた数値実験の結果などを適宜用いること．解析に用いる例は各々一例ずつで良い．
  - ✎ 固定点 (不動点)
  - ✎ 周期解
  - ✎ カオス
  - ✎ 初期値に関する鋭敏な依存性
  - ✎ リアプノフ指数
  - ✎ 分岐
  - ✎ フラクタル
2. 各自の研究テーマ (あるいは興味を持っているテーマ) と決定論的カオスとの関連を議論せよ．



# レポート課題

- ◀ 提出期限：平成 15 年 8 月 8 日 (金) 17:00 まで
- ◀ 提出先：池口宛直接（居室，情報棟 723 室）
- ◀ A4 サイズ．表紙不要．学籍番号，氏名，連絡先 (研究室内線番号，電子メールアドレス等 [提出内容に関する問い合わせを行うため]) を明記のこと．
- ◀ 言語：日本語あるいは英語