カオスと分岐

非線形システム特論 *2004*

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338–8570 **さいたま市 桜区 下大久保** 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru

分岐 (bifurcation) とは

◀ (離散時間) 力学系

$$x(t+1) = f_\mu(x(t))$$

におけるパラメータ μ の値を変化させて解を求める

$\Downarrow$

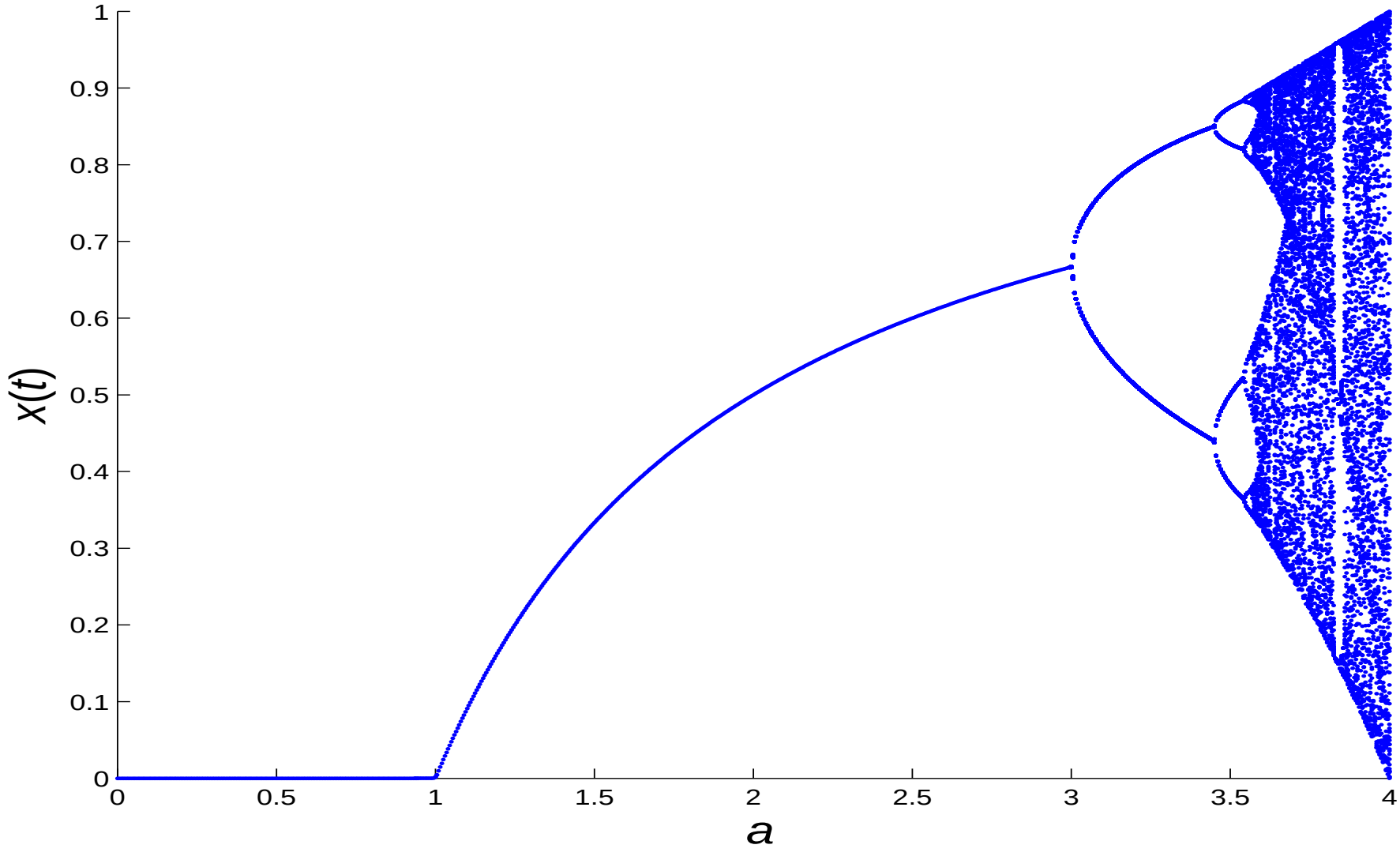
パラメータ値に応じて，様々な解のタイプ
＝力学系の解の構造が変化＝分岐

◀ 例: カオスでない状態 $\rightarrow$ カオス (カオスへ至るルート)

固定点 (不動点) $\Rightarrow$ 周期解 $\Rightarrow \cdots \Rightarrow$ カオス

分岐の例

ロジスティック写像の分岐図 (bifurcation diagram)



ロジスティック写像と分岐

ロジスティック写像

$$x(t+1) = ax(t)(1-x(t)) \triangleq f_a(x(t))$$

を対象にして，

- 不動点
- $m-$ 周期点
- 初期値 $x(0)$ に関する軌道
- 不動点の安定性

を考えよう．

不動点と周期点

◀ **不動点，固定点** (fixed point)

$$\overline{x} \quad \text{s.t.} \quad f_a(\overline{x}) = \overline{x}$$

◀ $m-$ **周期点** (m **は自然数**)

$$\begin{aligned} f_a^m(x) &= x \\ f_a^n(x) &\neq x \ (n = 1, 2, 3, \ldots, m-1) \end{aligned}$$

◀ (**注意**) $f_a^n(x) \neq \{f_a(x)\}^n$

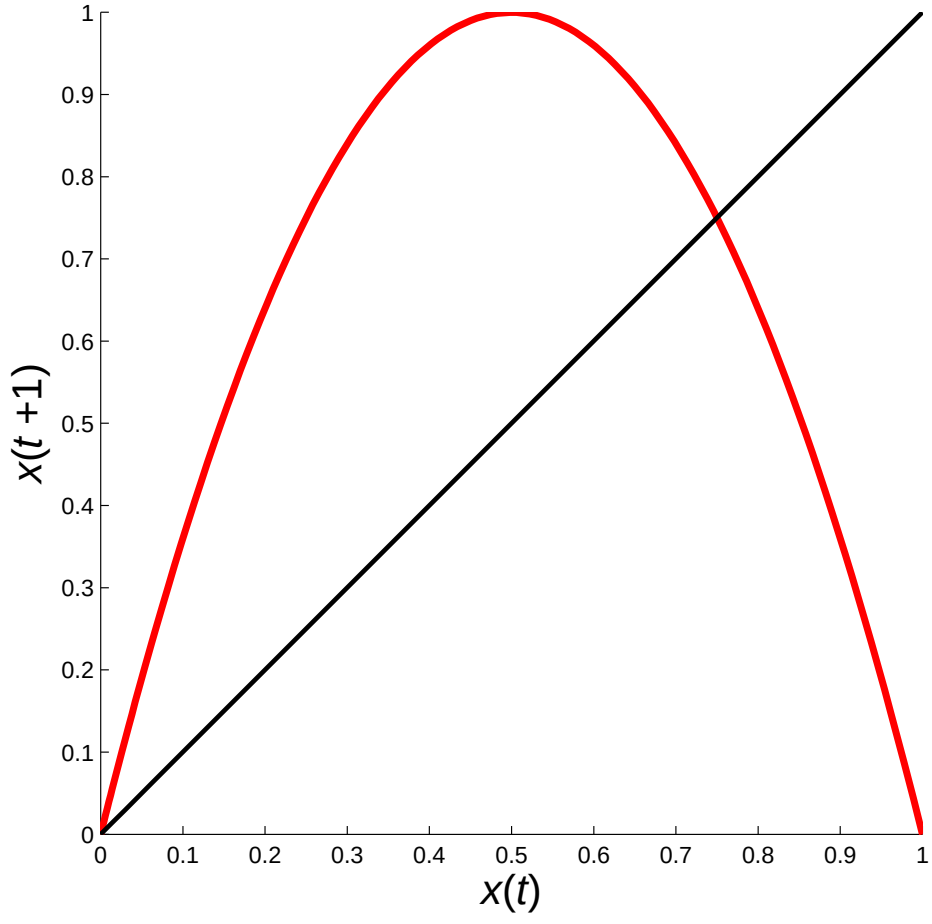
例)

$$\begin{aligned} f_a(x) &= ax(1-x) \\ f_a^2(x) &= f_a(f_a(x)) = a\{ax(1-x)\}(1-\{ax(1-x)\}) \\ &= \cdots \neq a^2x^2(1-x)^2 = \{f_a(x)\}^2 \end{aligned}$$

軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

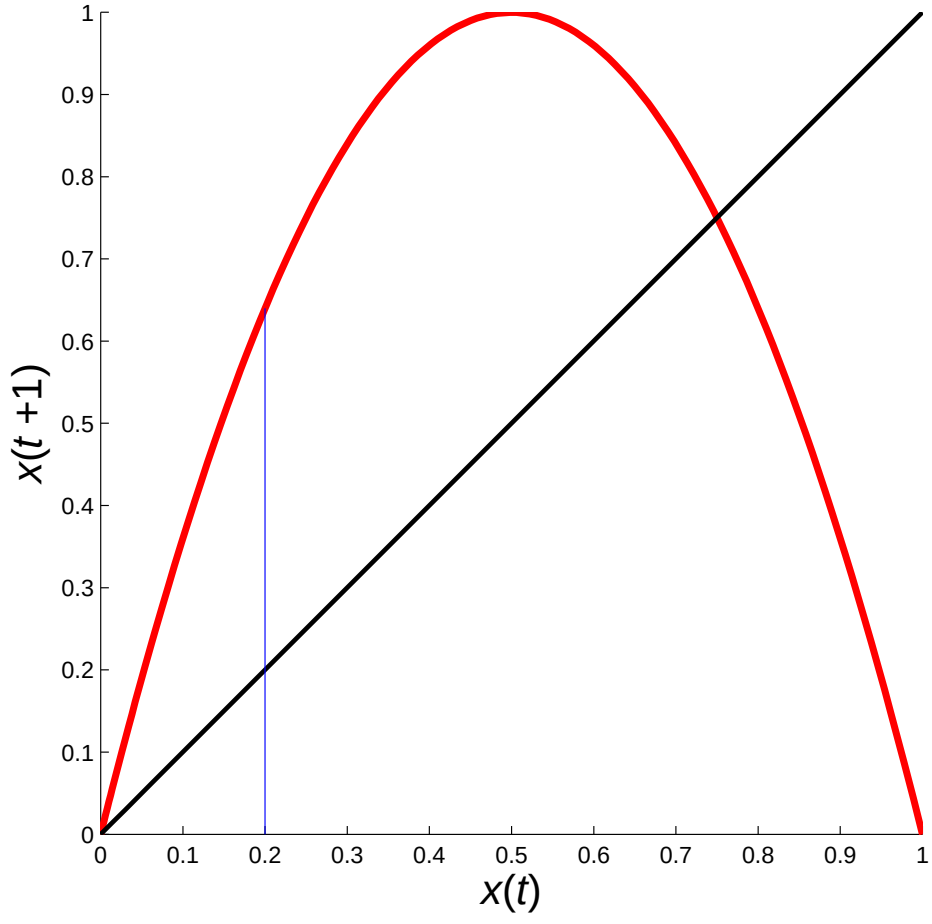
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

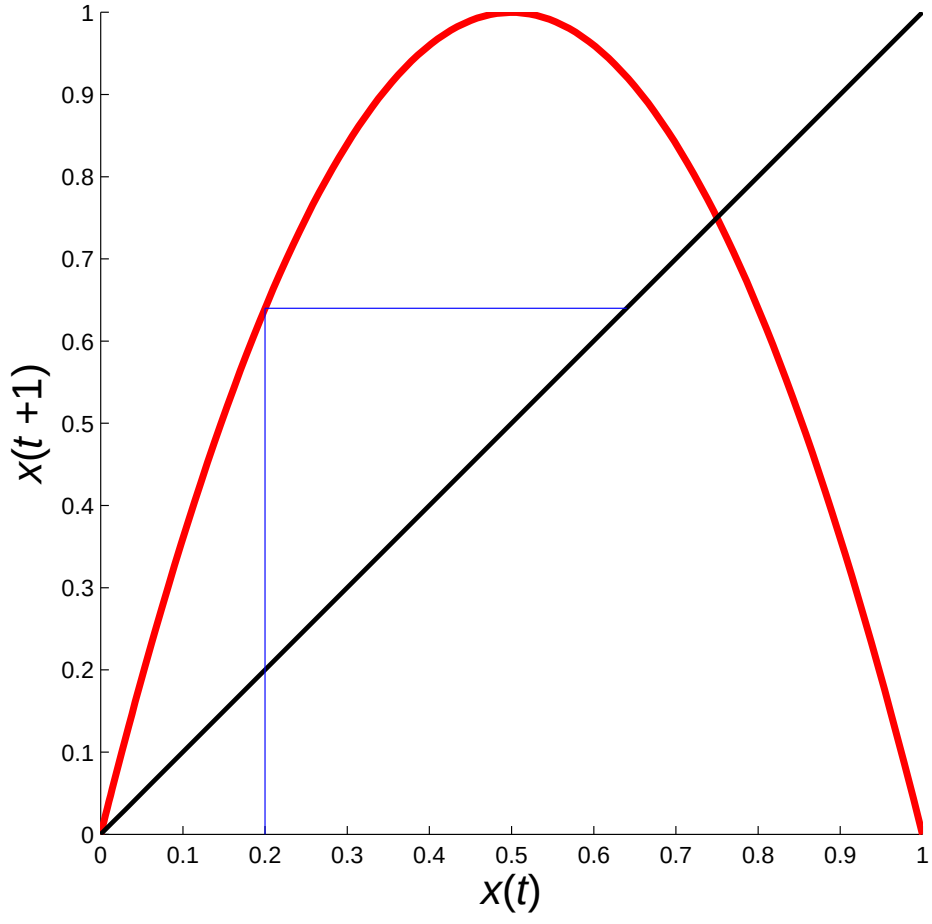
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

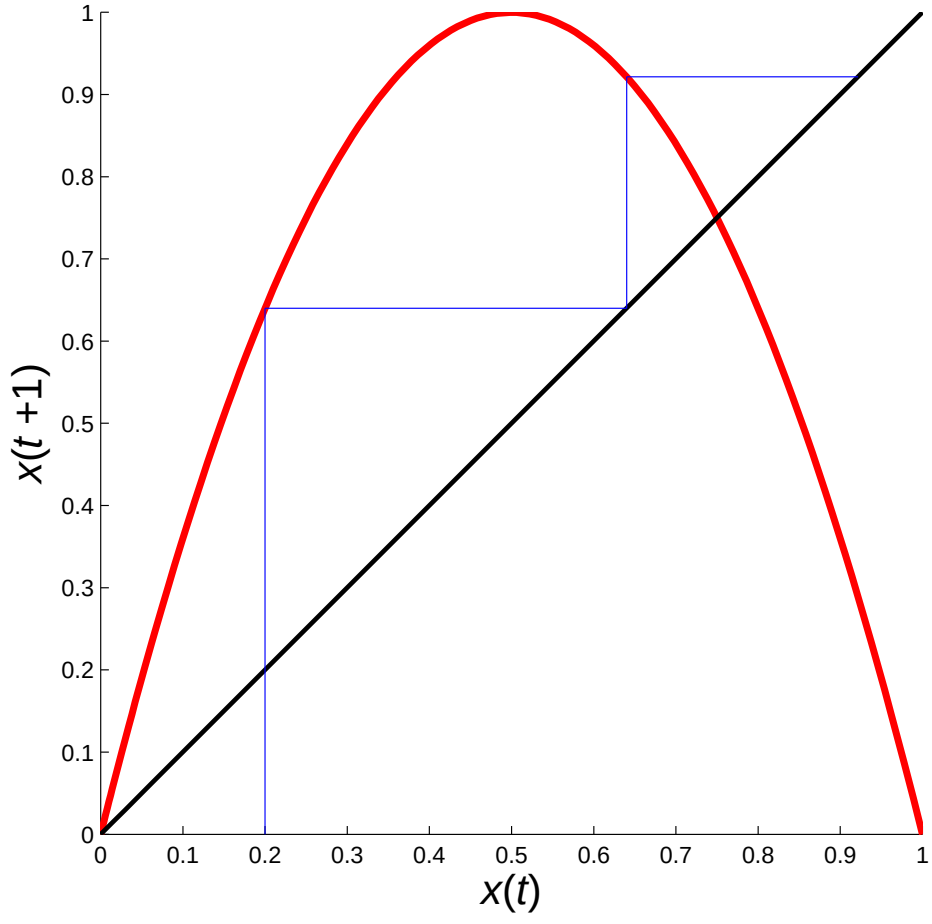
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

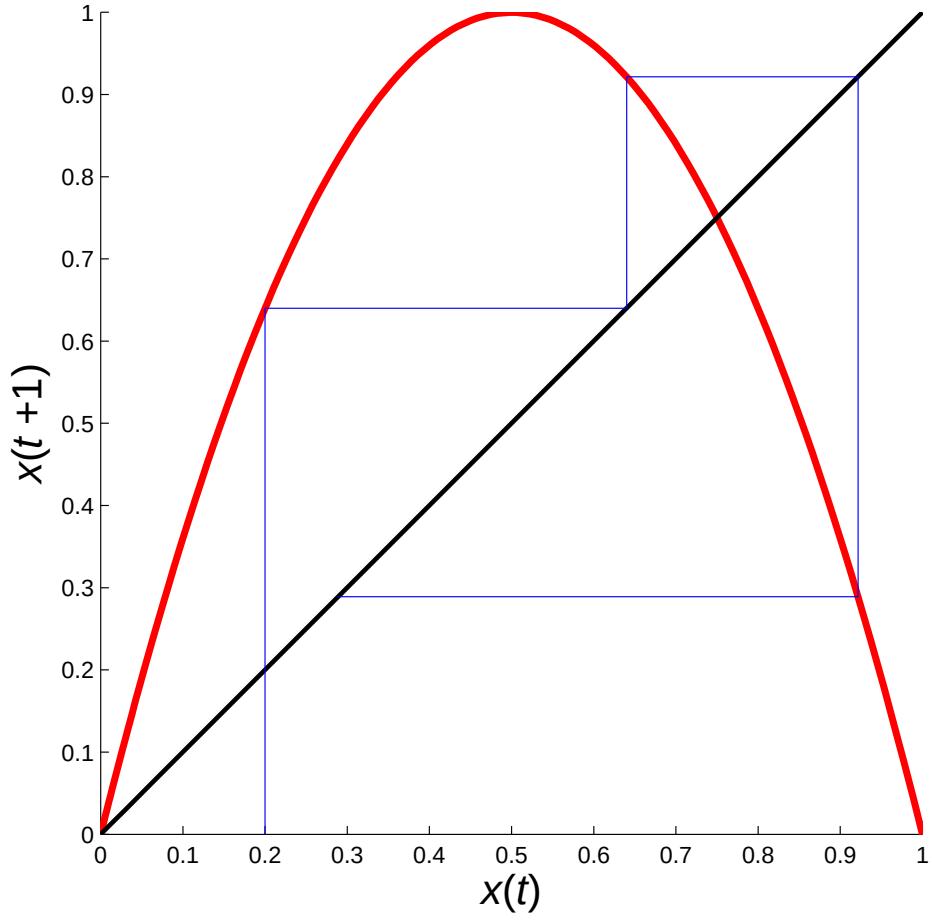
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

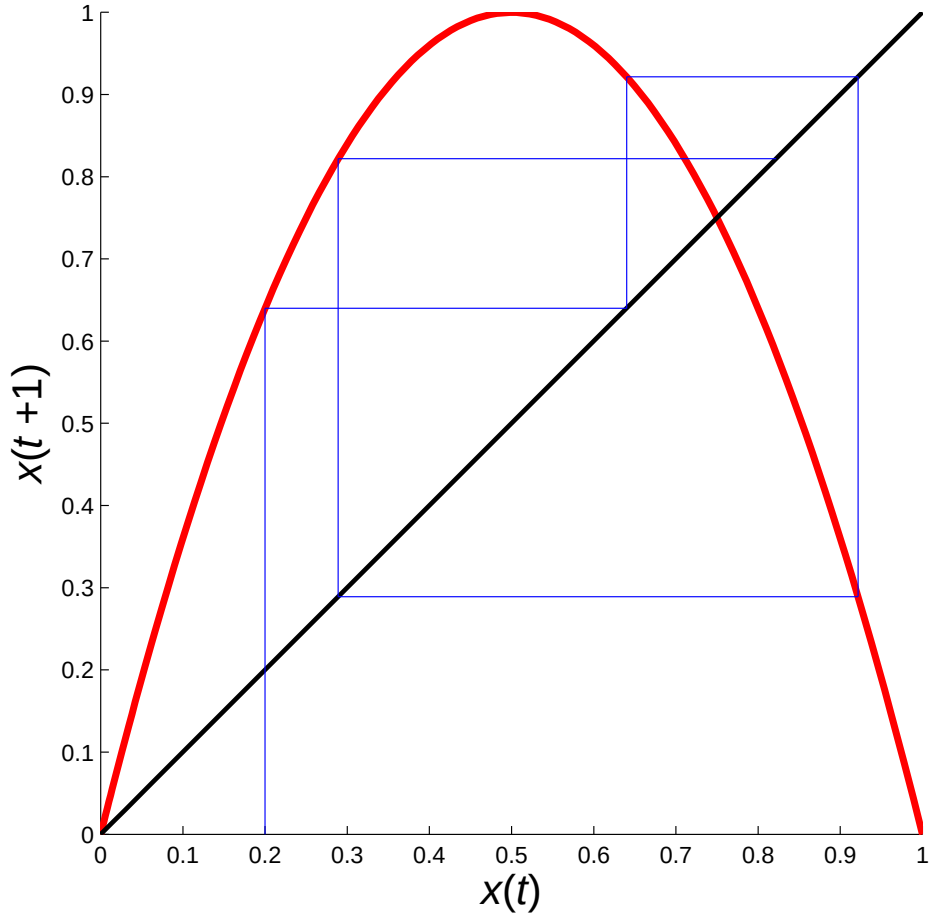
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

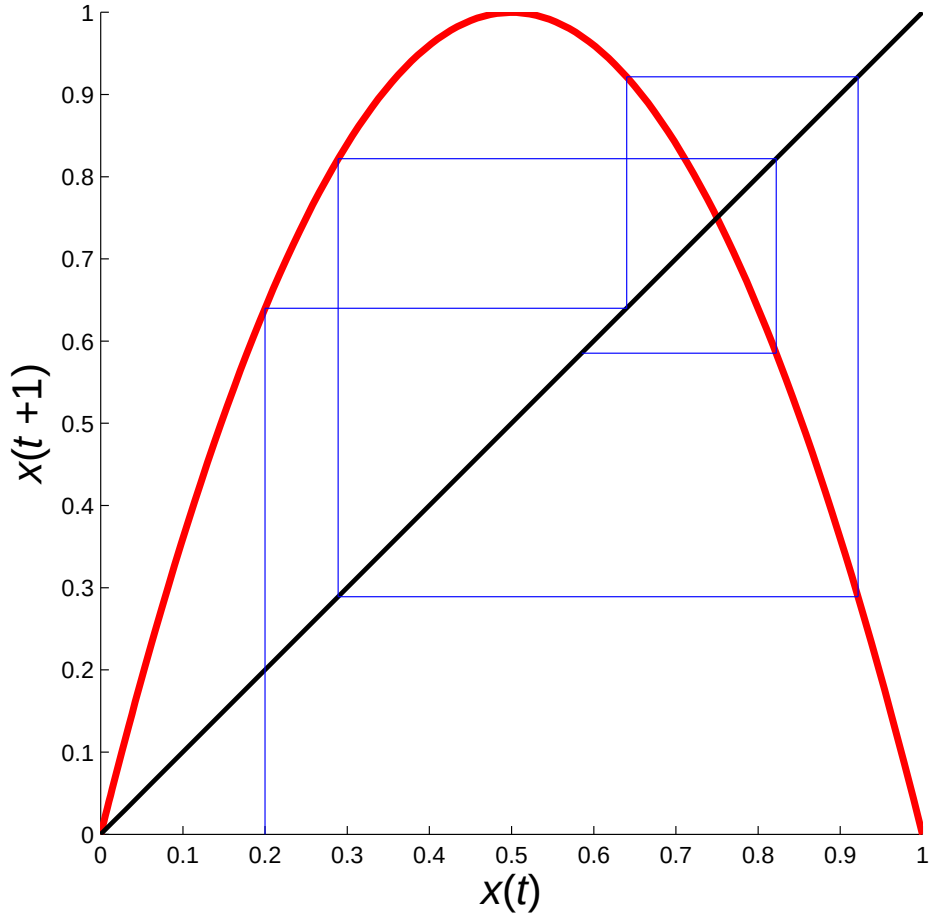
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

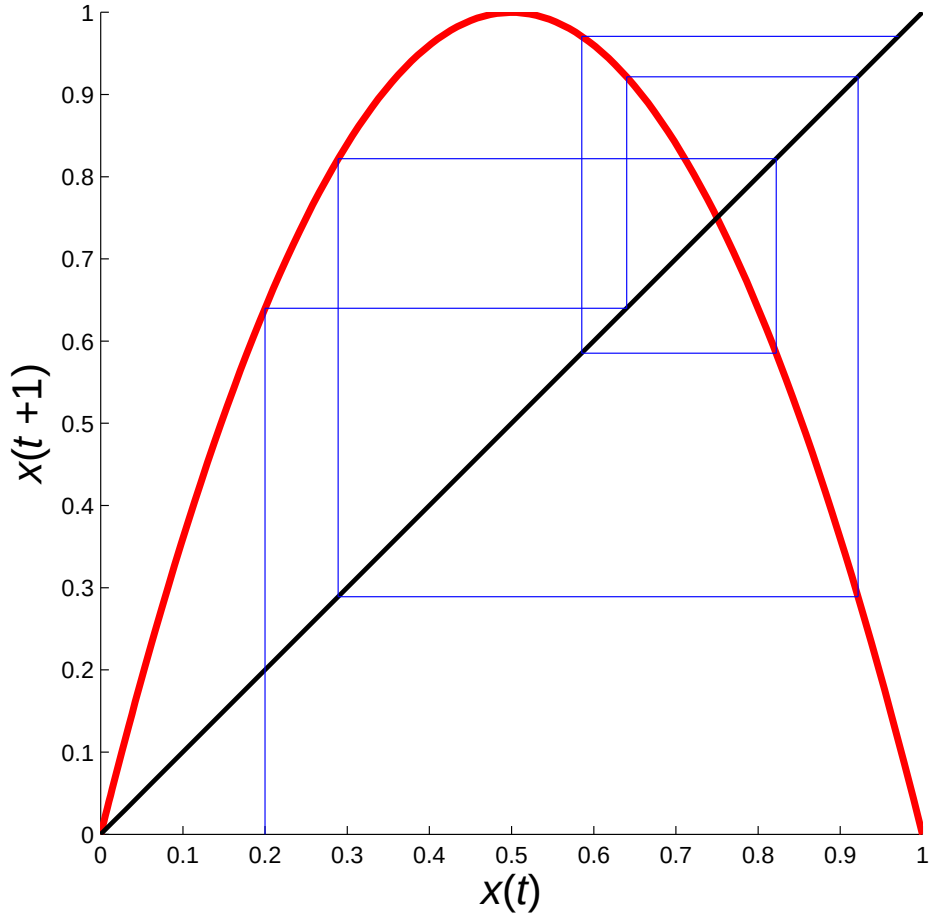
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

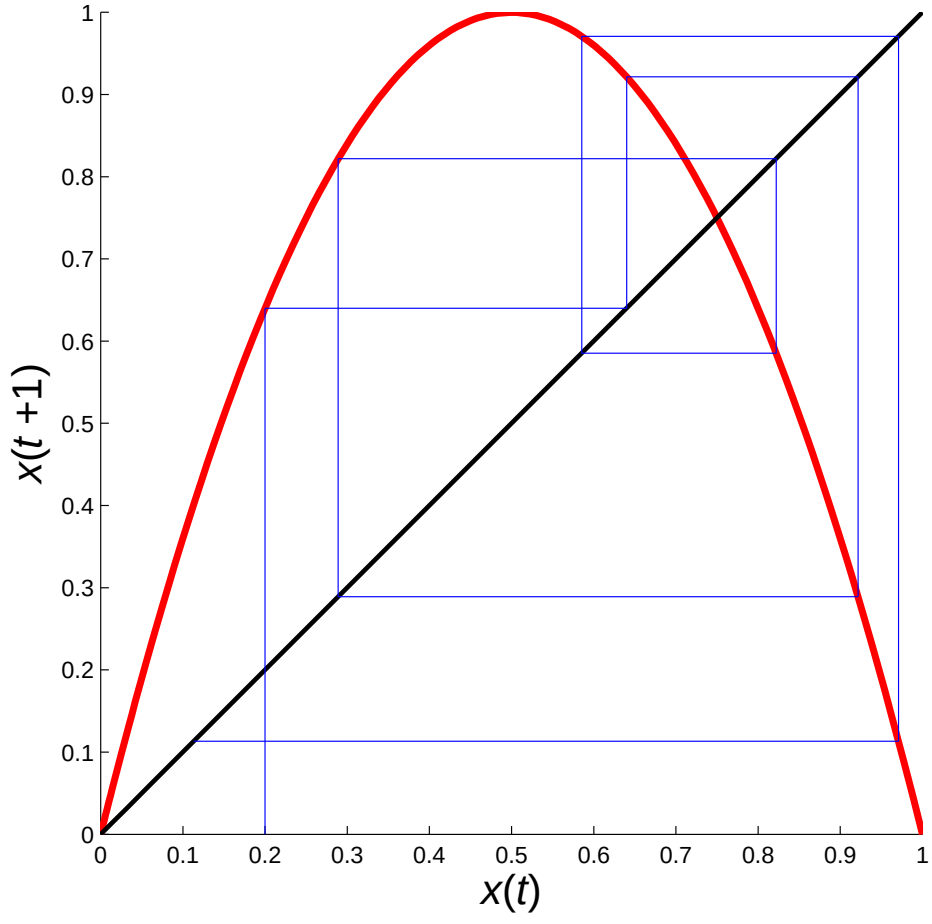
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

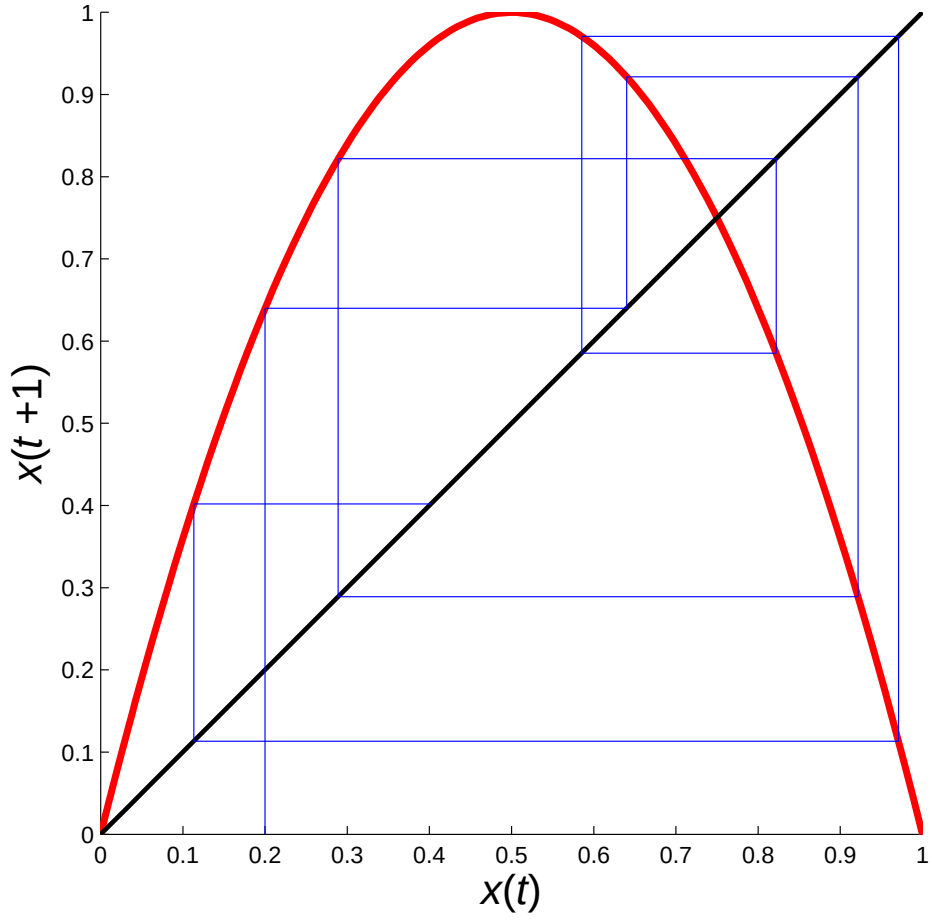
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



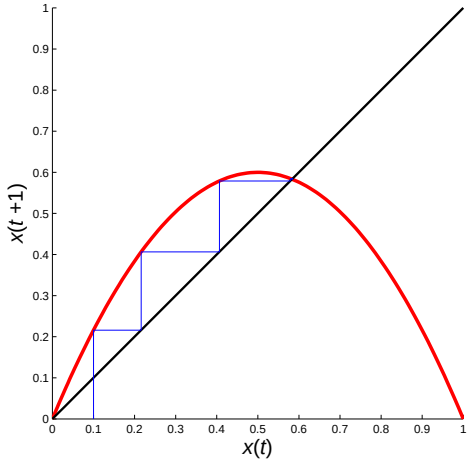
軌道と図式解法

◀ 初期値 $x(0)$ に関する軌道

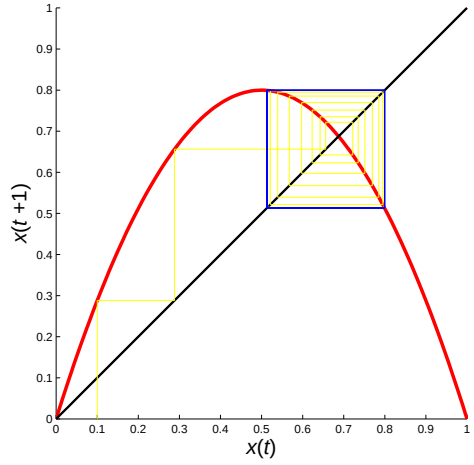
$$\{x(t), t = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



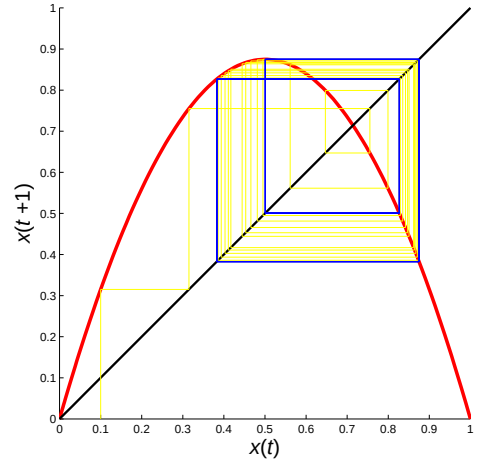
ロジスティック写像と図式解法



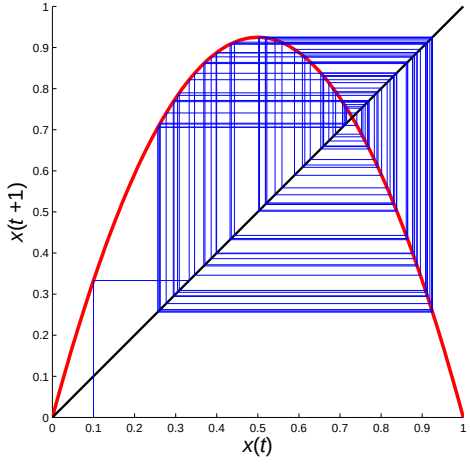
$a = 2.4$



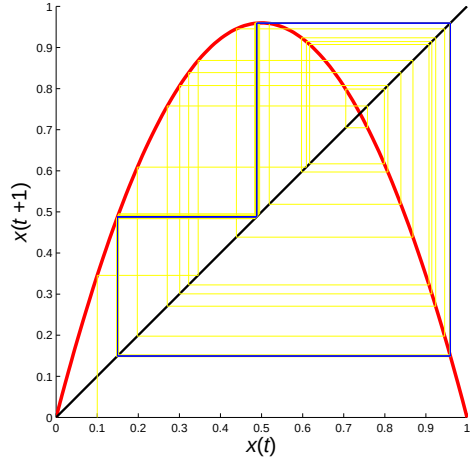
$a = 3.2$



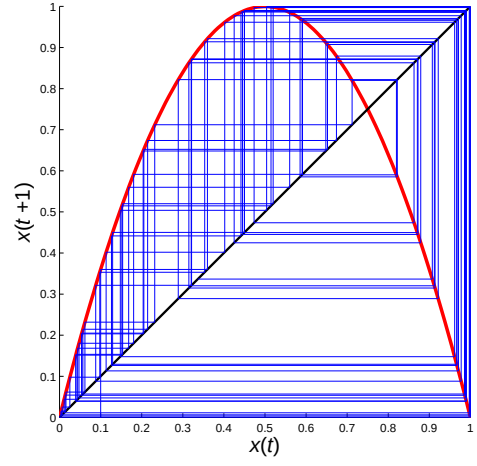
$a = 3.5$



$a = 3.7$



$a = 3.84$



$a = 4.0$

不動点の安定性

◀ 安定な不動点

$$\bar{x} = f_a(\bar{x})$$
$$|f_a'(\bar{x})| < 1$$

$$\begin{aligned} \bar{x} + \epsilon(t+1) &= f_a(\bar{x} + \epsilon(t)) \\ &\approx f_a(\bar{x}) + f_a'(\bar{x})\epsilon(t) \\ &= \bar{x} + f_a'(\bar{x})\epsilon(t) \\ \therefore \epsilon(t+1) &= f_a'(\bar{x})\epsilon(t) \end{aligned}$$

不動点の安定性

[定理]
力学系 $f(x)$ が微分可能で，$f'(x)$ は連続であるとする．$\overline{x}$ を力学系 $f(x)$ の不動点とする．$|f'(\overline{x})| < 1$ であるとき，$\overline{x}$ の近傍 V が存在して，

$$\overline{x} \in V \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f^n(\overline{x}) = \overline{x}$$

不動点の安定性

今，$|f_a'(\overline{x})| < 1$ であるから

$$0 <^{\exists} \lambda < 1, ^{\exists} \delta < 0 \quad \text{s.t.} \quad \text{for}^{\forall} x \quad \text{in} \quad I \in [\overline{x} - \delta, \overline{x} + \delta]$$

$$|f_a'(\overline{x})| < \lambda < 1$$

とすることができる．従って，平均値の定理より，

$$\text{for}^{\forall} p \in I, ^{\exists} c \in I$$

$$\frac{|f_a(p) - f_a(\overline{x})|}{|p - \overline{x}|} = f_a'(c) < \lambda < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |f_a(p) - f_a(\overline{x})| < \lambda |p - \overline{x}| < |p - \overline{x}|$$

とすることができる．

不動点の安定性

次に，$f_a(p) \in I$ なので $f_a(p)$ と $f_a(\bar{x})$ に同じことを適用すると，

$$\left|f_a^2(p) - f_a^2(\bar{x})\right| = |f_a(f_a(p)) - f_a(f_a(\bar{x}))| < \lambda |f_a(p) - f_a(\bar{x})|$$

つまり

$$\left|f_a^2(p) - \bar{x}\right| < \lambda^2 |p - \bar{x}|$$

これを n 回繰り返すと

$$\left|f_a^n(p) - \bar{x}\right| < \lambda^n |p - \bar{x}|$$

$0 < \lambda < 1$ であるから $\lambda^n \to 0 (n \to \infty)$

$$\therefore\ f_a^n(p) \to \bar{x} (n \to \infty)$$

不動点の安定性 (補足)

- 状態空間の中で $\overline{x}$ に収束する p の集合をベイスン (basin)，引き込み領域
- この定理は，不動点の近傍のみにおいて成立．大域的には何も言えない．
- 但し，ロジスティック写像の場合は，不動点がこの意味で安定であれば，$I \in [0, 1]$ に対して大域的吸引不動点．
- 不安定な不動点

$$\overline{x} = f_a(\overline{x}), \quad |f_a'(\overline{x})| > 1$$

- n 周期点については，$f_a \to f_a^n$ とする．

$$\overline{x} = f_a^n(\overline{x}), \quad |(f_a^n)'(\overline{x})| < 1$$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

◀ **不動点** u **は?**

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

◀ **不動点** u **は?**

$$u = f_a(u) = au(1-u) \Longleftrightarrow u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

◀ **不動点 u は?**

$$u = f_a(u) = au(1-u) \Longleftrightarrow u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

◀ **不動点 u の安定性**

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

◀ **不動点 u は?**

$$u = f_a(u) = au(1-u) \Longleftrightarrow u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

◀ **不動点 u の安定性** $\quad f_a'(u) = a - 2au = a(1-2u)$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

◀ **不動点 u は?**

$$u = f_a(u) = au(1-u) \Longleftrightarrow u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

◀ **不動点 u の安定性** $\quad f_a'(u) = a - 2au = a(1-2u)$

1. $u = 0$

2. $u = 1 - \dfrac{1}{a}$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

◀ **不動点 u は?**

$$u = f_a(u) = au(1-u) \Longleftrightarrow u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

◀ **不動点 u の安定性** $\quad f_a'(u) = a - 2au = a(1-2u)$

1. $u = 0 \quad \Rightarrow f_a'(0) = a$

2. $u = 1 - \dfrac{1}{a}$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

◀ **不動点 u は?**

$$u = f_a(u) = au(1-u) \Longleftrightarrow u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

◀ **不動点 u の安定性** $\quad f_a'(u) = a - 2au = a(1-2u)$

1. $u = 0 \quad \Rightarrow f_a'(0) = a$

   $0 \le a < 1 \quad 0 \le f_a'(0) < 1$ **安定**

   $1 < a \qquad\qquad f_a'(0) > 1$ **不安定**

2. $u = 1 - \frac{1}{a}$

ロジスティック写像の場合

$$x(t+1) = f_a(x(t)) = ax(t)(1-x(t))$$

◀ **不動点 u は?**

$$u = f_a(u) = au(1-u) \Longleftrightarrow u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$$

◀ **不動点 u の安定性** $\quad f_a'(u) = a - 2au = a(1-2u)$

1. $u = 0 \quad \Rightarrow f_a'(0) = a$

   $0 \le a < 1 \quad 0 \le f_a'(0) < 1$ **安定**

   $1 < a \qquad\qquad f_a'(0) > 1$ **不安定**

2. $u = 1 - \frac{1}{a}$

   まず，解の存在を考える必要がある．

ロジスティック写像の場合

2. $u = 1 - \frac{1}{a}$

$0 \leq a < 1 \quad u < 0 \quad 0 < u < 1$ **を考えるのでなし**

$a < 1 \quad u > 0$ **存在する**

ロジスティック写像の場合

2. $u = 1 - \dfrac{1}{a}$

$0 \leq a < 1 \quad u < 0 \quad 0 < u < 1$ **を考えるのでなし**

$a < 1 \quad u > 0$ **存在する**

このとき，

$$f_a'\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a - 2a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 2 - a$$

より，

ロジスティック写像の場合

2. $u = 1 - \dfrac{1}{a}$

$0 \le a < 1 \quad u < 0 \quad 0 < u < 1$ **を考えるのでなし**

$a < 1 \quad u > 0$ **存在する**

このとき，

$$f_a'\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a - 2a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 2 - a$$

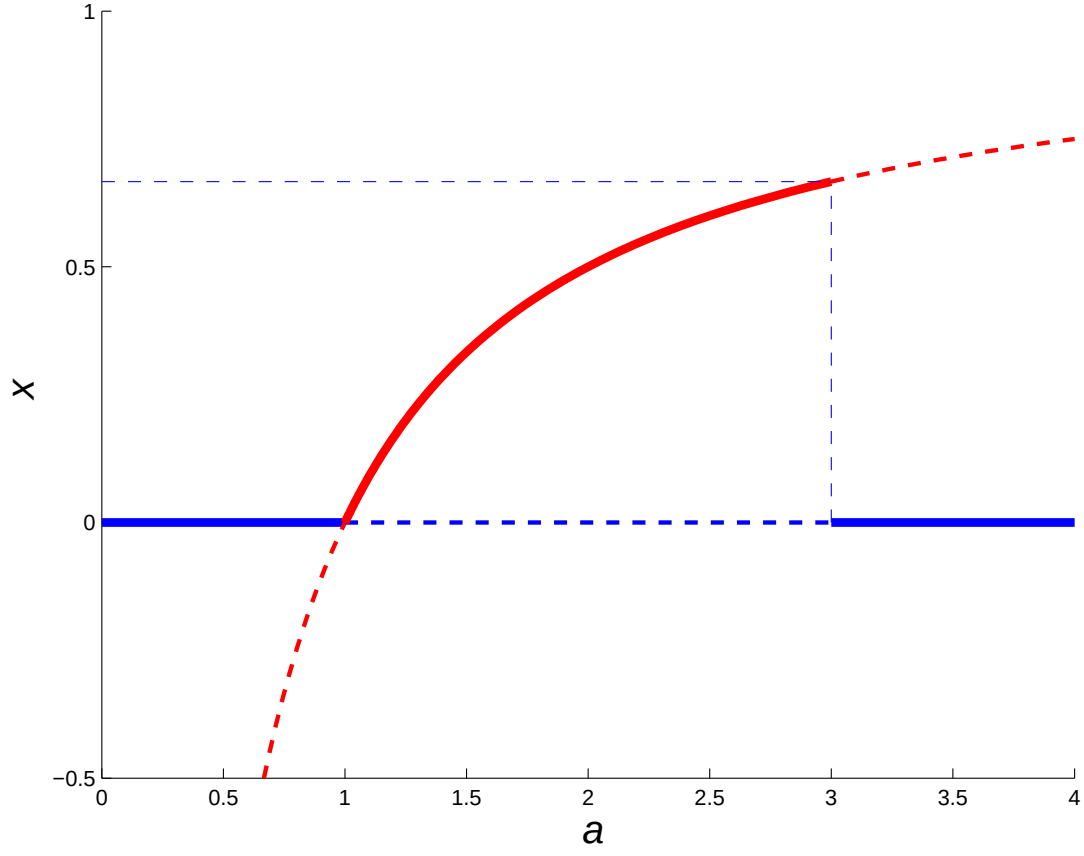
より，

$0 \le a < 1 \quad |f_a'\left(1 - \frac{1}{a}\right)| > 1 \quad u = 1 - \frac{1}{a}$ **は不安定**

$1 \le a < 3 \quad |f_a'\left(1 - \frac{1}{a}\right)| < 1 \quad u = 1 - \frac{1}{a}$ **は安定**

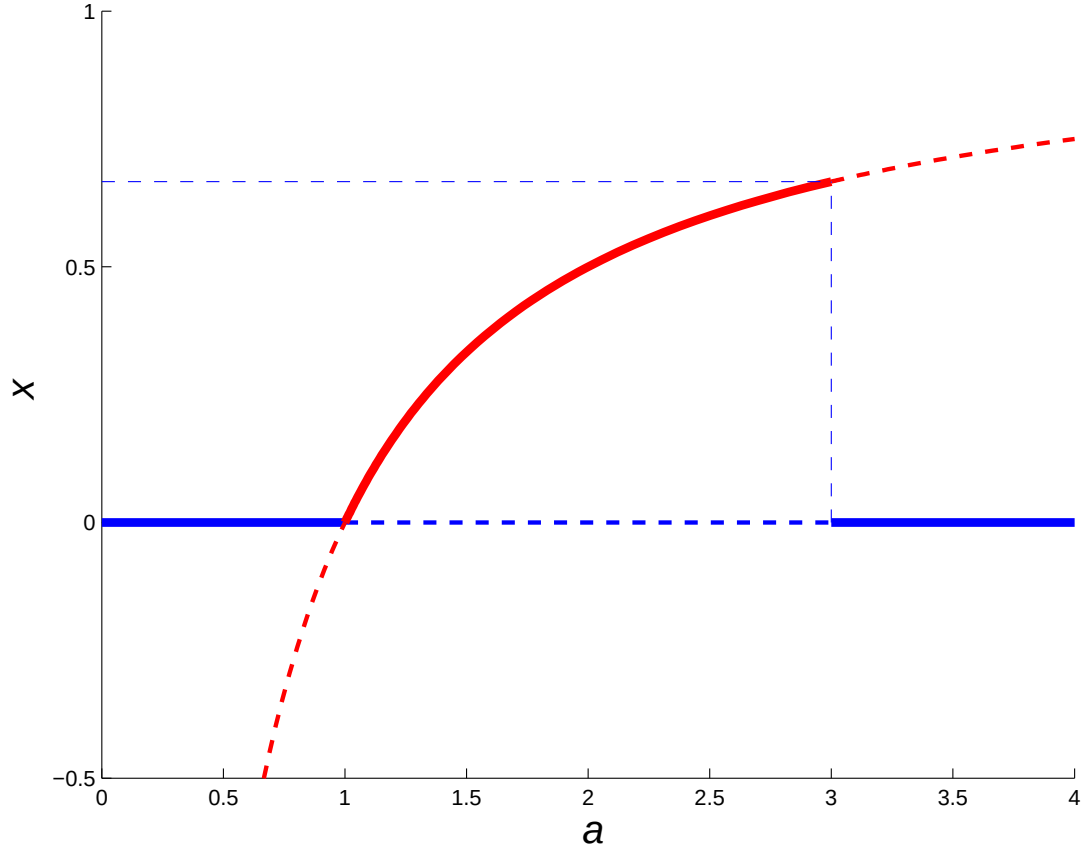
$3 < a \le 4 \quad |f_a'\left(1 - \frac{1}{a}\right)| > 1 \quad u = 1 - \frac{1}{a}$ **は不安定**

トランスクリティカル分岐



$u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$, **実線:安定，破線:不安定**

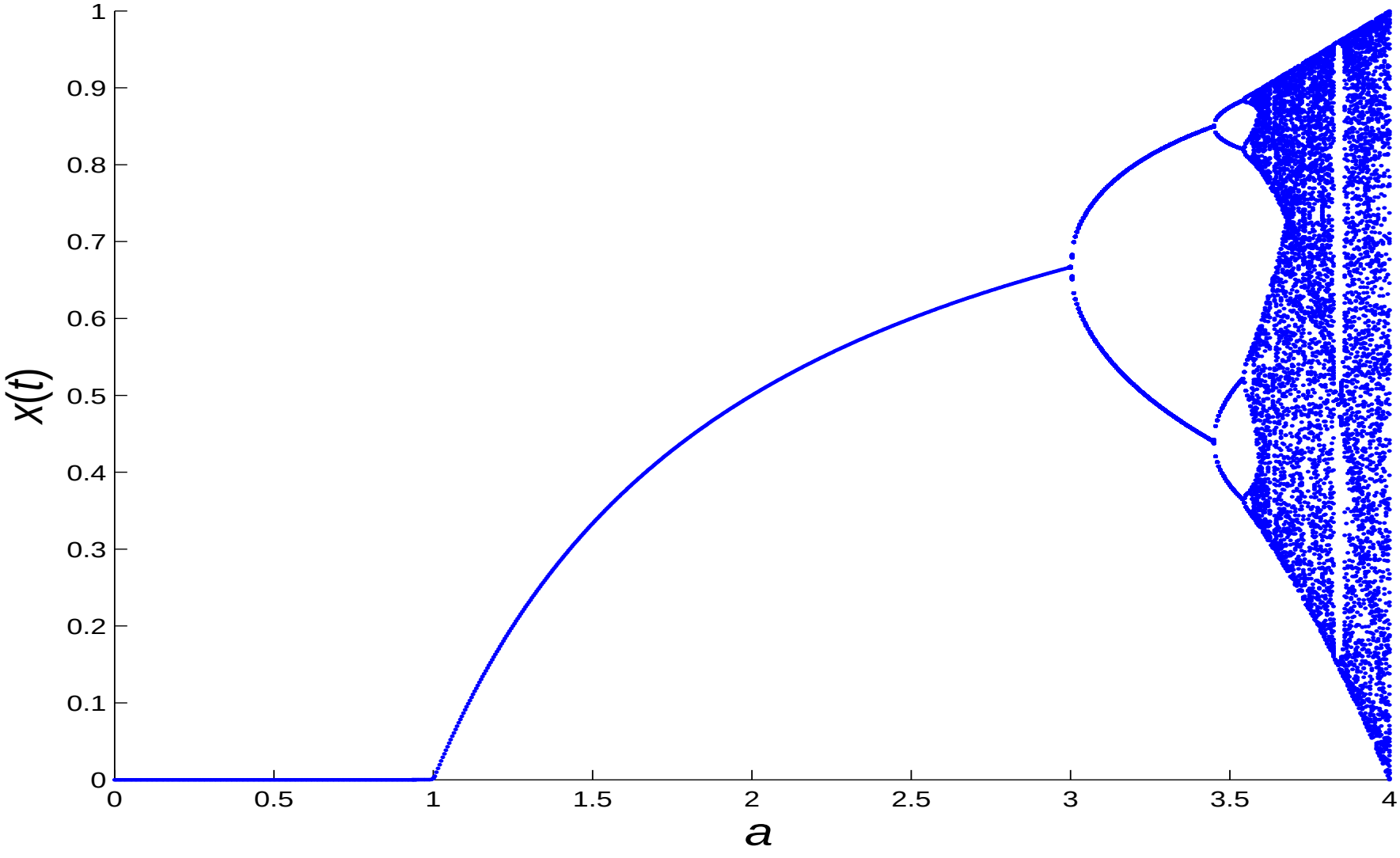
トランスクリティカル分岐



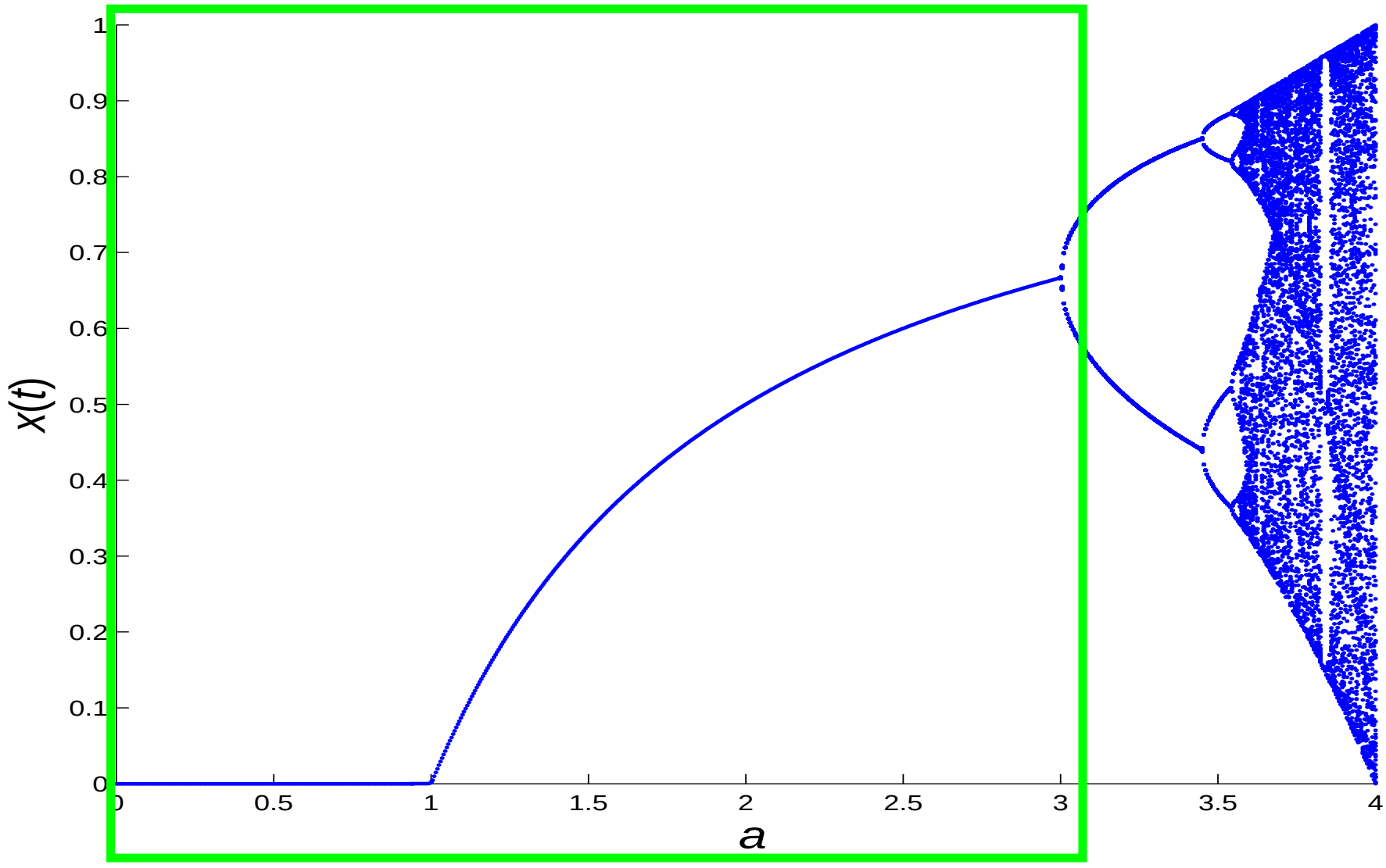
$u = 0, u = 1 - \frac{1}{a}$, **実線:安定，破線:不安定**

2 つの不動点の間で，安定性が入れ替わる

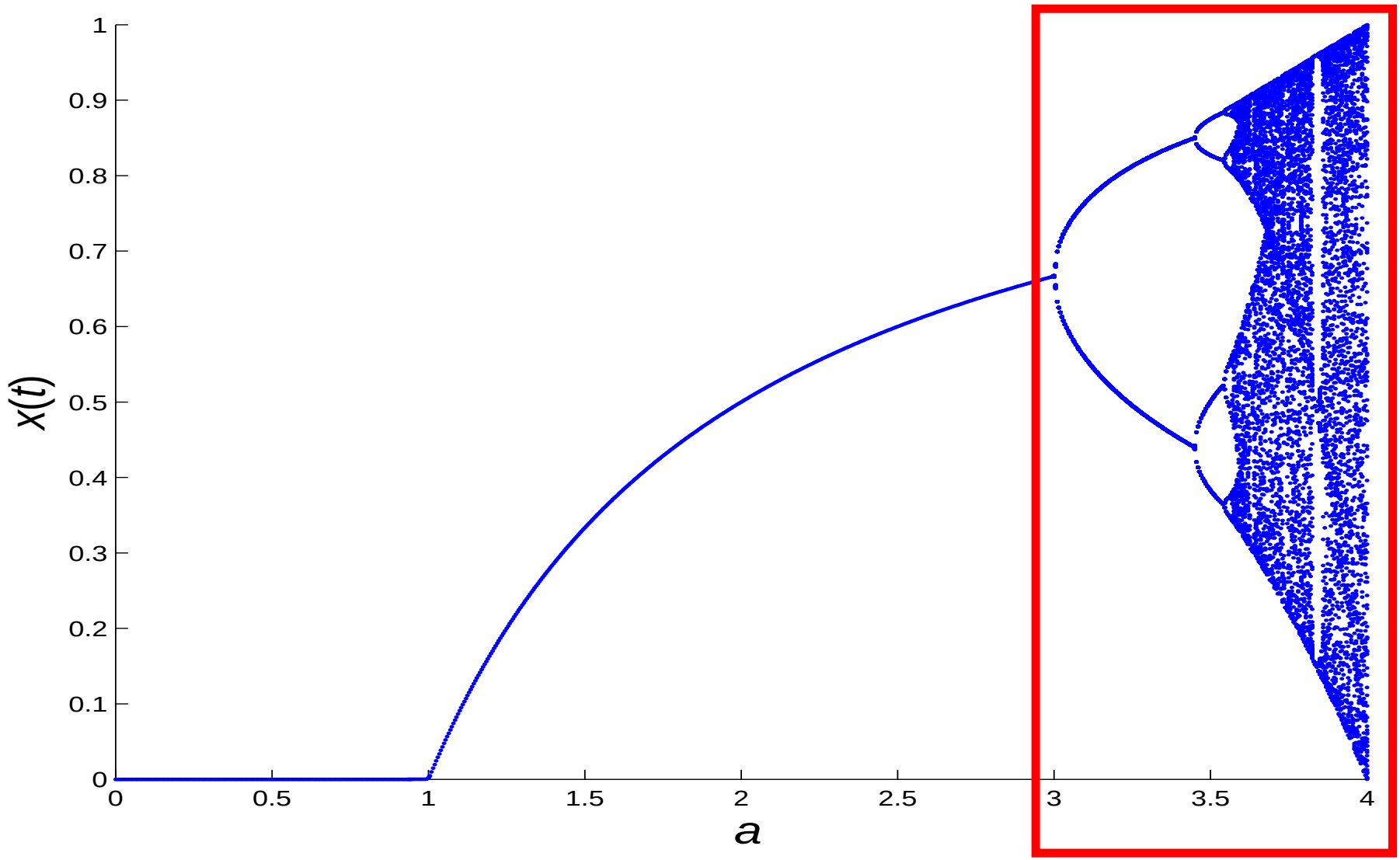
ロジスティック写像の分岐図



ロジスティック写像の分岐図



ロジスティック写像の分岐図



周期倍分岐

$a = 3$ 以降では何が起きているか?

◀ $u = 1 - \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であるから，

$$f_a'(u) = a - 2au = 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = -1$$

つまり，$a > 3$ では $f_a'(u) < -1$ となり不安定化

◀ 分岐図をみると，$a > 3$ では2周期解が現れている

$$\Downarrow$$

$f_a(x)$ と $f_a^2(x)$ のグラフを描いてみよう

確認！

$f_a(x) = ax(1-x)$ とする．このとき $f_a^2(x)$ は?

確認！

$f_a(x) = ax(1-x)$ **とする．このとき** $f_a^2(x)$ **は?**

$$\begin{aligned} f_a^2(x) &= \{ax(1-x)\}^2 \\ &= a^2x^2(1-x)^2 \end{aligned}$$

確認！

$f_a(x) = ax(1-x)$ とする．このとき $f_a^2(x)$ は?

$$\begin{aligned} f_a^2(x) &= \{ax(1-x)\}^2 \\ &= a^2x^2(1-x)^2 \end{aligned}$$

ダメダメ

確認！

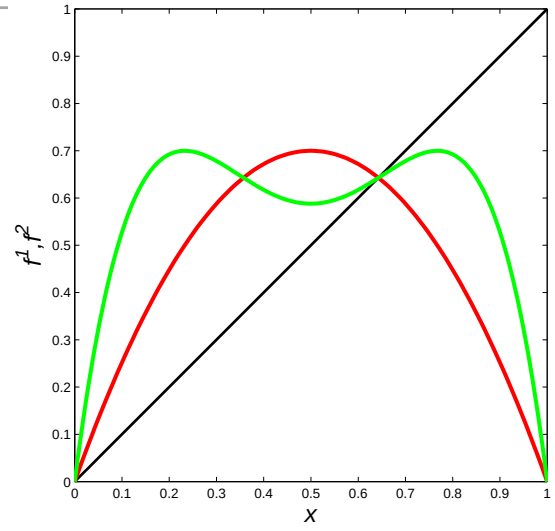
$f_a(x) = ax(1-x)$ とする．このとき $f_a^2(x)$ は?

$$\begin{aligned} f_a^2(x) &= \{ax(1-x)\}^2 \\ &= a^2x^2(1-x)^2 \end{aligned}$$

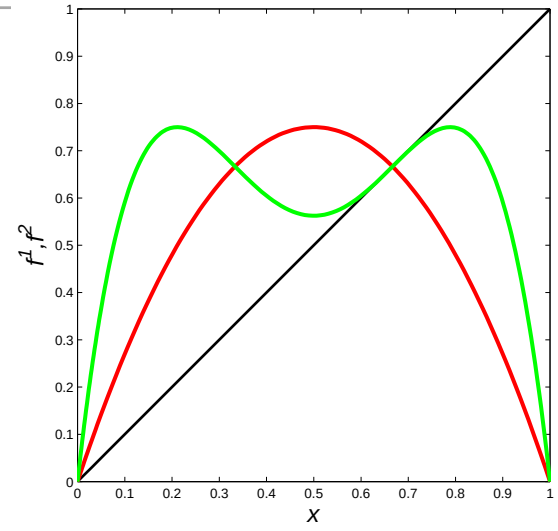
ダメダメ

$$\begin{aligned} f_a^2(x) &= f_a(f_a(x)) \\ &= a\{ax(1-x)\}\{1-ax(1-x)\} \end{aligned}$$

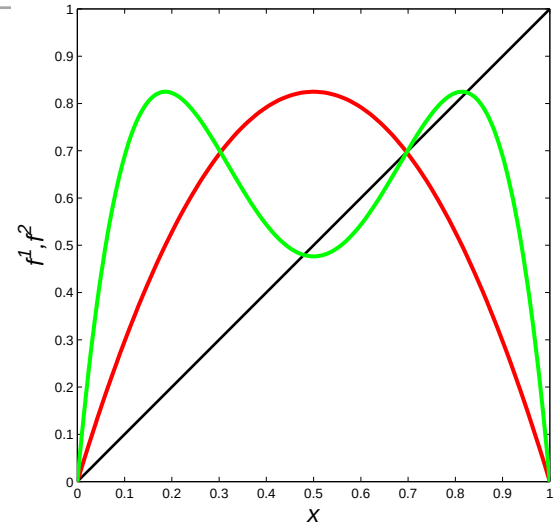
ロジスティック写像 $a = 3$ 付近



$a = 2.8$



$a = 3.0$



$a = 3.3$

- $a = 2.8 < 3$ **では不動点** $u = 1 - \frac{1}{a} \approx 0.6429\cdots$ **が安定**
- $a = 3$ **では** f^2 **が** $u = 2/3$ **において接している**
- $a = 3.3 > 3$ **では** f^2 **と** 45 **度の直線が** 4 **箇所 (不動点** u **と** 2 **周期解** q_1, q_2**) で交わっている．**

周期倍分岐

- まず，不動点 u に対して，2 回写像 f_a^2 に関する安定性，不安定性を考えてみよう．

$$\begin{aligned}\left(f_a^2\right)'(u) &= f_a'(f_a(u)) \cdot f_a'(u) \\ &= f_a'(u) \cdot f_a'(u) \\ &= \{f_a'(u)\}^2\end{aligned}$$

  - $1 < a < 3$ では $|f_a'(u)| < 1 \Longleftrightarrow \left(f_a^2\right)'(u) < 1$
  - $a = 3$ では $|f_a'(u)| = -1 \Longleftrightarrow \left(f_a^2\right)'(u) = 1$
  - $a > 3$ では $|f_a'(u)| > -1 \Longleftrightarrow \left(f_a^2\right)'(u) > 1$

- $a = 3$ を越えると不動点 u も f_a^2 について不安定
- それでは，2 周期点は安定化?不安定?

周期倍分岐

2 周期点 q_1, q_2 を求めるには?

周期倍分岐

2 周期点 q_1, q_2 を求めるには?

$$
\begin{aligned}
& f_a^2(q) = q \\
\Longleftrightarrow \quad & f_a^2(q) = a\{aq(1-q)\}\{1-aq(1-q)\} = q \\
\Longleftrightarrow \quad & q\left(q-1+\frac{1}{a}\right)\left\{a^2q^2-(a^2+a)q+a+1\right\} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & q_i = \frac{a+1\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}, \quad (i=1,2)
\end{aligned}
$$

周期倍分岐

2 周期点 q_1, q_2 を求めるには?

$$
\begin{aligned}
& f_a^2(q) = q \\
\Longleftrightarrow \quad & f_a^2(q) = a\{aq(1-q)\}\{1-aq(1-q)\} = q \\
\Longleftrightarrow \quad & q\left(q-1+\frac{1}{a}\right)\left\{a^2q^2-(a^2+a)q+a+1\right\} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & q_i = \frac{a+1\sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}, \quad (i=1,2)
\end{aligned}
$$

2 周期点の点の安定性を見るためには，2 回写像 $f_a^2(q)$ に関する微分係数 $\left(f_a^2\right)'(q_1), \left(f_a^2\right)'(q_2)$ の値を求め，その絶対値が 1 よりも大きいか，小さいかを見れば良い．

周期倍分岐

◀ **まず，q_1, q_2 は２周期点なので，**

$$f_a(q_1) = q_2, \quad f_a(q_2) = q_1$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\left(f_a^2\right)'(q_1) &= (f_a(f_a(q_1)))' \\ &= f_a'(f_a(q_1)) \cdot f_a'(q_1) \\ &= f_a'(q_2) \cdot f_a'(q_1) = \left(f_a^2\right)'(q_2)\end{aligned}$$

◀ $f_a'(x) = a - 2ax = a(1-2x)$ **であるから，**

$$f_a'(q_1) = a(1-2q_1)$$
$$f_a'(q_2) = a(1-2q_2)$$

周期倍分岐

◀ **従って，**

$$\begin{aligned}\left(f_a^2\right)'(q_1) &= \left(f_a^2\right)'(q_2) = f_a'(q_2)\cdot f_a'(q_1)\\ &= a^2(1-2q_1)(1-2q_2)\\ &= a^2\{1-2(q_1+q_2)+4q_1q_2\}\end{aligned}$$

◀ **ここで q_1, q_2 は以下の方程式の解である**

$$a^2q^2-(a^2+a)q+a+1=0$$

◀ **解と係数の関係より**

$$q_1+q_2=\frac{a^2+a}{a^2},\quad q_1q_2=\frac{a+1}{a^2}$$

周期倍分岐

◀ まとめると

$$\begin{aligned}\left(f_a^2\right)'(q_1) &= \left(f_a^2\right)'(q_2) = f_a'(q_2)\cdot f_a'(q_1)\\ &= a^2(1-2q_1)(1-2q_2)\\ &= a^2\{1-2(q_1+q_2)+4q_1q_2\}\\ &= -a^2+2a+4 = -(a-1)^2+5\end{aligned}$$

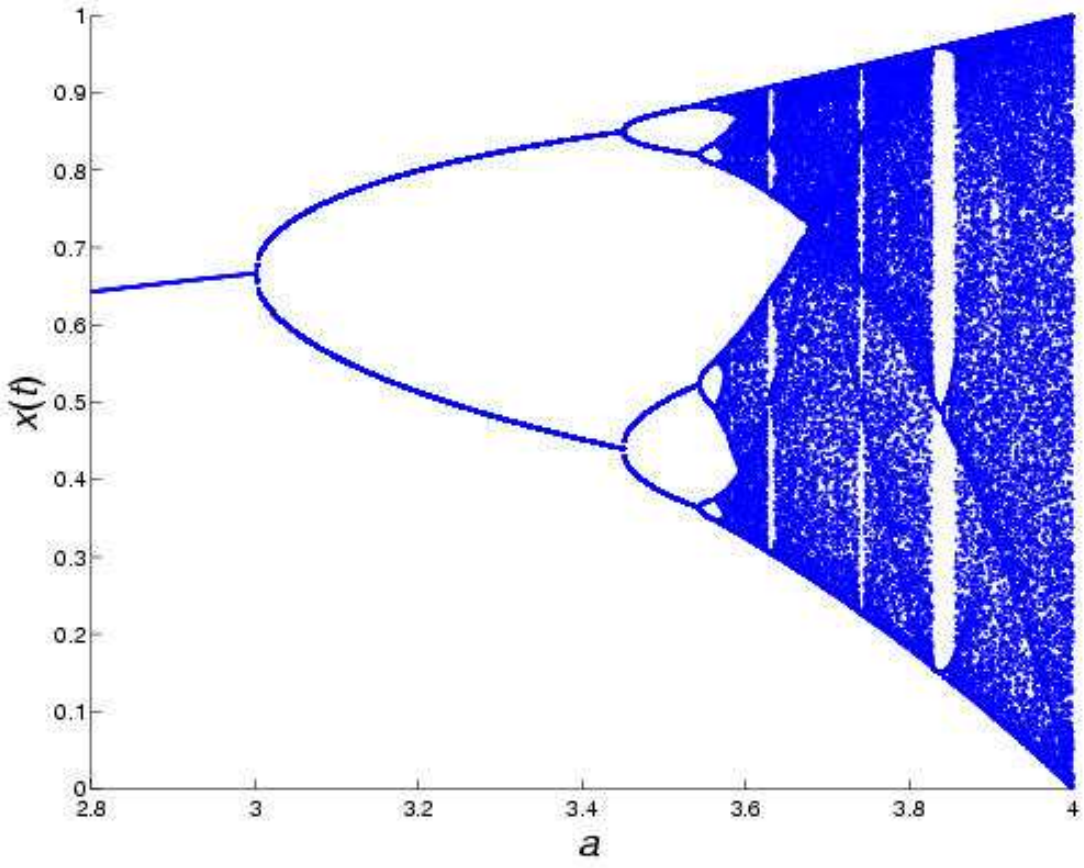
- $\left(f_a^2\right)'(q_1) = -1$ **より**

  $a = 1+\sqrt{6} = 3.44948974278318\ldots$

  (**と** $a = 1-\sqrt{6} < 0$)
- $\left(f_a^2\right)'(q_1) = 1$ **より** $a = 3$ (**と** $a = -1 < 0$)

2周期解から4周期解へ

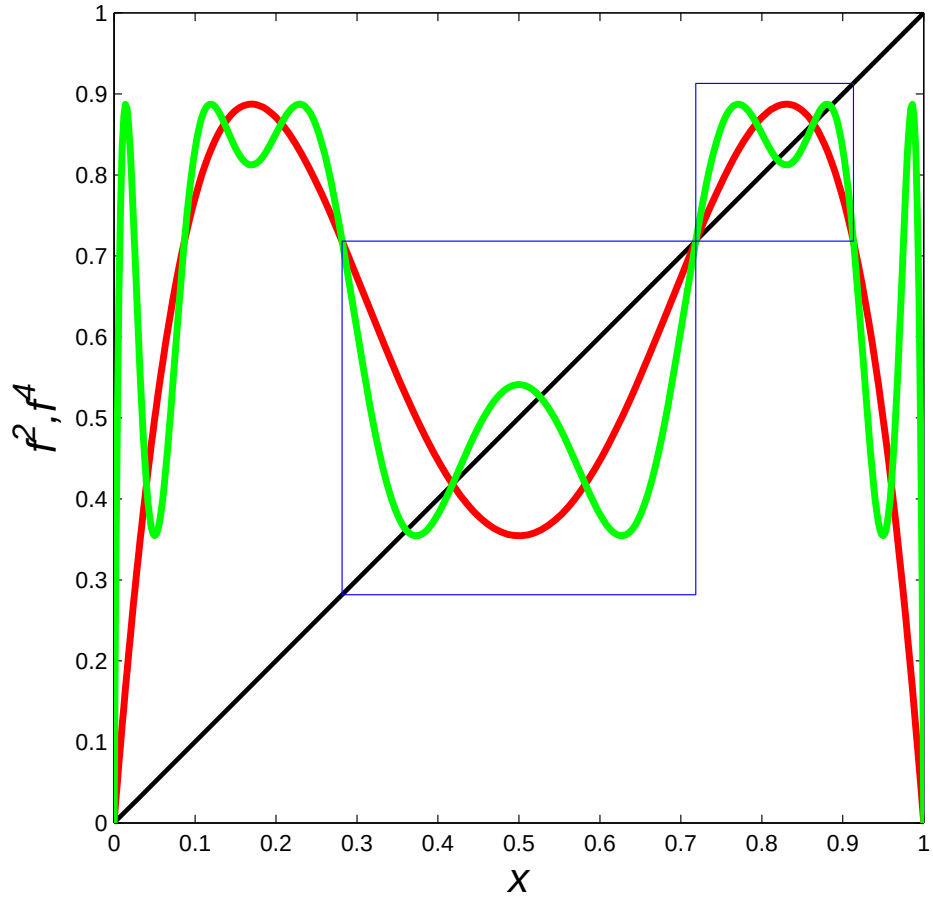
◀ $a = 3.67$ 付近で2周期解が消え，4周期解が現れる．



◀ f^2, f^4 を描くとどうなるか？

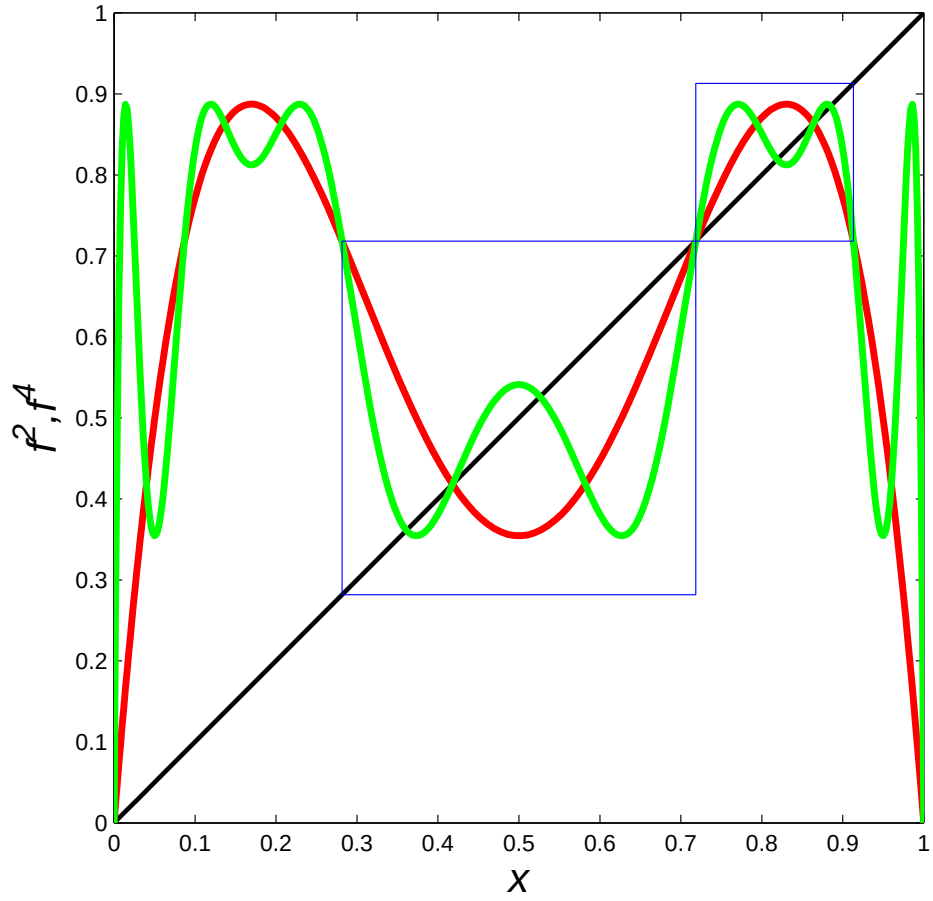
2周期解から4周期解

◀ $f \to f^2$ と類似の関係が，$f^2 \to f^4$ にもある



2周期解から4周期解

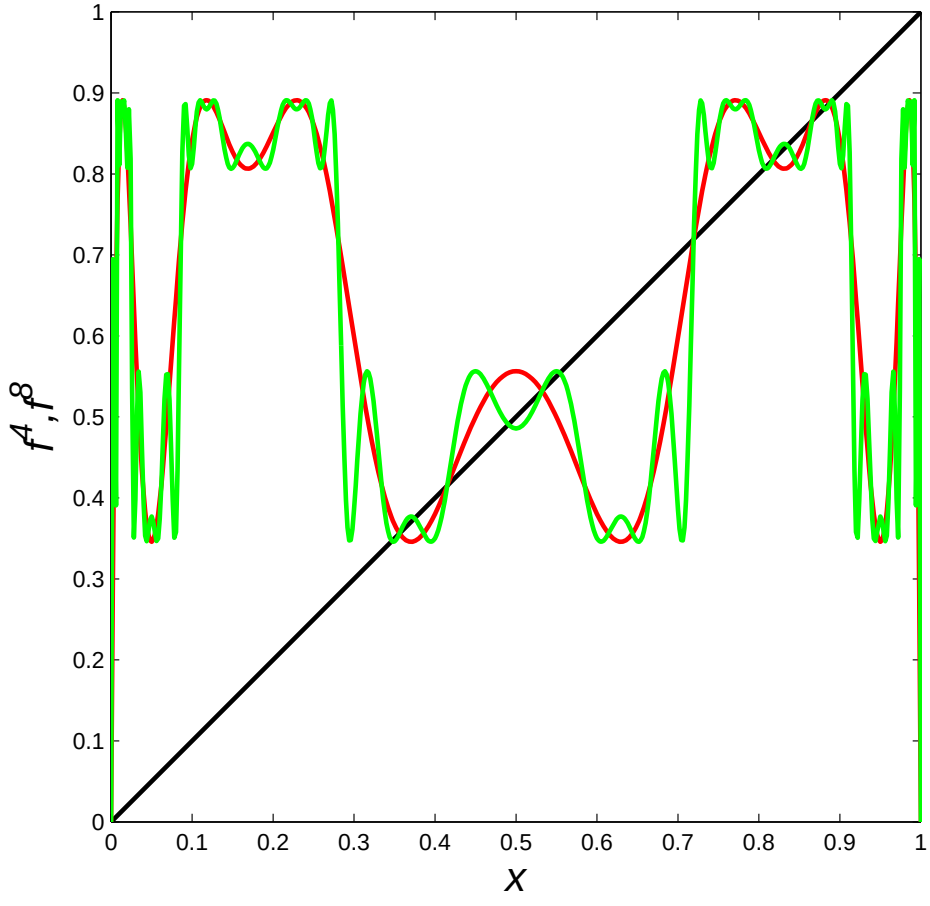
◀ $f \to f^2$ と類似の関係が，$f^2 \to f^4$ にもある



◀ 4周期解から8周期解は?

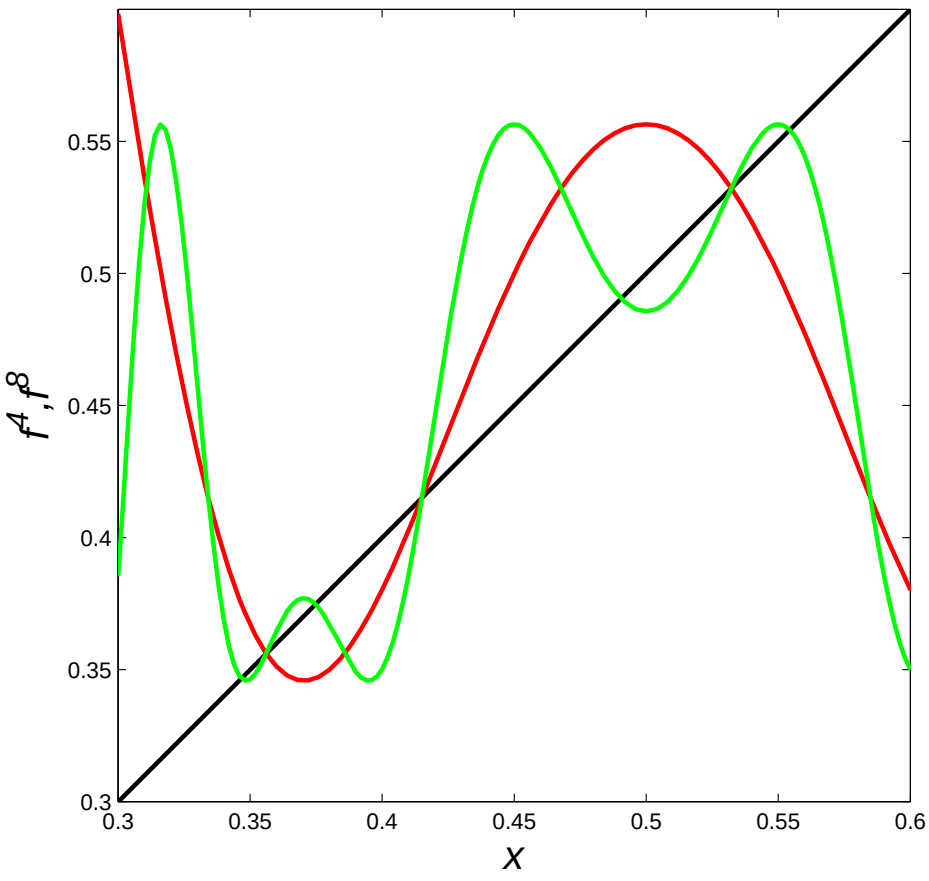
4周期解から8周期解

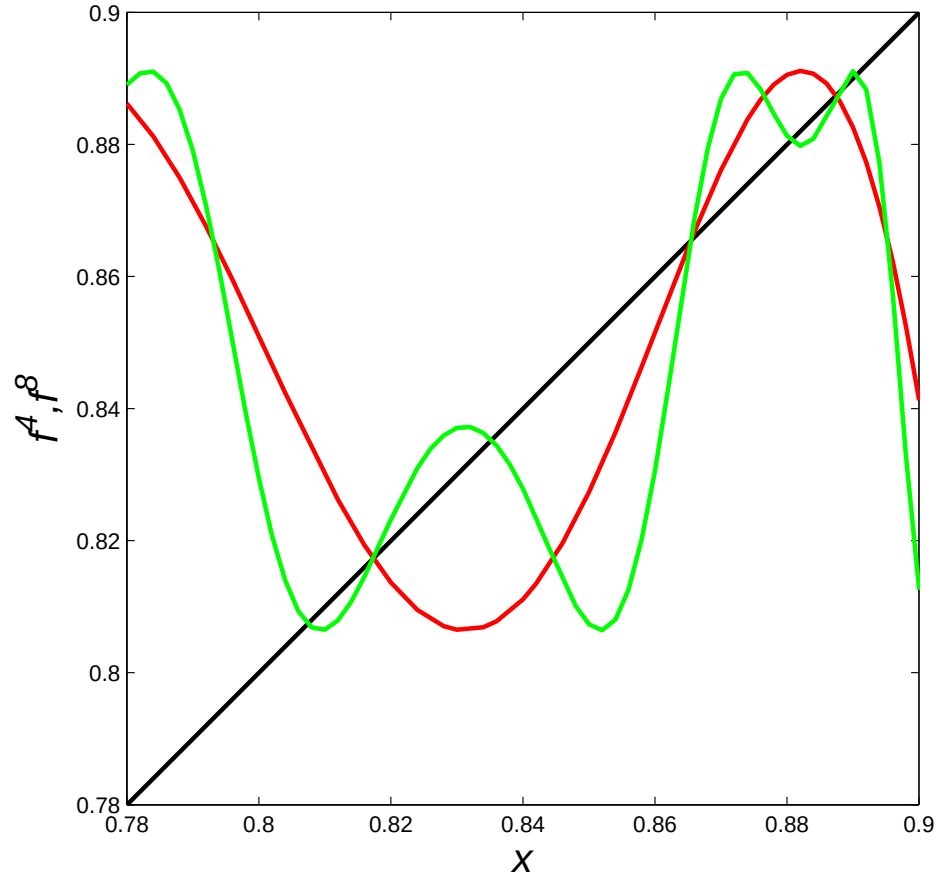
◀ 再び，$f \to f^2$，$f^2 \to f^4$ と類似の関係



4周期解から8周期解

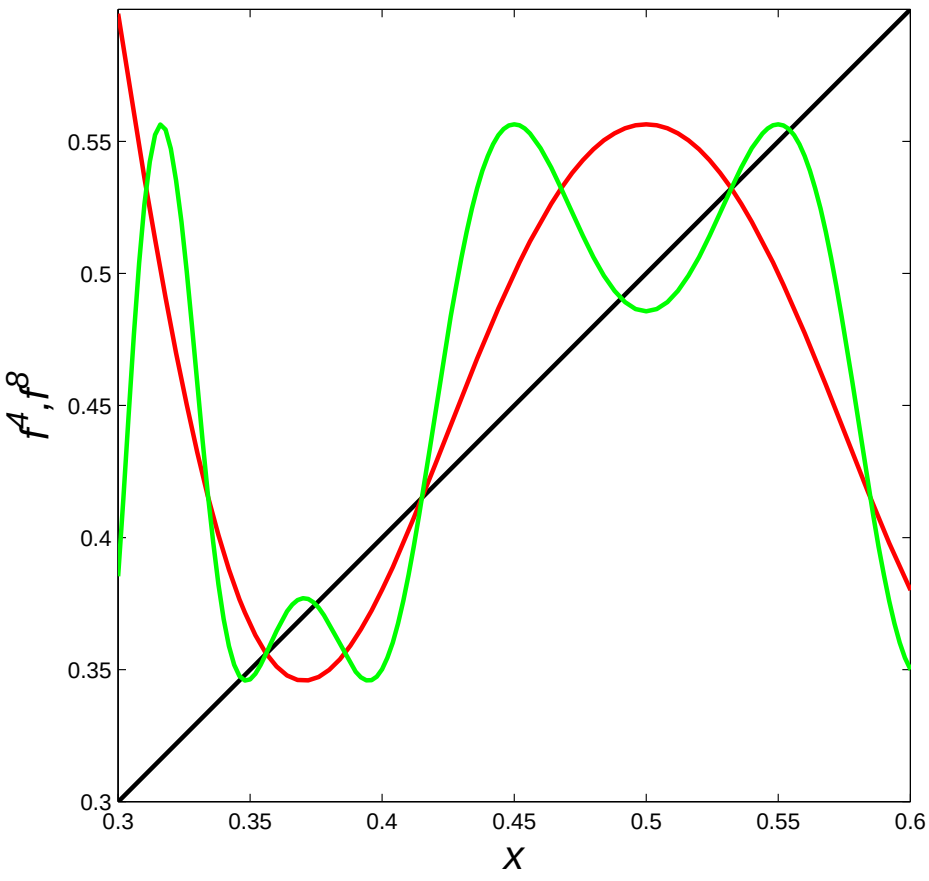
◀ 再び，$f \to f^2$，$f^2 \to f^4$ と類似の関係

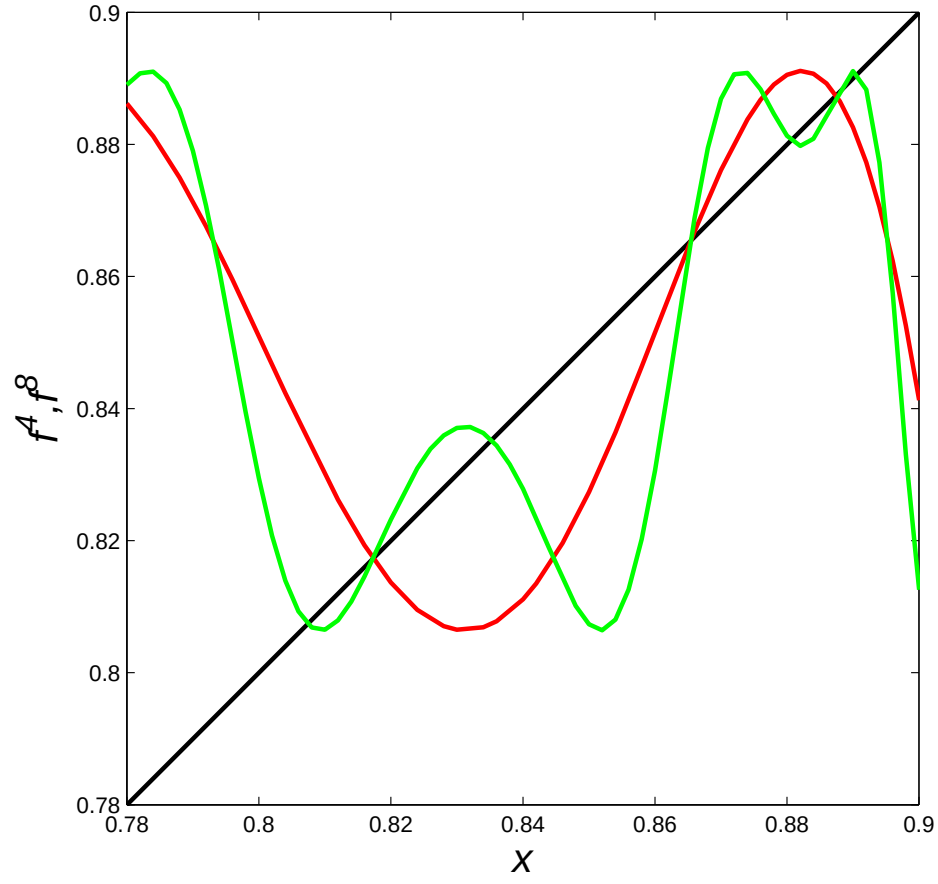




4周期解から8周期解

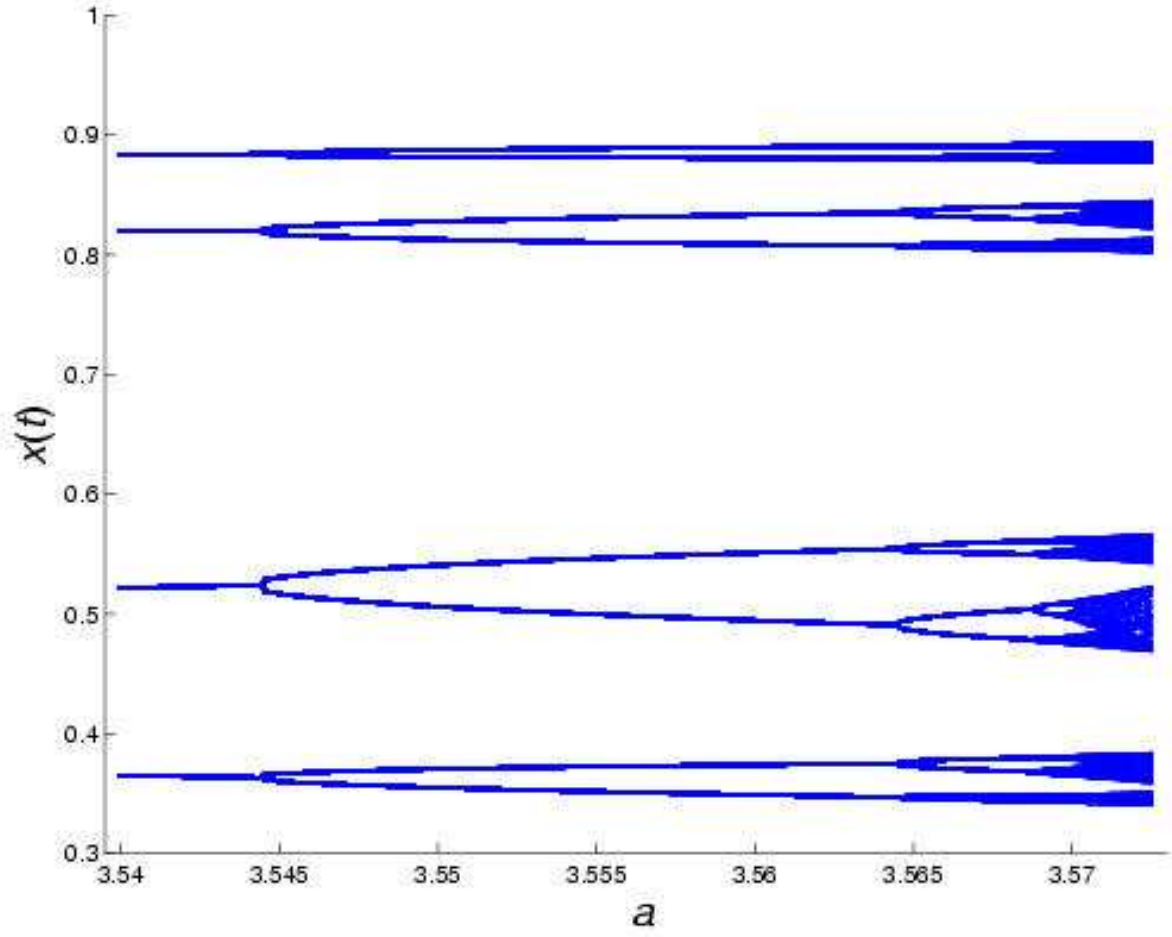
◀ 再び，$f \to f^2$，$f^2 \to f^4$ と類似の関係



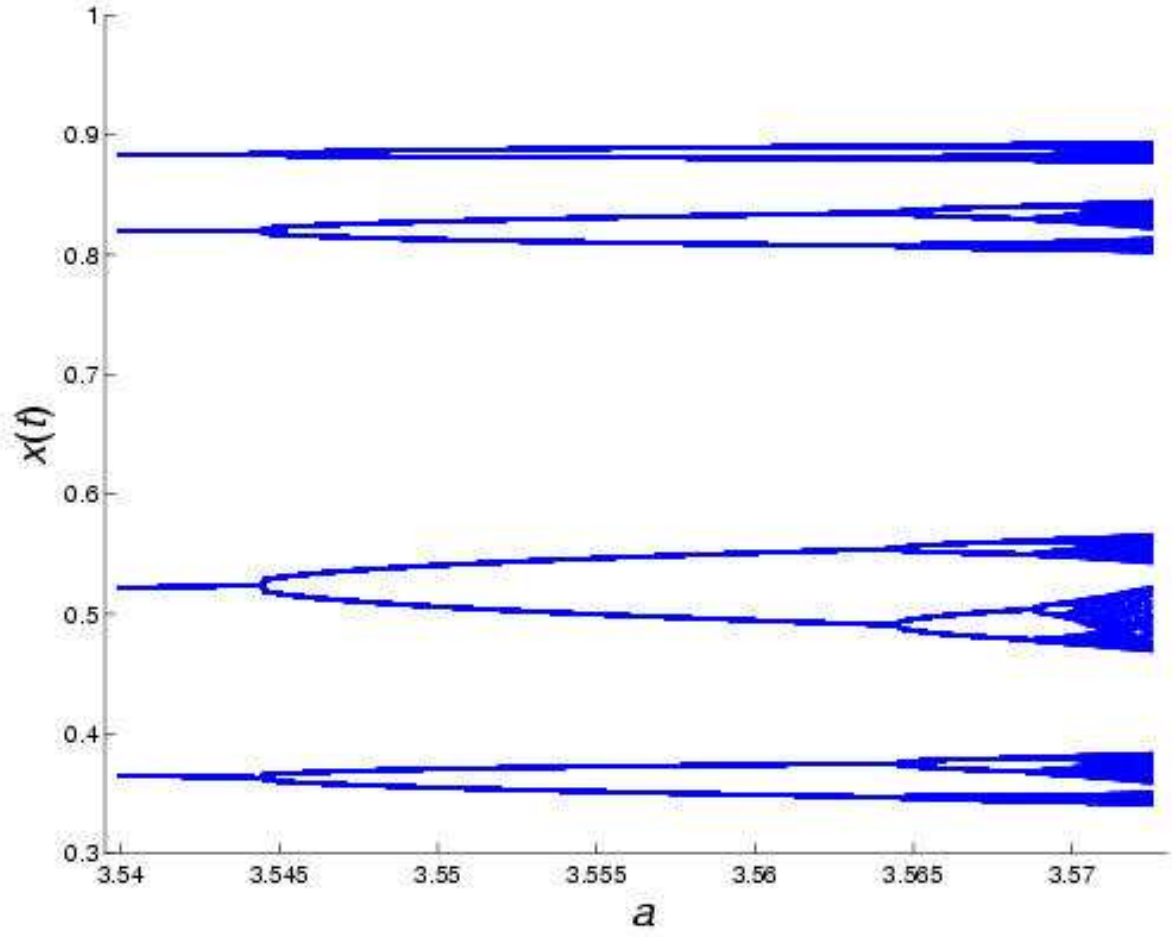


◀ 以降 $(8 \to 16 \to 32 \to \cdots)$ も同様

$2 \to 4 \to 8 \to 16 \to \cdots \to 2^{\infty}$



$2 \to 4 \to 8 \to 16 \to \cdots \to 2^{\infty}$



分岐点 を $a_n : 2^{n-1} \to 2^n$ **とすると...**

ファイゲンバウム定数

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.669201609103$$

◀ **なぜこれが人々を驚かせたか?**

ファイゲンバウム定数

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.669201609103$$

- **なぜこれが人々を驚かせたか?**
- **1 次元写像で求められた定数が，実験系においてもかなりの精度で推定されたため**

↓

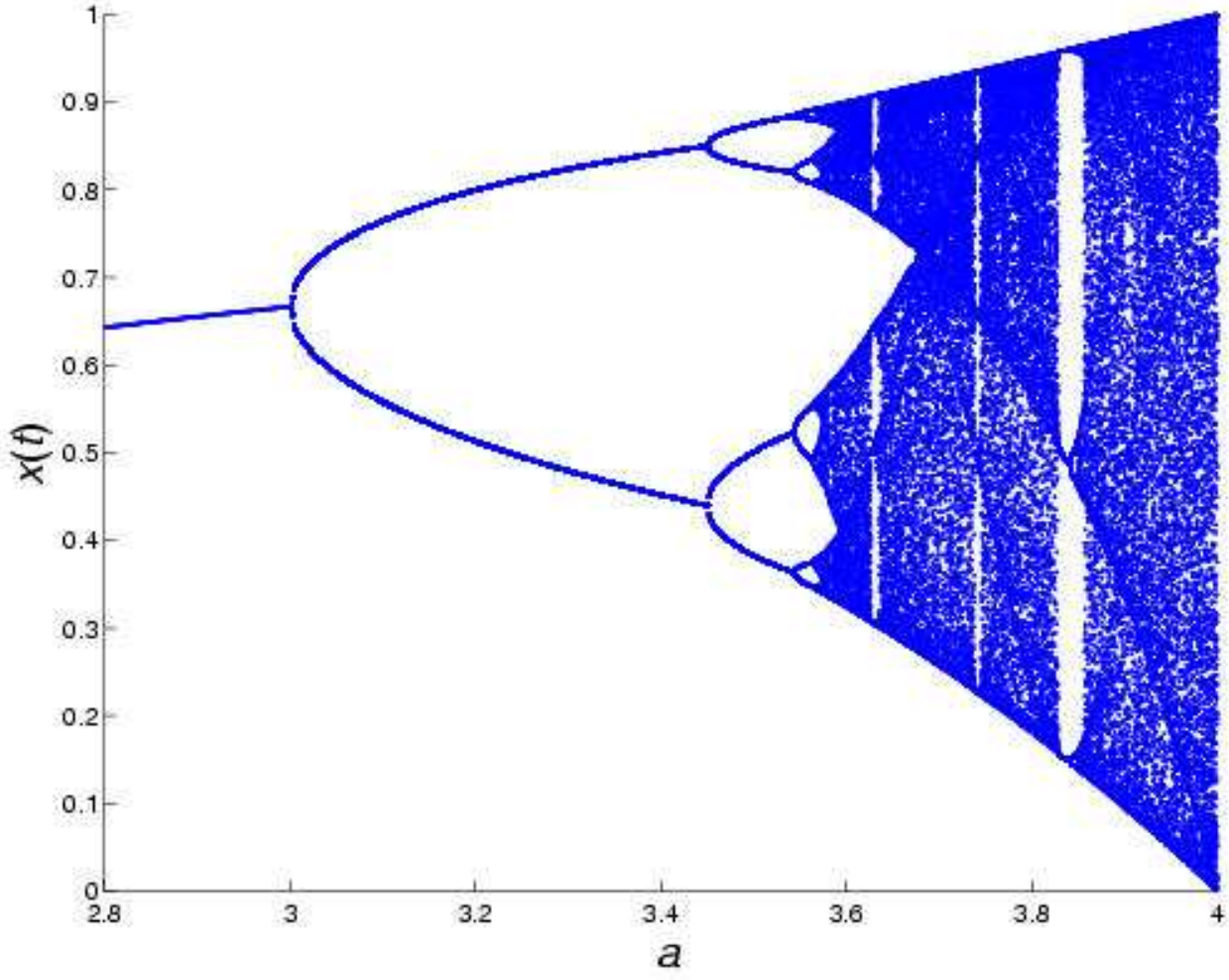
Universality **普遍性**

条件

1. unimodal (**単峰性**) 1 **次元写像**
2. $f''(x) \neq 0$ at peak
3. Schwarz **微分** $S(f) = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 < 0$

3周期の窓

◀ **一番目立つ** (?) **窓** → **周期** 3

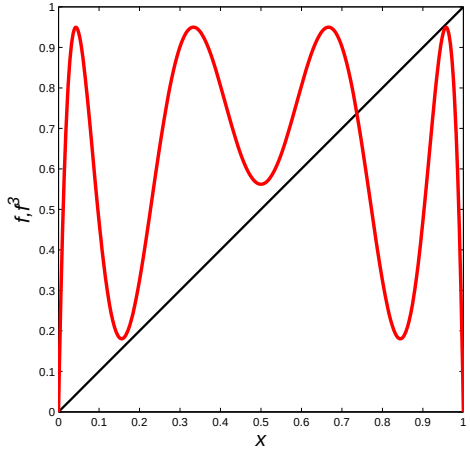


3 周期の窓

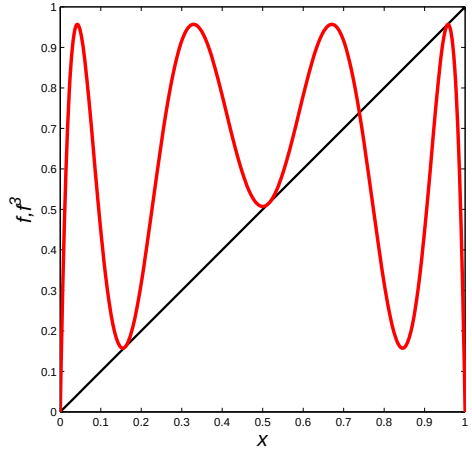
◀ **なぜ，周期 3 の窓が出現するのか** $\Rightarrow$ f_a^3 **を考える**

$$f_a^3(x) = x \Longleftrightarrow x\left(x - 1 + \frac{1}{a}\right)(x \text{ の } 6 \text{ 次式})$$

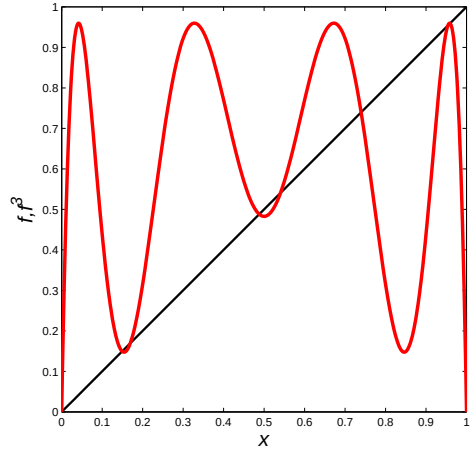
$$\Longleftrightarrow \quad a^2 - 2a - 7 = 0 \Longleftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{8}$$



$a = 3.8$



$a = 1 + \sqrt{8}$



$a = 3.84$

$a = 1 + \sqrt{8}$ 前後

- **各接点では a の増加と共に直線を横切る**
  $a = 3.82, a = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\ldots, a = 3.835$
- **安定な周期解と不安定な周期解がペアで発生**
  $\Longrightarrow$ **接線分岐** (tangent bifurcation)

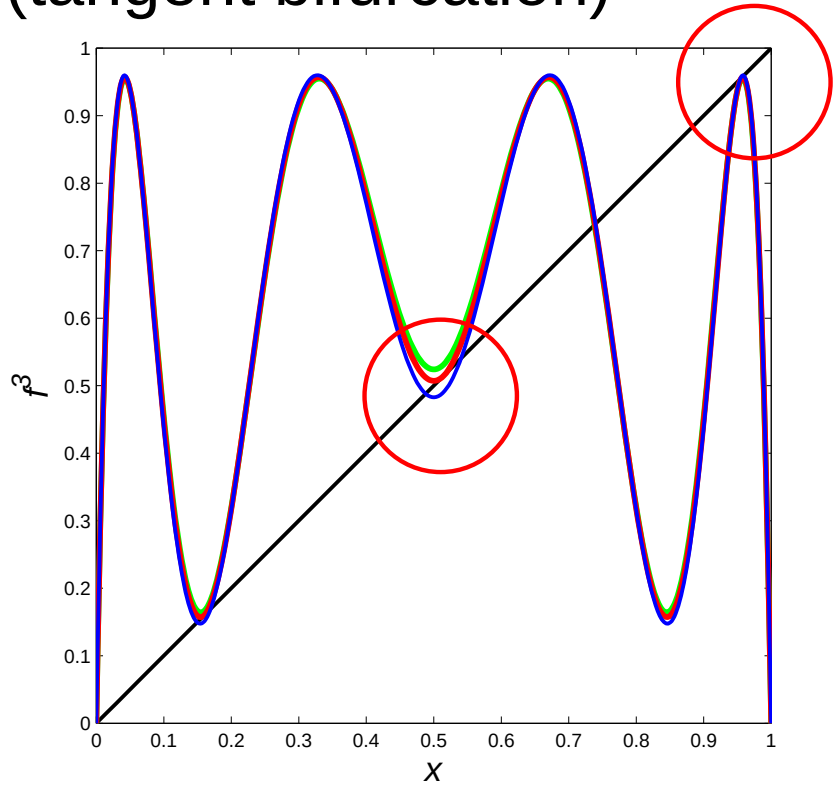
$a = 1 + \sqrt{8}$ 前後

- **各接点では a の増加と共に直線を横切る**

  $a = 3.82$, $a = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\ldots$, $a = 3.835$

- **安定な周期解と不安定な周期解がペアで発生**

  $\Longrightarrow$ **接線分岐** (tangent bifurcation)



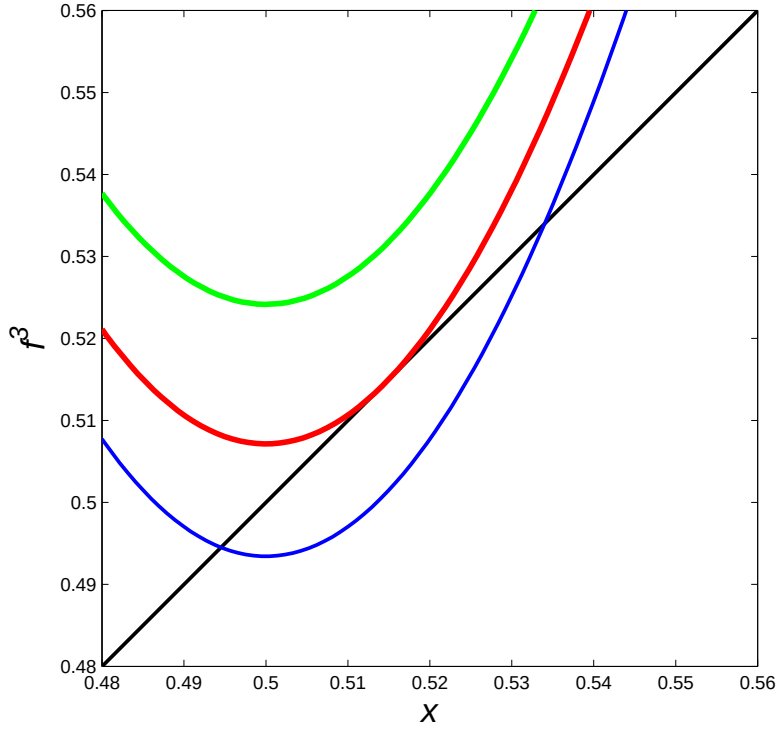
$a = 1 + \sqrt{8}$ 前後

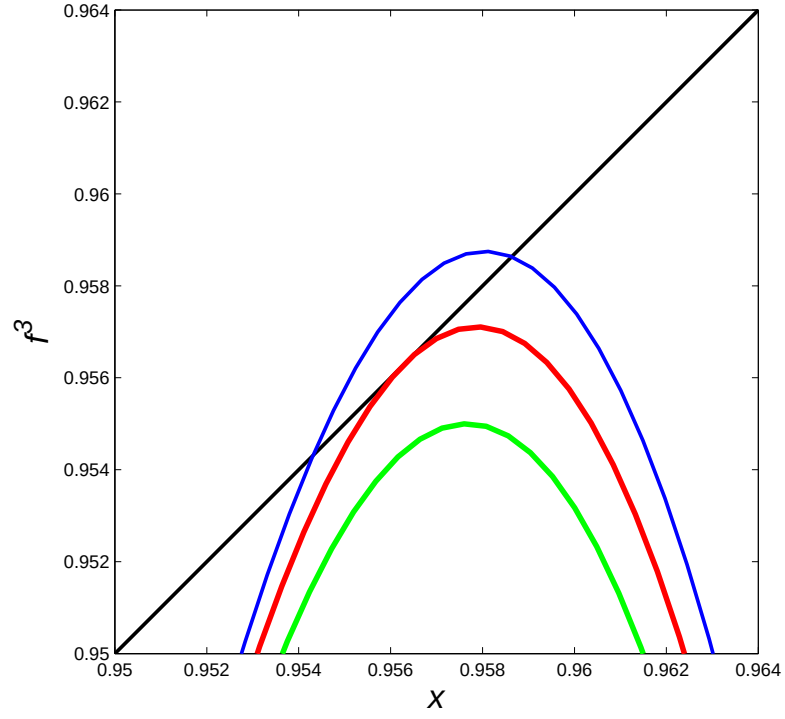
- **各接点では a の増加と共に直線を横切る**

  $a = 3.82, a = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\ldots, a = 3.835$

- **安定な周期解と不安定な周期解がペアで発生**

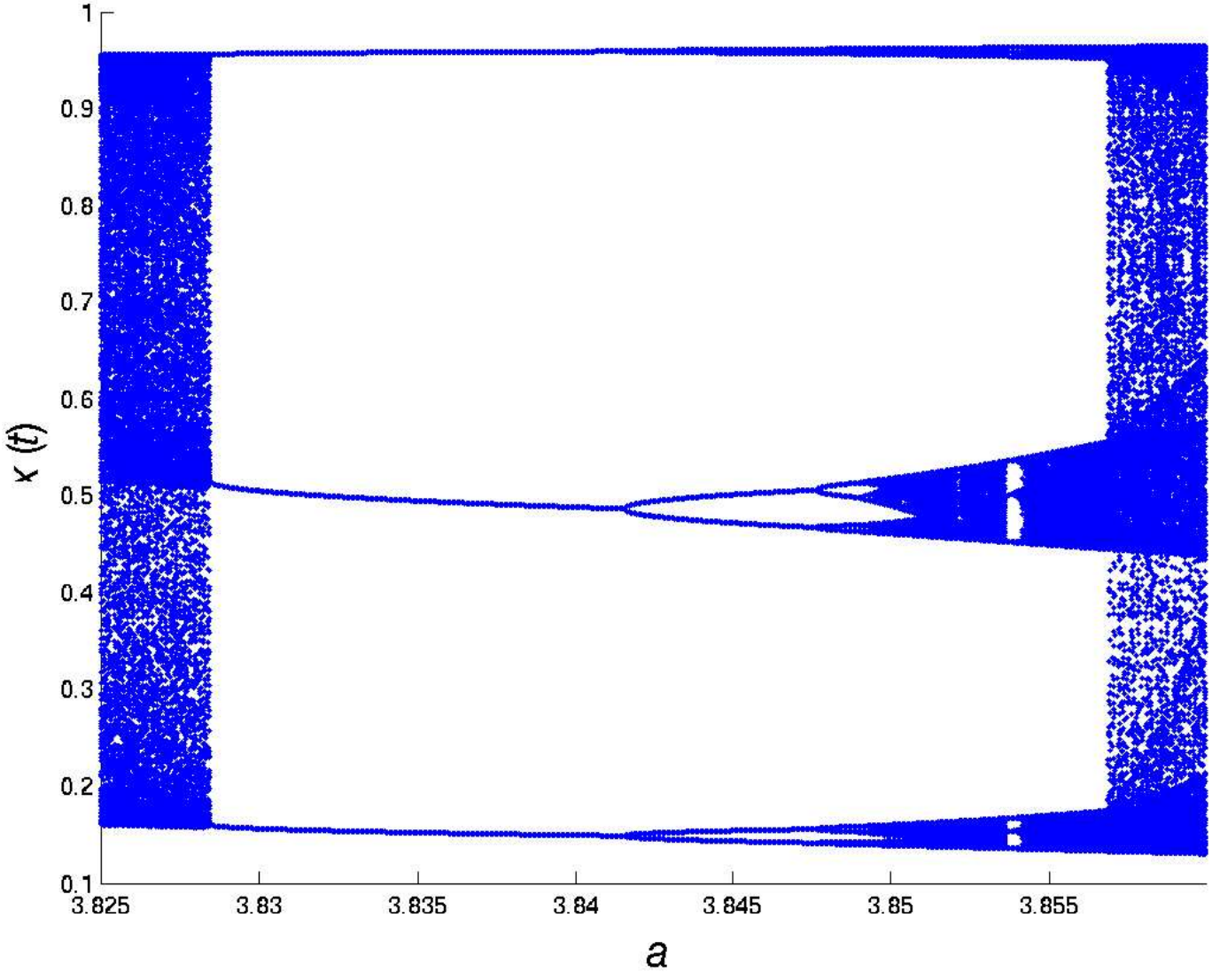
  $\Longrightarrow$ **接線分岐** (tangent bifurcation)





3周期の窓付近

◀ $3 \to 6 \to 12 \to 24 \to \cdots \to 3 \cdot 2^n \cdots \to \infty (n \to \infty)$



接線分岐

- **安定な周期解と不安定な周期解がペアになって生じる**
- **接線分岐** (tangent bifurcation)

  安定な 3 **周期点**
  不安定な 3 **周期点**
  $\Rightarrow$ **周期倍分岐を経てカオス**

- **接線分岐を逆に辿ると間欠性カオス** (intermittency) **が発生**

参考文献

- M. J. Feigenbaum : J. Stat. Phys, **19**(1), 25–32, 1978; **21**(6), 669–766, 1979
- **山口昌哉**: **カオスとフラクタル，ブルーバックス，講談社．**
- **早間 慧 (はやま さとし)**: **カオス力学の基礎 第 2 版，現代数学社．**
- R. L. Devaney: **カオス力学系入門 第 2 版，共立出版．**
- **他**