2003 年 情報理論及演習 後期 2003 年 10 月 27 日分 略解

1. 情報量が 1 ビットとは，どのようなことを表わすか．例をあげながら説明しなさい (30 点).

ある事象 a の情報量が 1 ビットとは,
$I(a) = -\log_2 P(a) = 1$[bit]
となることを意味する．つまり，$P(a) = 1/2$ である．例えば，“(偏りのない) コインを投げて，表 (または裏) が出た” という情報量が 1 ビットである．

2. 以下の情報量を求めなさい.

(a) 出現確率が等しいサイコロの目 1，2，3，4，5，6 の情報量 (15 点).

出現確率はいずれも 1/6 である．よって，それぞれの情報量は,
$I(1) = I(2) = I(3) = I(4) = I(5) = I(6)$
$= -\log_2 \frac{1}{6} = \log_2 6 = 2.585$[bits]
となる.

(b) ジョーカーを除く 52 枚のトランプのカードから 1 枚のカードを引いたときに，引いたカードが

- ハートである
- 偶数である
- ダイヤの 1 である

情報量 (15 点).

求める情報量を順に $I(a), I(b), I(c)$ とすると,
$I(a) = -\log_2 \frac{1}{4} = 2$[bits],
$I(b) = -\log_2 \frac{24}{52} = 6.286$[bits],
$I(a) = -\log_2 \frac{1}{52} = 5.7007$[bits]
となる.

3. n 進法の効率を考えよう．そのための評価量として,

$$E = \frac{\log_2 n}{n-1} \qquad (1)$$

を用いることにする.

(a) 式 (1) の意味を説明しなさい (10 点).

n 進法において表現できる情報量が分子，n 進法で表現するのに必要なシンボルを区別するための「仕切り」の数が分母なので，n 進法のコストと考えることができる.

(b) 式 (1) に基づいて，n 進法の効率を評価するとき，最も効率がよいのは何進法か (10 点).

横軸に n、縦軸に E を取りプロットすると，図 1 のようになり，$n = 2$ つまり 2 進法が最も効率が良いと考えることができる。

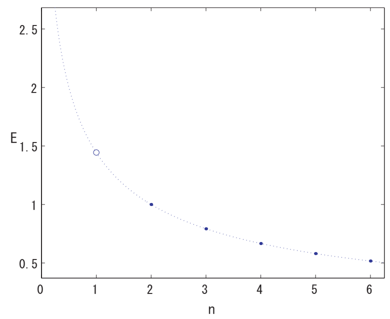

Figure 1: $n = 1$ の時，解は存在しない.

4. ある日の A 市と B 市の天気予報について考える．A 市の天気予報では，晴れとなる確率が 99%，雨となる確率が 1%，B 市の天気予報では，晴れとなる確率が 75%，雨となる確率が 25%とする．A 市と B 市の天気予報のエントロピーを求めなさい (20 点).

それぞれのエントロピーを $H(A)$, $H(B)$ とすると,
$H(A) = -\frac{99}{100}\log_2\frac{99}{100} - \frac{1}{100}\log_2\frac{1}{100}$
$= 0.0808$[bits],
$H(B) = -\frac{75}{100}\log_2\frac{75}{100} - \frac{25}{100}\log_2\frac{25}{100}$
$= 0.8113$[bits] となる.

5. (**次週に持越しになりました.**)
生起確率が全て等しい n 元事象系において，エントロピーが最大となるのは，各事象の生起確率 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ が全て等しく $\dfrac{1}{n}$ となるときであることを示せ.

制約条件:
$g(p_1, p_2, \cdots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i - 1 = 0$
のもとで,
エントロピー:
$H(p_1, p_2, \cdots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$
の最大値を求めたいので，ラグランジュの未定乗数法を用いる．つまり，$\nabla H = \lambda \nabla g$ が成り立つ時，H は最大となる.

ここで,
$\nabla H = (\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_n})$
$= (-\log_2 p_1 – 1, -\log_2 p_2 – 1, \cdots, -\log_2 p_n – 1)$.
同様に，$\nabla g = (1, 1, \cdots, 1)$.

$\therefore \log_2 p_1 = \log_2 p_2 = \cdots = \log_2 p_n$.
$\therefore p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$ $(\because \sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$.

これより，エントロピー H が最大となるのは，各事象の生起確率が全て等しい時であることが示された.