

連続時間力学系とカオス

非線形システム特論 2004

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048-858-3577, Fax : 048-858-3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru>

力学系とは

- ◀ **ダイナミカルシステム (dynamical system)**
- ◀ **主として, 決定論的な時間発展を有する系**
 1. 微分方程式
 2. 差分方程式
- ◀ **決定論 対 確率論**

力学系の分類

連続 対 離散

差分方程式 (difference equation)

$$x(t+1) = f(x(t))$$

微分方程式 (differential equation)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

時間変数 対 空間変数

常微分方程式 (ordinary differential equation)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

偏微分方程式 (partial differential equation)

有限次元 対 無限次元

常微分方程式 (ordinary differential equation)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

微差分方程式 (delay differential equation)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau))$$

入力 有り 対 無し

自律系 (autonomous system)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

非自律系 (nonautonomous system)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$

→ 入出力システム (Input–Output System)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

連続時間力学系とは

◀ 時間が連続的に変化する .

◀ 定義

$$\frac{dx(t)}{dt} = F_{\mu}(x(t), t)$$

ここで ,

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in \mathbb{R} \\ x(t) \in \mathbb{R}^k \\ F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k \\ \mu \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

自律系と非自律系

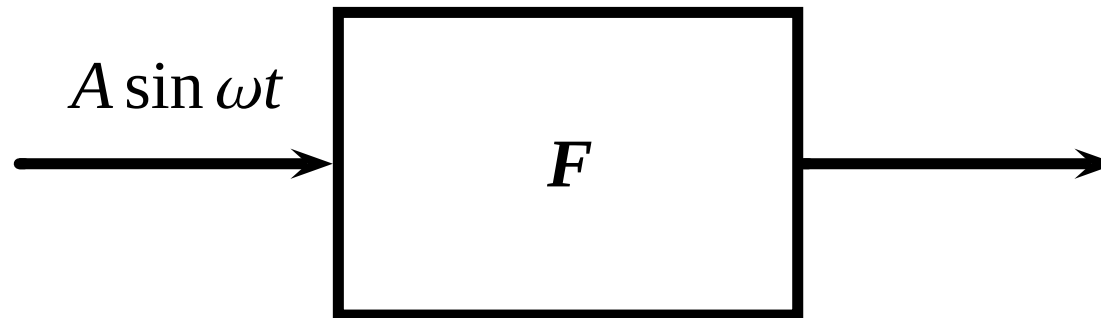
◀ 自律系 F が $x(t)$ のみの関数 .

$$\frac{dx(t)}{dt} = F_{\mu}(x(t))$$

◀ 非自律系 F に 時刻 t が明示的に含まれる .

$$\frac{dx(t)}{dt} = F_{\mu}(x(t), t)$$

◀ 例 : 電気回路における交流電源



いくつかの重要な概念

1. 初期値
2. アトラクタ (attractor)
 - ◀ 平衡点 (equilibrium point)
 - ◀ リミットサイクル (limit cycle)
 - ◀ トーラス (torus)
 - ◀ ストレンジアトラクタ (strange attractor)
3. アトラクタの安定性

平衡点 (equilibrium point)

◀ 定義

$$F(\bar{x}) = \mathbf{0} \iff \frac{d\bar{x}}{dt} = 0$$

を満たす点のこと

◀ 平衡点の安定性

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{x} + \xi(t))}{dt} &= F(\bar{x} + \xi(t)) \approx F(\bar{x}) + DF(\bar{x})\xi(t) \\ \Leftrightarrow \frac{d\xi(t)}{dt} &= DF(\bar{x})\xi(t) \\ DF(\bar{x}) &: \text{ヤコビ行列} \end{aligned}$$

平衡点 (equilibrium point)

◀ 安定な平衡点と不安定な平衡点

□ 漸近安定

$DF(\bar{x})$ の全ての固有値の実数部が負

□ 不安定

$DF(\bar{x})$ の固有値に実数部が正のものがある

ローレンツ方程式

◀ 定義

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

例えば, $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$

◀ 解の振る舞いは複雑

◀ 初期値 $(x(0), y(0), z(0))$ を変えても, 同じ集合に漸近的に近づくとき, この集合をアトラクタという

力学系のアトラクタ

1. 力学系

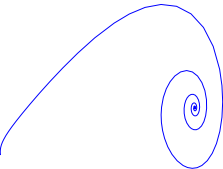
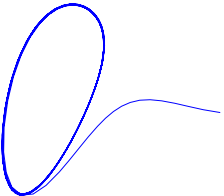
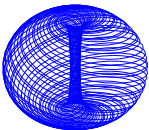
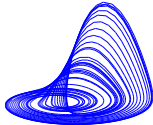
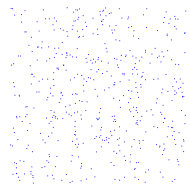
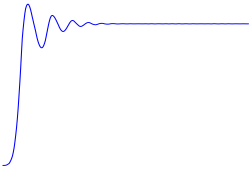
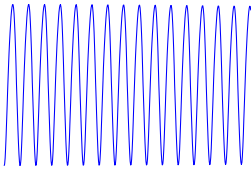
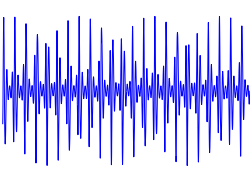
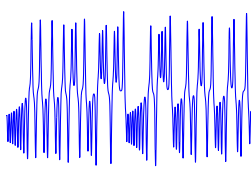
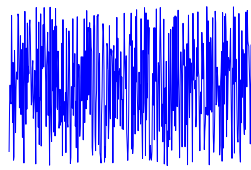
$$\frac{dx(t)}{dt} = F_{\mu}(x(t)), x(t) \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}$$

に対し初期値 $x(0)$ を与える．十分時間が経過した後の N 次元状態空間内での $x(t)$ の漸近的振る舞い．

2. 分類

- (a) 平衡点 (equilibrium point) (cf. 固定点)
- (b) リミットサイクル (limit cycle)
- (c) トーラス (torus)
- (d) ストレンジアトラクタ (strange attractor) = カオス

力学系のアトラクタ

	平衡点	リミットサイクル	k トーラス	ストレンジアトラクタ	ランダム
状態空間					
振舞	平衡状態	周期	準周期	カオス	ノイジー
構造	点	閉曲線 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$ ($k \geq 2$)	フラクタル	無構造
次元	0	1	k	非整数	状態空間 d
リアプノフ スペクトラム	$\lambda_i < 0$ ($i=1, \dots, d$)	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_i < 0$ ($i=2, \dots, d$)	$\lambda_i = 0$ ($i=1, \dots, k$) $\lambda_i < 0$ ($i=k+1, \dots, d$)	$\lambda_i > 0$ ($i=1, \dots, m-1$) $\lambda_m = 0$ $\lambda_i < 0$ ($i=m+1, \dots, d$)	
波形					

ローレンツ方程式

◀ 定義

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

例えば, $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$

◀ 解の振る舞いは複雑

◀ 初期値 $(x(0), y(0), z(0))$ を変えても, 同じ集合に漸近的に近づくとき, この集合をアトラクタという

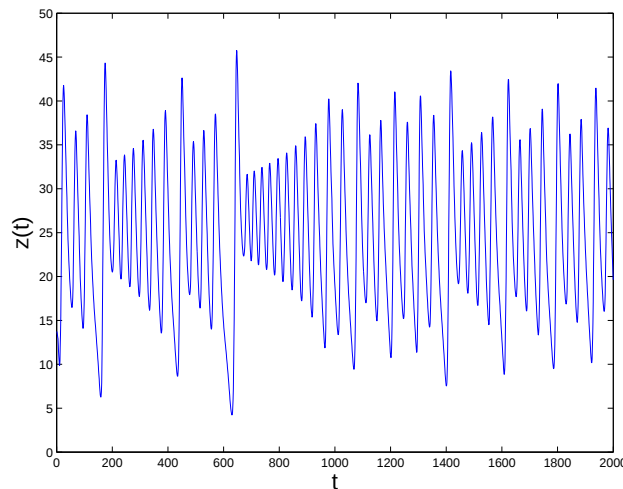
👉 デモンストレーションを見てみよう.

ローレンツ方程式と1次元写像

- ◀ ローレンツ方程式の第3変数 ($z(t)$) に着目
- ◀ n 番目の極大値 Z_n を抽出 $\Rightarrow Z_n$ と Z_{n+1} の関係

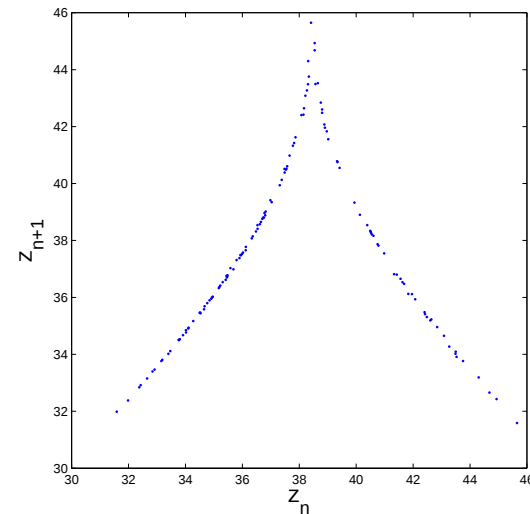
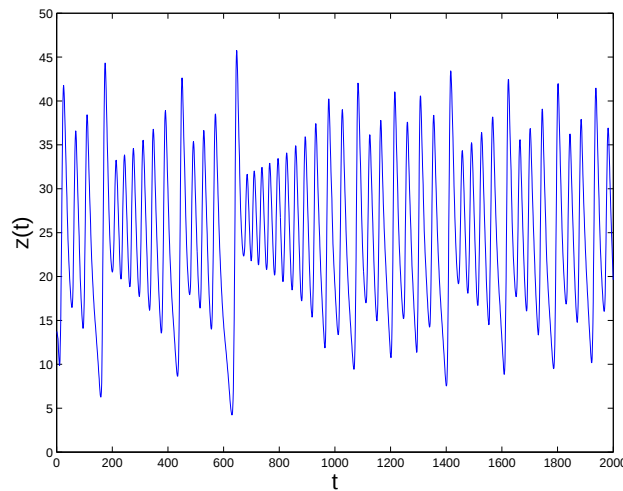
ローレンツ方程式と1次元写像

- ◀ ローレンツ方程式の第3変数 ($z(t)$) に着目
- ◀ n 番目の極大値 Z_n を抽出 $\Rightarrow Z_n$ と Z_{n+1} の関係



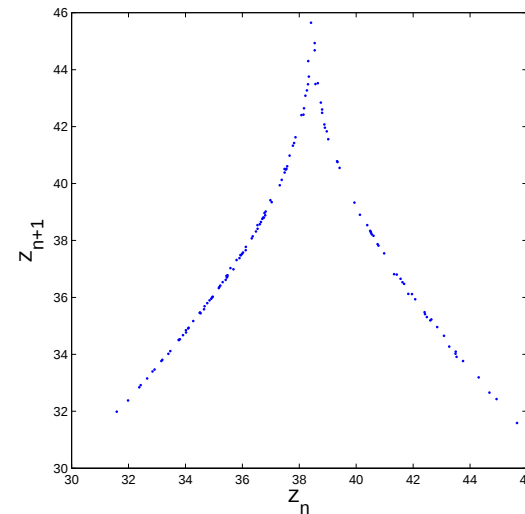
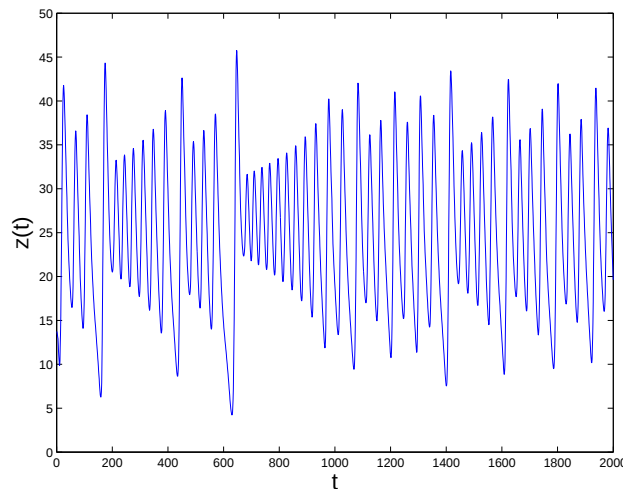
ローレンツ方程式と1次元写像

- ◀ ローレンツ方程式の第3変数 ($z(t)$) に着目
- ◀ n 番目の極大値 Z_n を抽出 $\Rightarrow Z_n$ と Z_{n+1} の関係



ローレンツ方程式と1次元写像

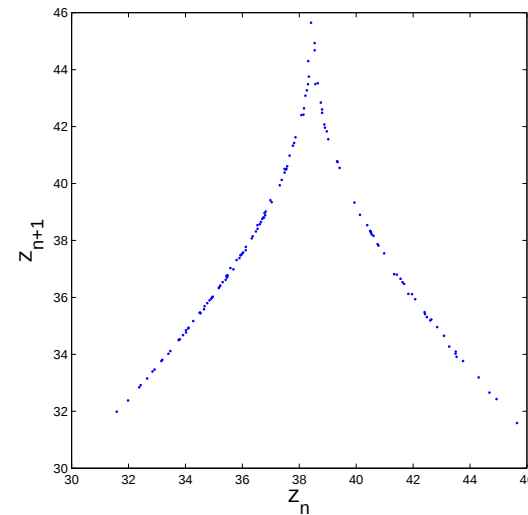
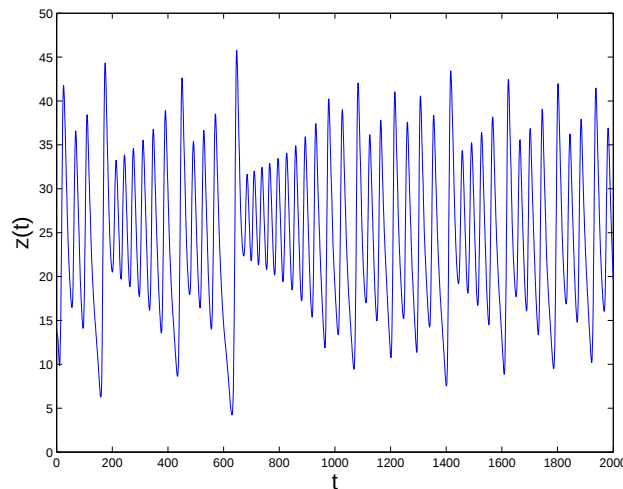
- ◀ ローレンツ方程式の第3変数 ($z(t)$) に着目
- ◀ n 番目の極大値 Z_n を抽出 $\Rightarrow Z_n$ と Z_{n+1} の関係



- ◀ テント写像と類似の構造

ローレンツ方程式と1次元写像

- ◀ ローレンツ方程式の第3変数 ($z(t)$) に着目
- ◀ n 番目の極大値 Z_n を抽出 $\Rightarrow Z_n$ と Z_{n+1} の関係



- ◀ テント写像と類似の構造
- ◀ ローレンツプロット $\Rightarrow$ 一種のポアンカレセクション

ポアンカレセクション (切断面)

- ◀ N 次元連続時間力学系と $N - 1$ 次元離散時間力学系を結び付ける
- ◀ N 次元状態空間内の解軌道と横断的に交わる $(N - 1)$ 次元のなめらかな多様体 (= ポアンカレ切断面 Σ) を考える
- ◀ Σ 上の微分同相写像 = ポアンカレ写像
- ◀ ポアンカレ写像 P と連続時間力学系の解との関係

$$P(x) = \phi(x, \tau(x))$$

- ◀ リミットサイクル $\Leftrightarrow$ ポアンカレ写像の不動点

$$P(x_0) = x_0$$

- ◀ トーラス $\Leftrightarrow$ ポアンカレ断面上のある閉曲線を稠密に埋める

レスラー方程式 (O. Rössler, 1971)

◀ 定義

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

例えば , $a = 0.398, b = 2, c = 4$

◀ 非線形項は?

レスラー方程式 (O. Rössler, 1971)

◀ 定義

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + x \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$

例えば, $a = 0.398, b = 2, c = 4$

◀ 非線形項は? $\Rightarrow$ 第3式 zx のみ!

ダフティング方程式

◀ 定義

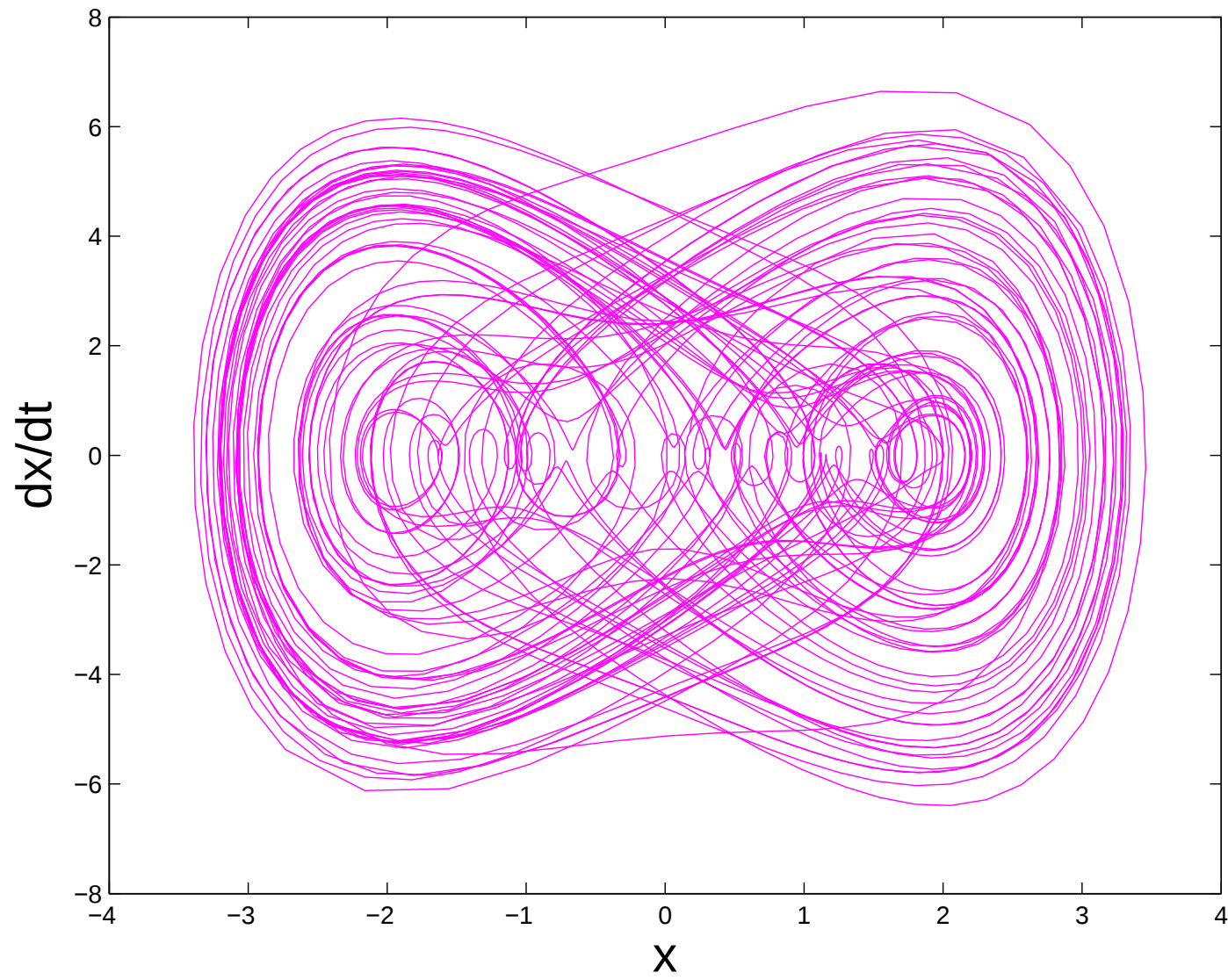
$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 = B \cos \omega t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -ky - x^3 + B \cos \omega t \end{cases}$$

例えば, $k = 0.05, B = 7.5$

- ◀ m 階 1 変数常微分方程式 $\Leftrightarrow m$ 変数 1 階連立常微分方程式
- ◀ 日本におけるカオスの発見 → アナログコンピュータによるシミュレーション
- ◀ ジャパニーズアトラクタ (D. Ruelle)

ダフティング方程式



ホジキン・ハクスレイ方程式

◀ ヤリイカ巨大軸索の電気生理学的特性を再現

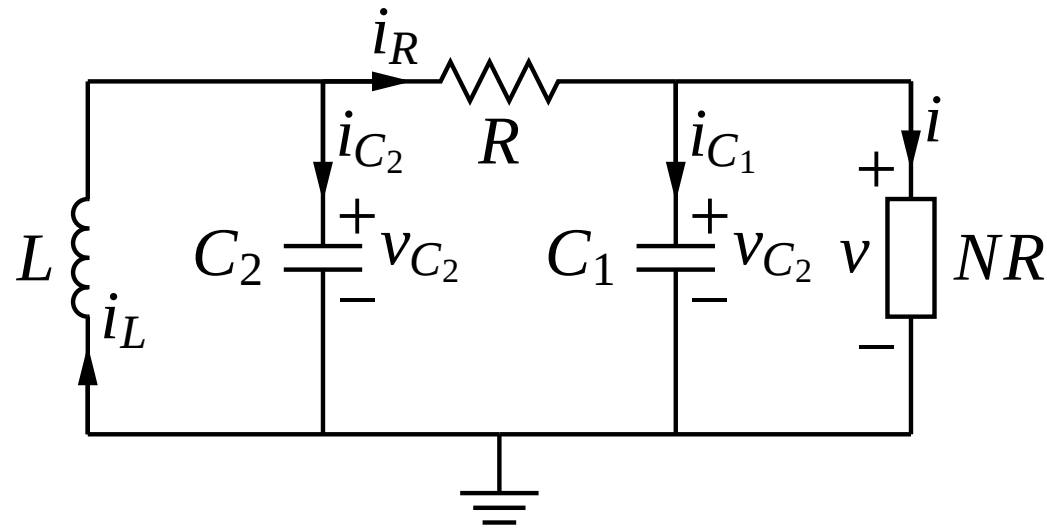
$$\left\{ \begin{array}{l} C \frac{dV}{dt} = I - \bar{g}_{\text{Na}} m^3 h (V - V_{\text{Na}}) - \bar{g}_{\text{K}} n^4 (V - V_{\text{K}}) - g_{\text{L}} (V - V_{\text{L}}) \\ \frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \end{array} \right.$$

$$\bar{g}_{\text{Na}} = 120.0, \bar{g}_{\text{K}} = 36, g_{\text{L}} = 0.24,$$

$$V_{\text{Na}} = +55, V_{\text{K}} = -72, V_{\text{L}} = -49.387$$

$$I = I_0 + A \sin 2\pi f t$$

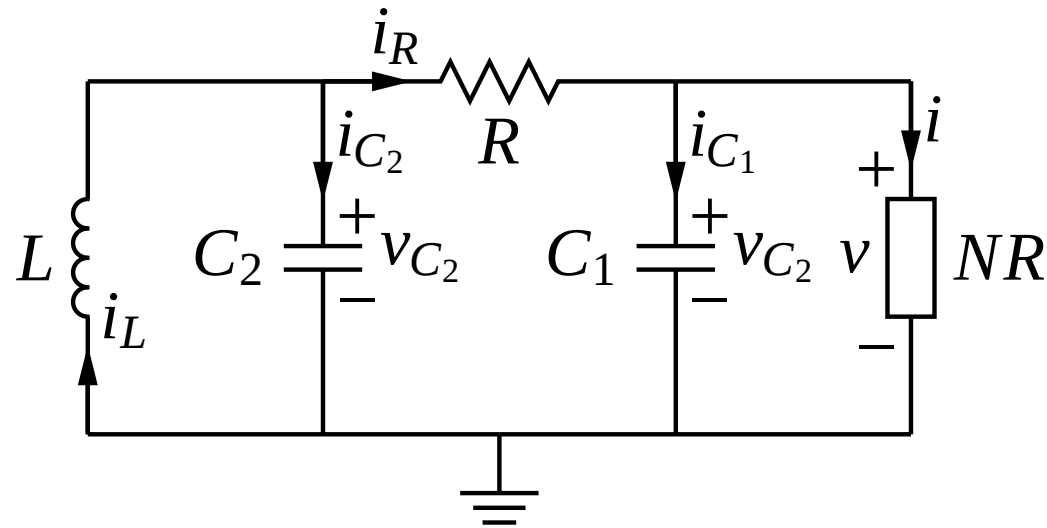
Chua 回路



$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} &= G(v_{c_2} - v_{c_1}) - g(v_{c_1}) \\ C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} &= G(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{c_2} \end{cases}$$

但し , $i = g(v) = m_0 v + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)|v + B_p| + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)|v - B_p|$

Chua 回路



$$\begin{cases} C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} &= G(v_{c_2} - v_{c_1}) - g(v_{c_1}) \\ C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt} &= G(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \\ L \frac{di_L}{dt} &= -v_{c_2} \end{cases}$$

但し , $i = g(v) = m_0 v + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)|v + B_p| + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)|v - B_p|$

$i - g(v)$ 特性

$$i = g(v) = m_0 v + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)|v + B_p| + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)|v - B_p|$$

1. $B_p \leq v$ ($v - B_p \geq 0$)

$$\begin{aligned} g(v) &= m_0 v + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(v + B_p) + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(v - B_p) \\ &= m_0 v + (m_1 - m_0)B_p \end{aligned}$$

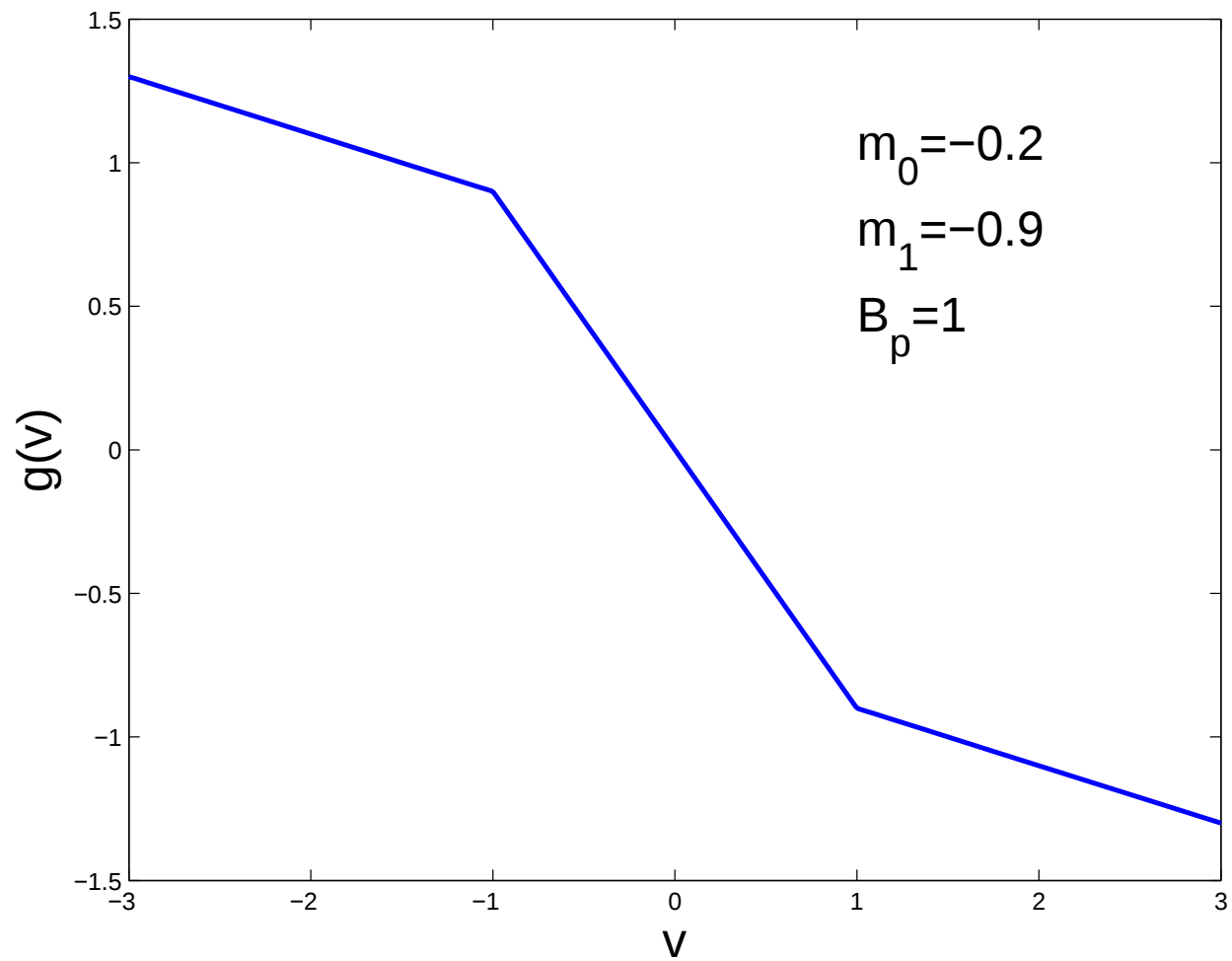
2. $-B_p \leq v \leq B_p$ ($v - B_p \leq 0, v + B_p \geq 0$)

$$\begin{aligned} g(v) &= m_0 v + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(v + B_p) - \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(v - B_p) \\ &= m_0 v + (m_1 - m_0)v = m_1 v \end{aligned}$$

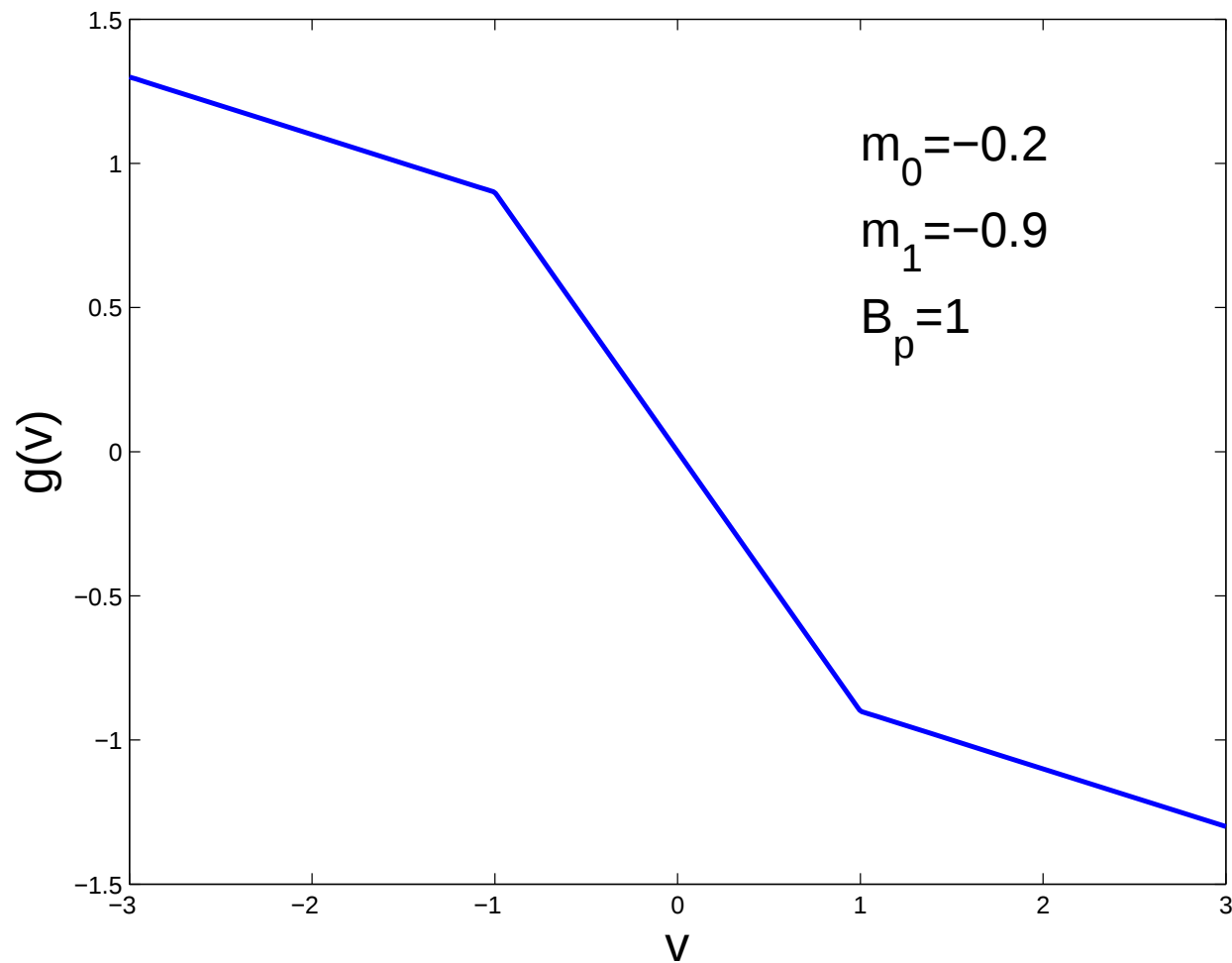
3. $v \leq -B_p$ ($v + B_p \leq 0$) $-B_p \leq v \leq B_p$

$$\begin{aligned} g(v) &= m_0 v - \frac{1}{2}(m_1 - m_0)(v + B_p) - \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(v - B_p) \\ &= m_0 v - (m_1 - m_0)B_p \end{aligned}$$

$i - g(v)$ 特性



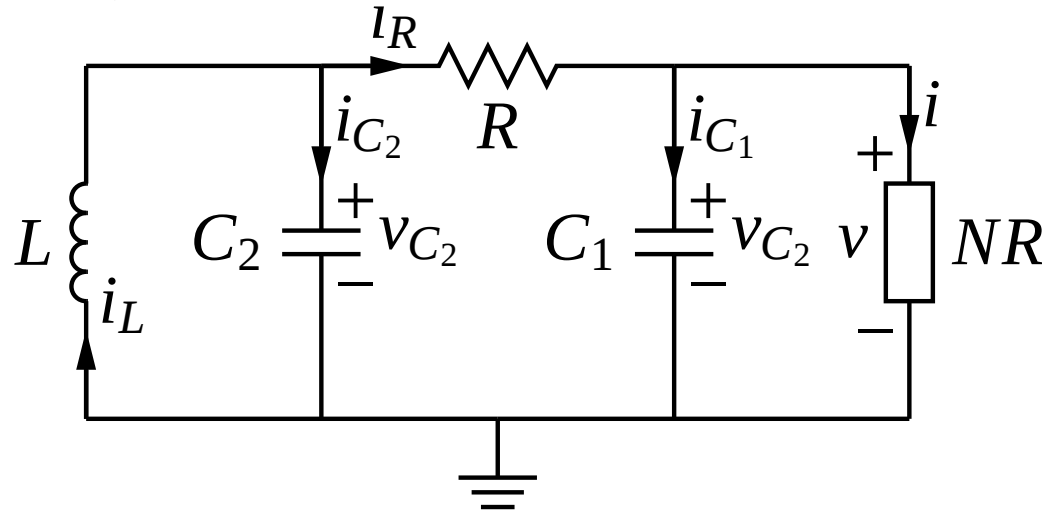
$i - g(v)$ 特性



⇒ 区分線形特性 = 非線形！

ダブルスクロールアトラクタ

- ◀ 松本隆 (早稲田大学) , Leon Chua (UC Berkeley) ら
- ◀ Chua 回路 (非線形抵抗を含む電気回路) から生成されるストレンジアトラクタの一つ



- ◀ カオスへ至るルート (周期倍分岐) などをオシロスコープで観測可能

✌ デモンストレーションを見てみよう.

Chen 方程式

◀ Guanron Chen ら

$$\begin{cases} dx/dt = a(y - x) \\ dy/dt = (c - a)x - xz + cy \\ dz/dt = xy - bz \end{cases}$$

例えば, $a = 35, b = 3, c = 28$

👉 参考 – ローレンツ方程式

$$\begin{cases} dx/dt = -\sigma x + \sigma y = \sigma(y - z) \\ dy/dt = -xz + rx - y = rx - xz - y \\ dz/dt = xy - bz \end{cases}$$

例えば, $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$

✌ デモンストレーションを見てみよう.

微差分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t), x(t - \tau))$$

◀ マッケイ・グラス方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{ax(t - L)}{1 + x(t - L)^c} - bx(t)$$

例えば, パラメータ $a =, b =, c$

◀ 遅延 $\Rightarrow$ 無限次元系

- k 次元常微分方程式 $\rightarrow$ 時刻 t での状態決定には k 次元の情報が必要
- 微差分方程式 $\rightarrow s - L < t < s$ とすると遅延 L 分の無限の情報が必要

参考文献

◀ 微分方程式の数値解法

三井，小藤，齋藤: “微分方程式による計算機科学入門,” 共立出版株式会社, 2004.

◀ ローレンツアトラクタの存在

- ❑ Ian Stewart: “The Lorenz attractor exists,” Nature, Vol.406, pp.948–949, 31 August 2000.
- ❑ Warwick Tucker: “The Lorenz attractor exists,” C. R. Acad. Sci. Paris, Vol.328, pp. 1197–1202, 1999.
- ❑ Marcelo Viana: “What’s new on Lorenz strange attractors?” Mathematical Intelligencer, Vol.22, pp.6–19, 2000.