非線形システム特論

イントロダクション/カオスとは

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338–8570 **さいたま市 桜区 下大久保** 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru

講義の担当

- **池口徹**
- **大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻**
  (大学院 理工学研究科 情報システム工学専攻)
  (工学部 情報システム工学科)
- Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp
- URL http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru/
- Tel 048–858–3577 Ext 4752
- **居室**
  総合研究棟 506 **室** (or 505 **室**)

- **オフィスアワー**
  随時.

講義概要

20 世紀の科学における 3 大発見の一つとされる決定論的カオスを話題の中心に取り上げる．カオスを産み出すカラクリとして最も重要なものがシステムの非線形性であるが，自然界に存在する種々のシステムの本質は非線形性にある．即ち，この世界に存在する自然現象を理解し，それを工学的に応用するためには，非線形性の理解が重要となる．

この講義では，非線形システムの数理構造を理解するための基礎理論として，非線形ダイナミクスとカオス理論を中心に，それらと予測，計算理論との関連を講義する．また，これらの理論に関する工学応用についても，最新の研究成果を随時紹介する．

講義内容

1. **はじめに (カオスとは，歴史)**
2. **離散時間力学系とカオス**
3. **連続時間力学系とカオス**
4. **カオスと分岐**
5. **カオスの特徴 - カオスの数理構造 -**
6. **ニューラルシステムにおけるカオス**
7. **カオスと組み合わせ最適化**
8. **カオスと時系列解析**

教科書と参考書

- **教科書**
  合原一幸: **「カオス学入門」，放送大学印刷教材** (2001).
- **参考書**
  講義中，サポートページ (後述) 等を通じて紹介．

講義形態，展開，評価

- **殆んど通常の講義**
- **休講情報を含む最新の授業計画は，担当者講義サポートページ** (http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru/Lectures) **で連絡する．**
- **評価**
  1. **数回の宿題**
  2. **期末レポート**
  3. **期末レポート提出時の口頭試問**

講義形態，展開，評価

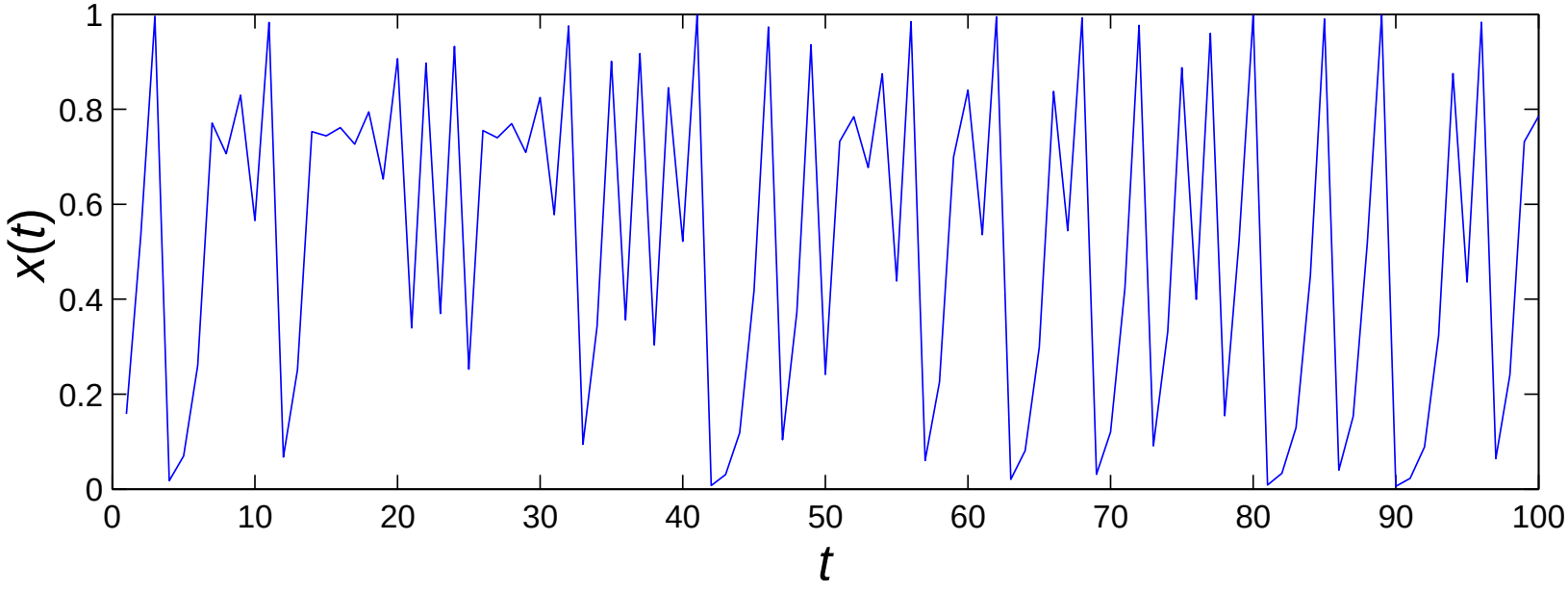
- **殆んど通常の講義**
- **休講情報を含む最新の授業計画は，担当者講義サポートページ** (http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru/Lectures) **で連絡する．**
- **評価**
  1. **数回の宿題**
  2. **期末レポート**
  3. **期末レポート提出時の口頭試問**

以上がイントロダクション．
何か質問は？

それでは，早速講義に入ろう！

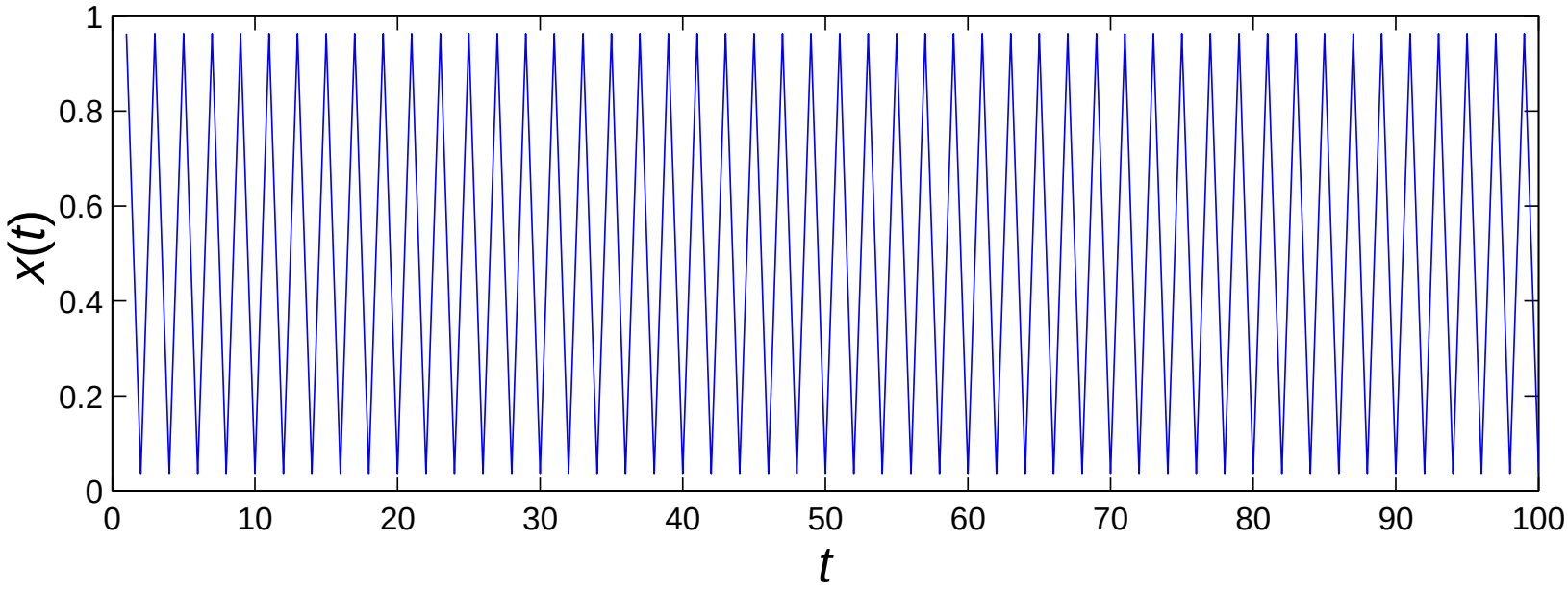
不規則さを生み出す規則

不規則さを生み出す規則



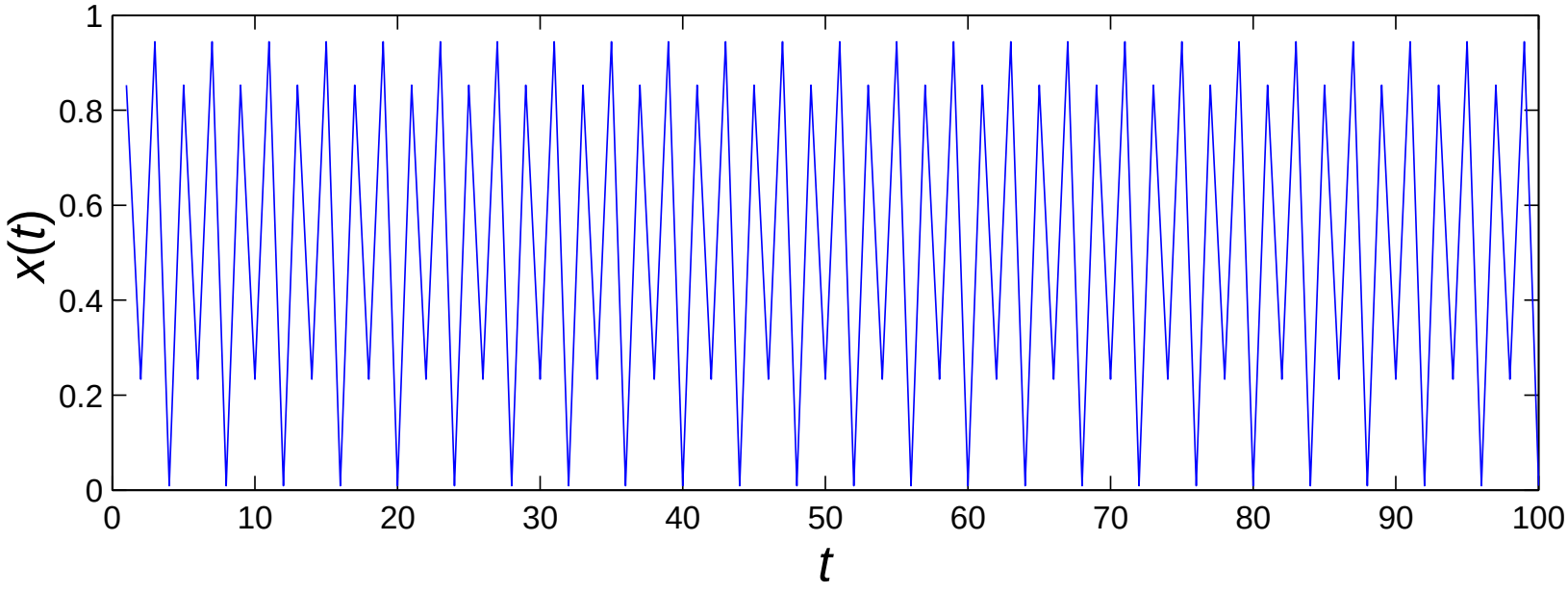
不規則に変動する時間波形

不規則さを生み出す規則



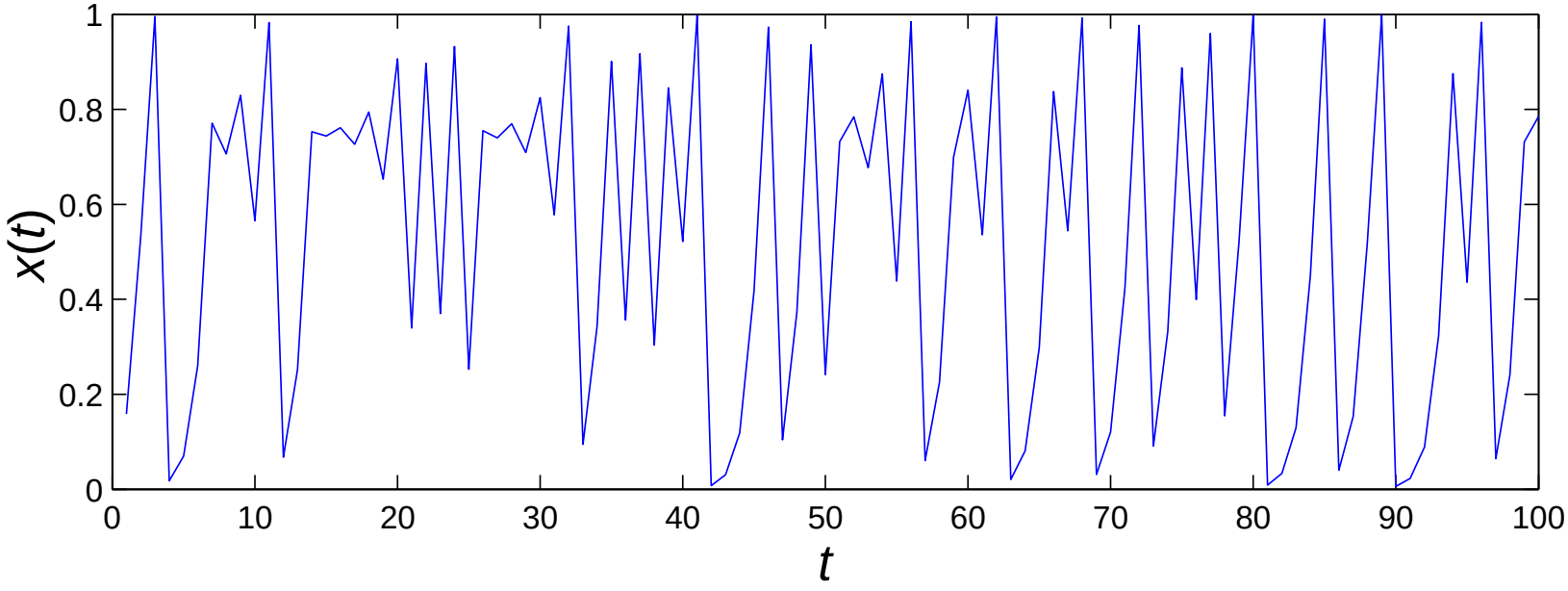
周期的に変動する時間波形

不規則さを生み出す規則



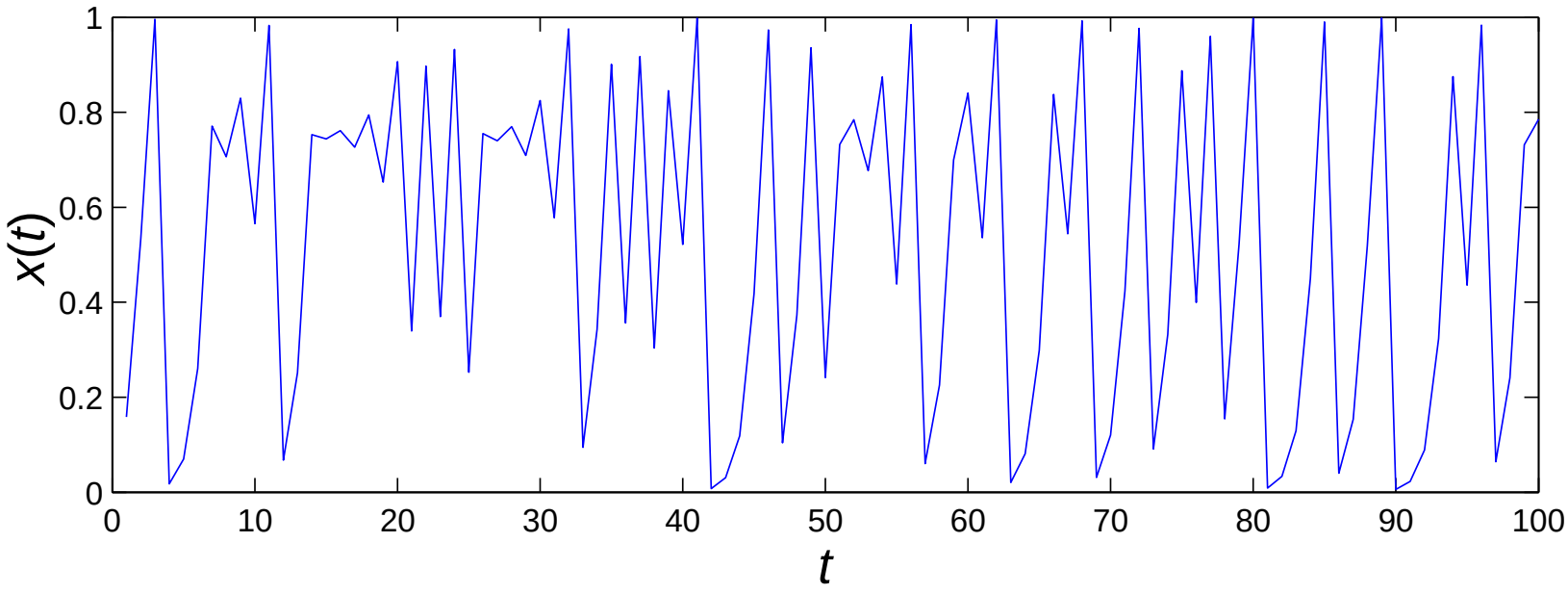
周期的に変動する時間波形

不規則さを生み出す規則



不規則に変動する時間波形

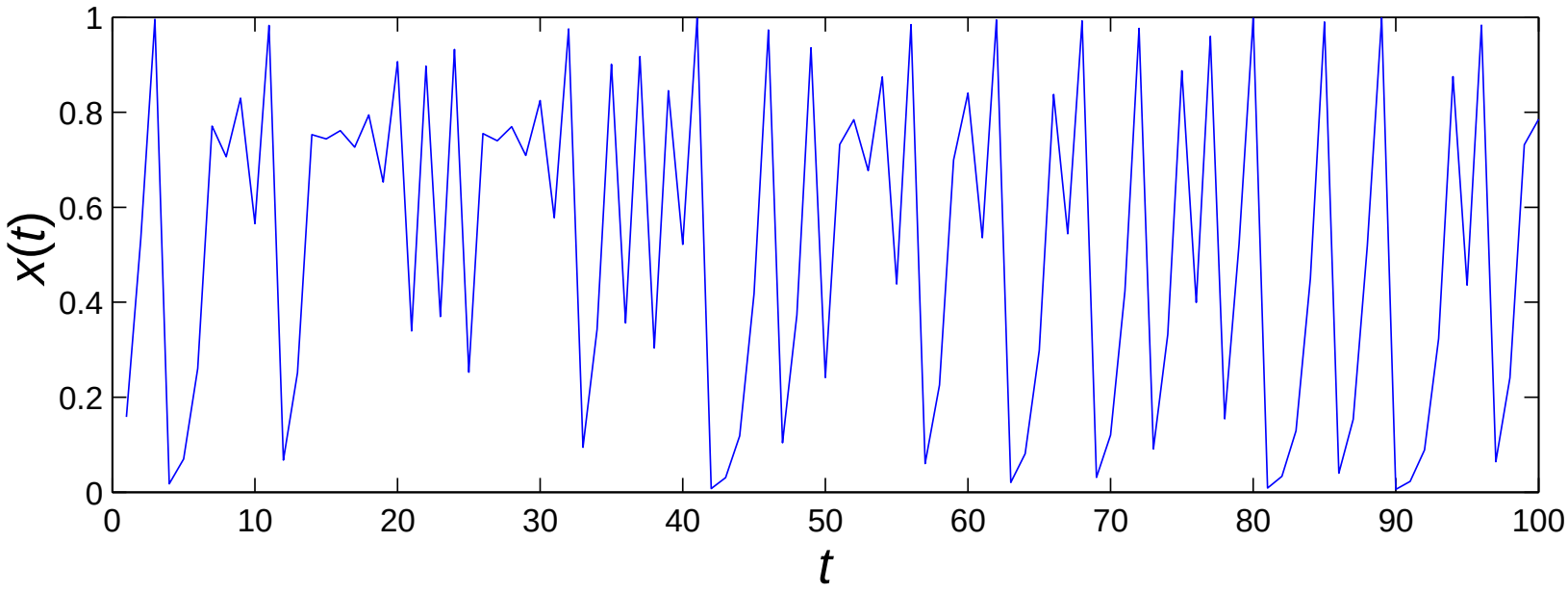
不規則さを生み出す規則



不規則に変動する時間波形

1. **非常に複雑な振る舞い**

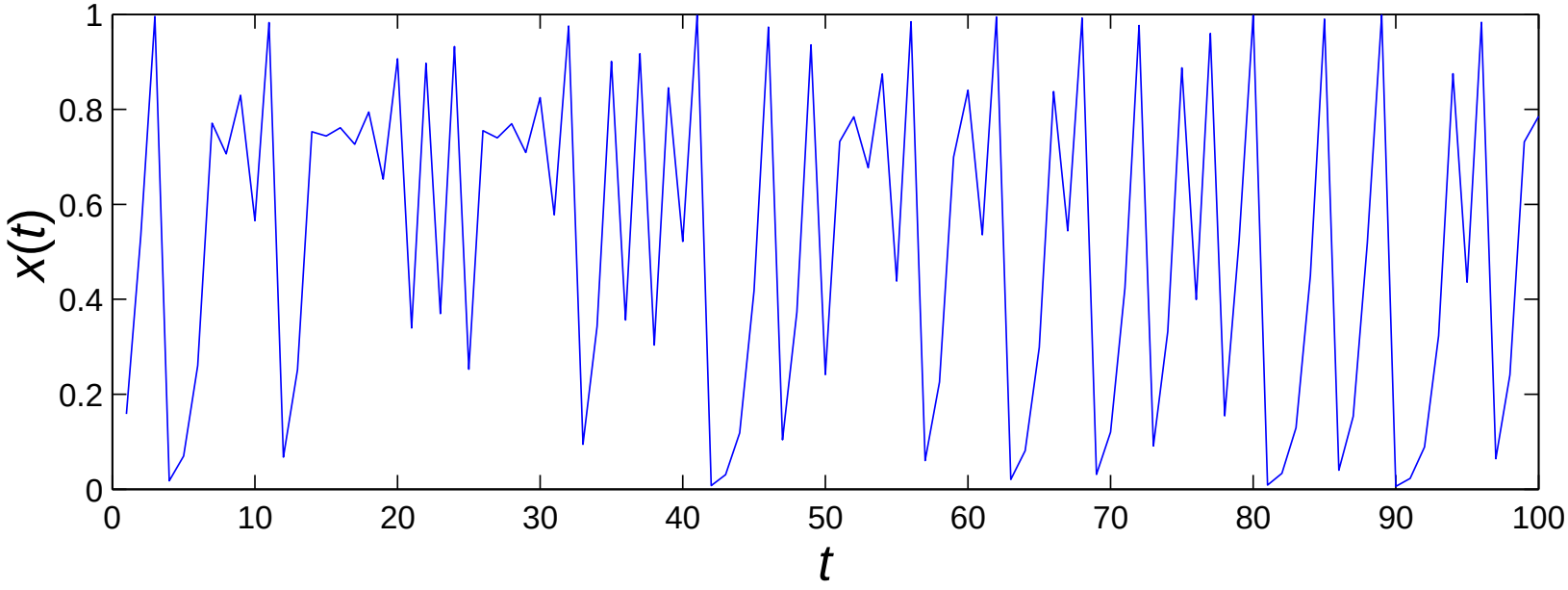
不規則さを生み出す規則



不規則に変動する時間波形

1. **非常に複雑な振る舞い**
2. **平均値と変動の大きさがほぼ同じオーダ**

不規則さを生み出す規則

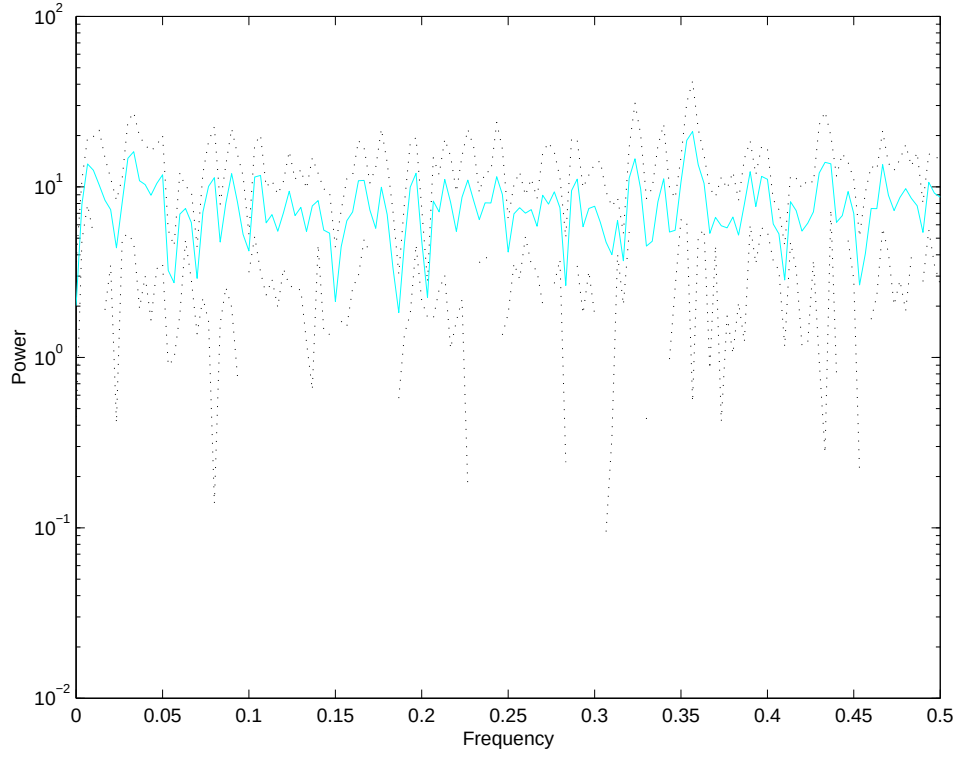


不規則に変動する時間波形

1. **非常に複雑な振る舞い**
2. **平均値と変動の大きさがほぼ同じオーダ**

→ 従来は，ノイズとして捨てられてきた存在

実際 パワースペクトラムを推定してみると

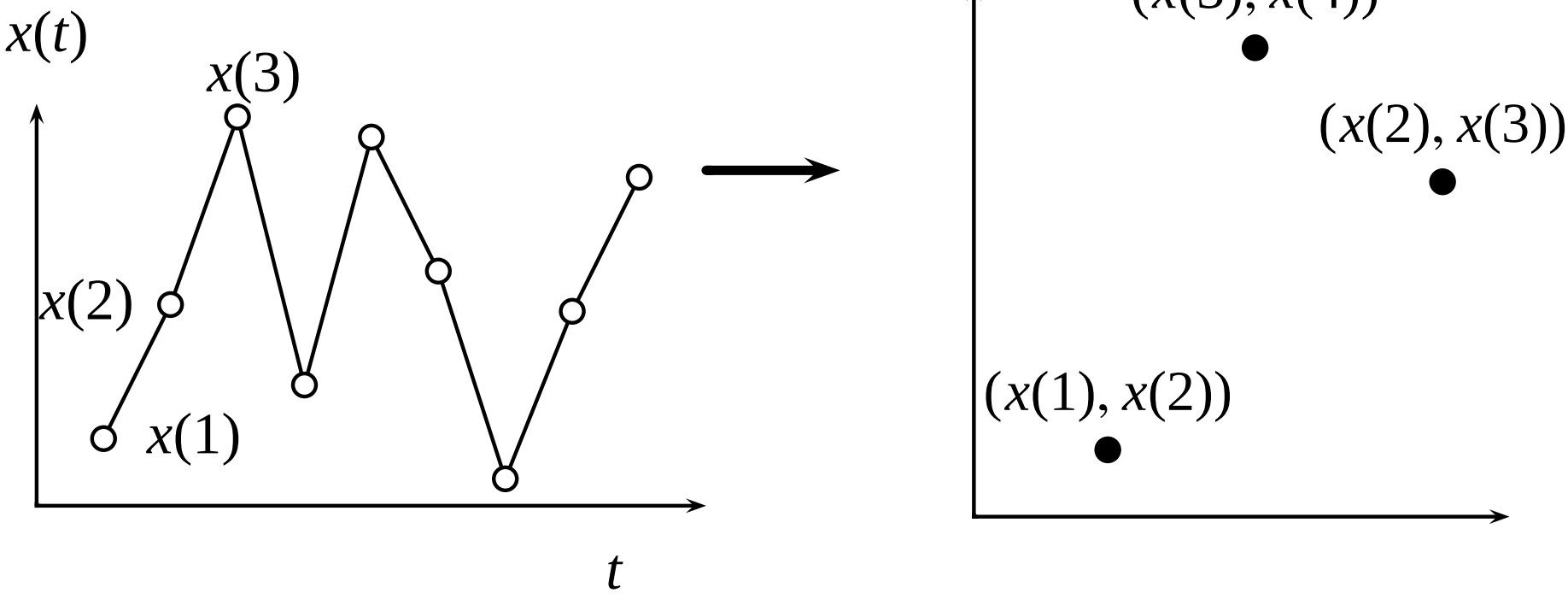


実線 · パワースペクトラム，点線 · 信頼区間

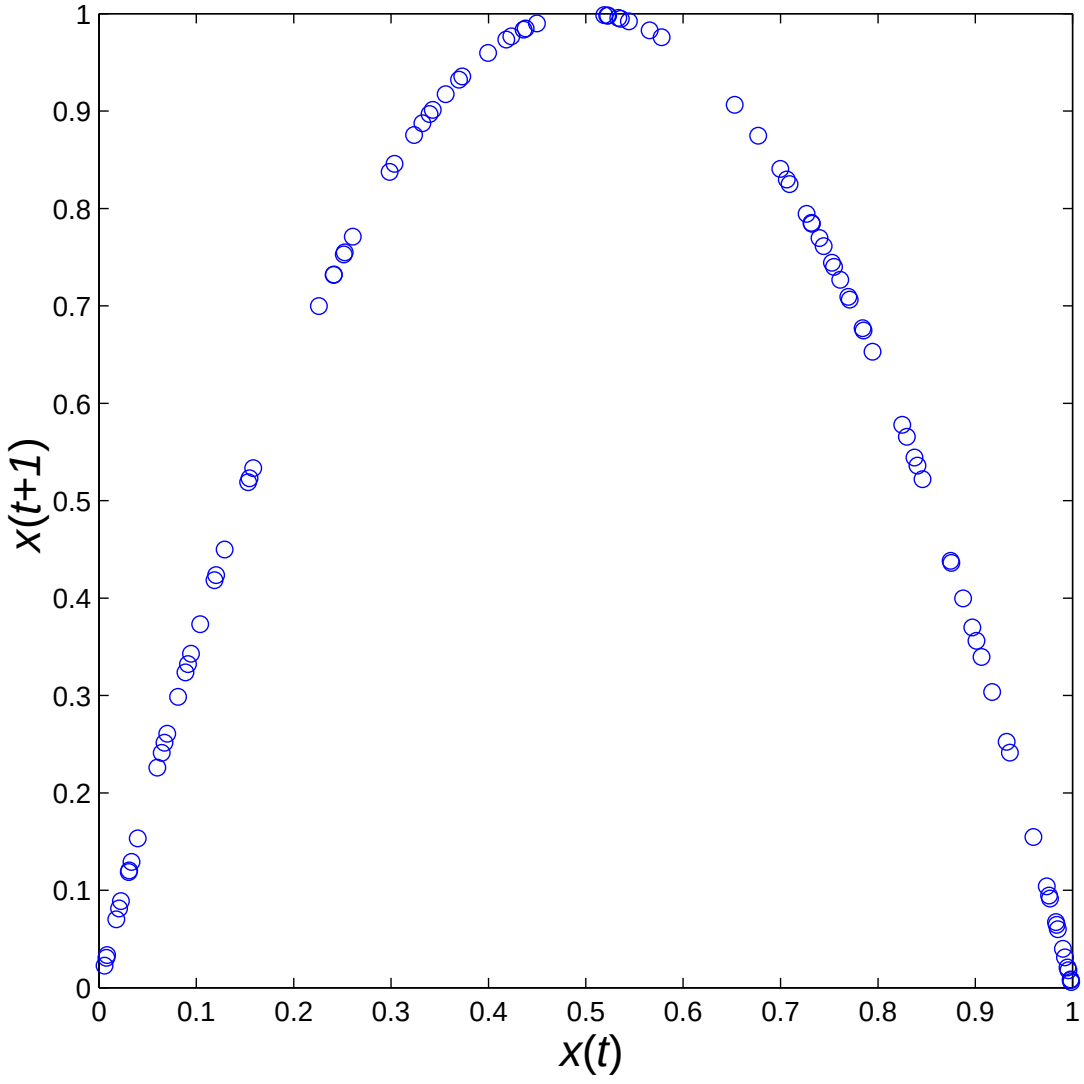
⇒ 低周波から高周波まで一様なパワー

⇒ 白色ノイズ

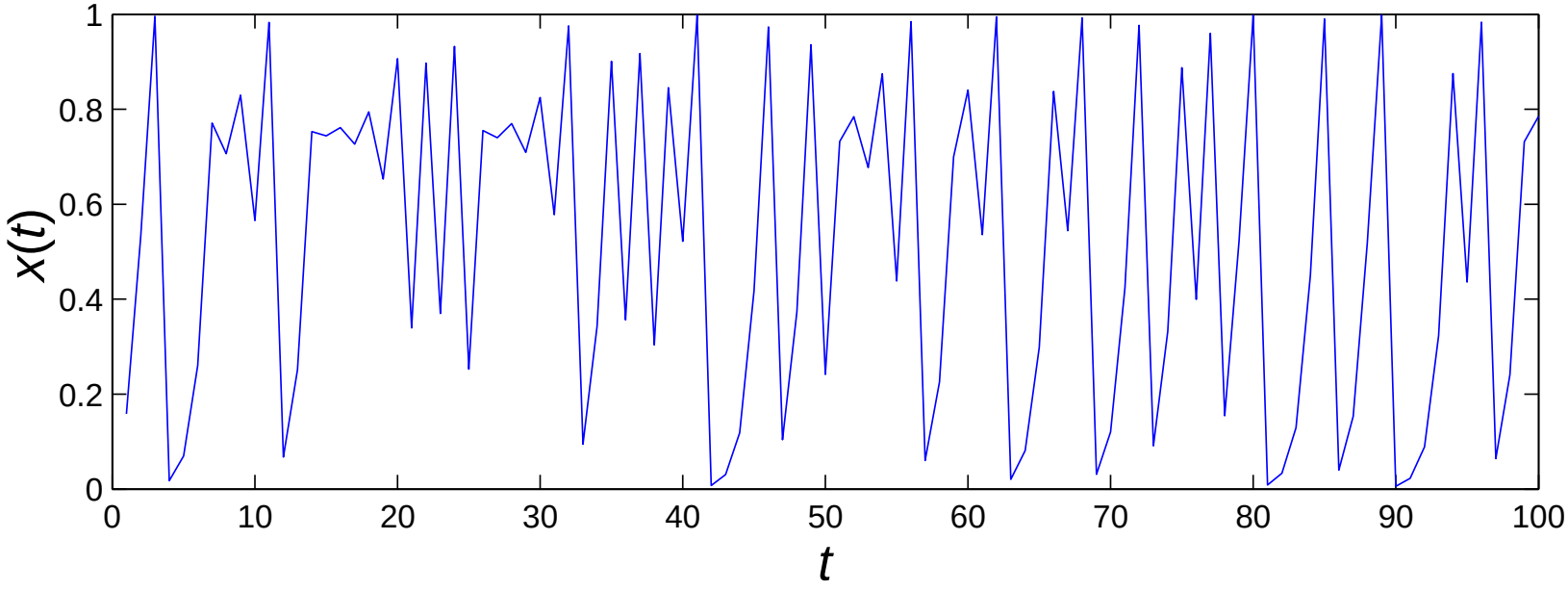
少し違った見方をすると...



放物線が現れた!



実は,,,



上の時系列は，次の漸化式 (差分方程式)

$$x(t+1) = 4x(t)(1-x(t))$$

に従って生成したもの.

ロジスティック写像 (logistic map)

ポイント

$$x(t+1) = 4x(t)(1-x(t))$$

- $t = 0$ での値 $x(0)$(初期値) から $x(1)$ を決定できる
  確率的な要素は全く含まれていない
- $t = 1$ での値 $x(1)$ から $x(2)$ を決定できる
- この過程は，次々と繰り返すことができる
  ☞ 時間発展 ＝ ダイナミクス

初期値が与えられると，未来永劫，全てが決定される

↓

「決定論に従う」

カオスとは

カオスとは

- 少数自由度の決定論的非線形ダイナミカルシステムから生じる複雑な現象

カオスとは

◀ **少数自由度の決定論的非線形ダイナミカルシステムから生じる複雑な現象**

1. **少数自由度** $\Leftrightarrow$ **自由度は** 1

$$x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t))$$

カオスとは

◀ **少数自由度の決定論的非線形ダイナミカルシステムから生じる複雑な現象**

1. **少数自由度** $\Leftrightarrow$ **自由度は** 1
2. **決定論的** $\Leftrightarrow$ **現状態** $x(t)$ **が決まれば，次状態** $x(t+1)$ **は完全に決定される**

$$x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t))$$

カオスとは

◀ **少数自由度の決定論的非線形ダイナミカルシステムから生じる複雑な現象**

1. **少数自由度** $\Leftrightarrow$ **自由度は** 1
2. **決定論的** $\Leftrightarrow$ **現状態** $x(t)$ **が決まれば，次状態** $x(t+1)$ **は完全に決定される**
3. **非線形性** $\Leftrightarrow 2$ **次の非線形性**

$$x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t))$$

カオスとは

- **少数自由度の決定論的非線形ダイナミカルシステムから生じる複雑な現象**
  1. **少数自由度** $\Leftrightarrow$ **自由度は** 1
  2. **決定論的** $\Leftrightarrow$ **現状態** $x(t)$ **が決まれば，次状態** $x(t+1)$ **は完全に決定される**
  3. **非線形性** $\Leftrightarrow 2$ **次の非線形性**
  4. **ダイナミクス** $\Leftrightarrow$ **時刻** t **での値** $x(t)$ **を使って次の時刻の値** $x(t+1)$ **が作り出される**

$$x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t))$$

キーワードは非線形ダイナミクス

非線形とは?

☞ **線形でない**

$$f(ax+by) = af(x) + bf(y)$$

$$f(ax+by) \neq af(x) + bf(y)$$

ダイナミクスとは?

☞ **時間発展に伴って，状態が動的に変化**

この世のありとあらゆる現象は，
時々刻々とその状態が目まぐるしく変化し，
しかも変化のカラクリは非線形!

↓

非線形ダイナミクス!

カオスの源流と発展

カオスの源流と発展

◀ 2 **体問題** (17c) **から** 3 **体問題** (19c) **へ**

カオスの源流と発展

- 2 **体問題** (17c) **から** 3 **体問題** (19c) **へ**
  1. **ティコ・ブラーエ** ··· **膨大な火星観測データの蓄積**

カオスの源流と発展

- 2 **体問題** (17c) **から** 3 **体問題** (19c) **へ**
  1. **ティコ・ブラーエ** ··· **膨大な火星観測データの蓄積**
  2. **ヨハネス・ケプラー** ··· **ケプラーの** 3 **法則**

カオスの源流と発展

◀ 2 **体問題** (17c) **から** 3 **体問題** (19c) **へ**

1. **ティコ・ブラーエ** ··· **膨大な火星観測データの蓄積**
2. **ヨハネス・ケプラー** ··· **ケプラーの** 3 **法則**
3. **アイザック・ニュートン** ··· **万有引力，運動方程式**

カオスの源流と発展

◀ 2 **体問題** (17c) **から** 3 **体問題** (19c) **へ**

1. **ティコ・ブラーエ** ··· **膨大な火星観測データの蓄積**
2. **ヨハネス・ケプラー** ··· **ケプラーの** 3 **法則**
3. **アイザック・ニュートン** ··· **万有引力，運動方程式**
4. **アンリ・ポアンカレ** ··· 3 **体問題の否定的解決**

カオスの源流と発展

- **2 体問題** (17c) **から 3 体問題** (19c) **へ**
  1. **ティコ・ブラーエ** ··· **膨大な火星観測データの蓄積**
  2. **ヨハネス・ケプラー** ··· **ケプラーの 3 法則**
  3. **アイザック・ニュートン** ··· **万有引力，運動方程式**
  4. **アンリ・ポアンカレ** ··· **3 体問題の否定的解決**
- **カオス現象の観測レベル**
  – ミクロスケールからマクロスケールまで –

カオスの源流と発展

- 2 体問題 (17c) から 3 体問題 (19c) へ
  1. ティコ・ブラーエ ··· 膨大な火星観測データの蓄積
  2. ヨハネス・ケプラー ··· ケプラーの 3 法則
  3. アイザック・ニュートン ··· 万有引力，運動方程式
  4. アンリ・ポアンカレ ··· 3 体問題の否定的解決
- カオス現象の観測レベル
  – ミクロスケールからマクロスケールまで –
  1. 相対性理論，量子力学，カオス –20 世紀の 3 大発見–

カオスの源流と発展

- 2 体問題 (17c) から 3 体問題 (19c) へ
  1. ティコ・ブラーエ ··· 膨大な火星観測データの蓄積
  2. ヨハネス・ケプラー ··· ケプラーの 3 法則
  3. アイザック・ニュートン ··· 万有引力，運動方程式
  4. アンリ・ポアンカレ ··· 3 体問題の否定的解決
- カオス現象の観測レベル
  – ミクロスケールからマクロスケールまで –
  1. 相対性理論，量子力学，カオス –20 世紀の 3 大発見–
  2. 身近な現象 –単振り子から二重振り子へ–
     (a) 単振り子，解析的に求解可能，周期解
     (b) 2 重振り子，カオス解

カオスの源流と発展

- 2 体問題 (17c) から 3 体問題 (19c) へ
  1. ティコ・ブラーエ ··· 膨大な火星観測データの蓄積
  2. ヨハネス・ケプラー ··· ケプラーの 3 法則
  3. アイザック・ニュートン ··· 万有引力，運動方程式
  4. アンリ・ポアンカレ ··· 3 体問題の否定的解決
- カオス現象の観測レベル
  – ミクロスケールからマクロスケールまで –
  1. 相対性理論，量子力学，カオス –20 世紀の 3 大発見–
  2. 身近な現象 –単振り子から二重振り子へ–
     (a) 単振り子，解析的に求解可能，周期解
     (b) 2 重振り子，カオス解
  3. 20 世紀におけるコンピュータ性能の進歩

カオス研究の歴史，先駆者

カオス研究の歴史，先駆者

1. Henri Poincaré，3 **体問題**

カオス研究の歴史，先駆者

1. Henri Poincaré，3 **体問題**
2. van der Pol, van der Mark (1927)，
   ネオン管を用いた電気回路におけるカオス

カオス研究の歴史，先駆者

1. Henri Poincaré，3 **体問題**
2. van der Pol, van der Mark (1927)，
   ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. S. M. Ulam and J. von Neumann (1947)，**確率論と決定論**
   On combination of stochastic and deterministic process,
   $f(x) = 4x(1 - x)$

フォン・ノイマンもカオスを知っていた!

403. S. M. Ulam and John von Neumann: *On combination of stochastic and deterministic processes.* Preliminary report.

A computational procedure for the study of various differential equations—ordinary or partial—is investigated. It consists of a statistical model of the corresponding physical problem and involves a process which is a combination of deterministic and stochastic processes (see Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 51-9-165). This procedure is analogous to the playing of a series of "solitaire" card games and is performed on a computing machine. It requires, among others, the use of "random" numbers with a given distribution. Various distributions of such numbers can, however, be obtained by deterministic processes. For example, starting with almost every x_1 (in the sense of Lebesgue measure) and *iterating* the function $f(x) = 4x \cdot (1-x)$ one obtains a sequence of numbers on (0, 1) with a computable algebraic distribution. By playing suitable *games* with numbers "drawn" in this fashion, one can obtain various other distributions, either given explicitly or satisfying given differential or integral equations. (Received September 3, 1947.)

カオス研究の歴史，先駆者

1. Henri Poincaré，3 **体問題**
2. van der Pol, van der Mark (1927)，
   ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. S. M. Ulam and J. von Neumann (1947)，**確率論と決定論**
   On combination of stochastic and deterministic process,
   $f(x) = 4x(1 - x)$

カオス研究の歴史，先駆者

1. Henri Poincaré，3 **体問題**
2. van der Pol, van der Mark (1927)，
   ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. S. M. Ulam and J. von Neumann (1947)，**確率論と決定論**
   On combination of stochastic and deterministic process,
   $f(x) = 4x(1 - x)$
4. R. E. Kalman (1956)，**非線形サンプル値制御**

カオス研究の歴史，先駆者

1. Henri Poincaré，3 **体問題**
2. van der Pol, van der Mark (1927)，
   ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. S. M. Ulam and J. von Neumann (1947)，**確率論と決定論**
   On combination of stochastic and deterministic process,
   $f(x) = 4x(1 - x)$
4. R. E. Kalman (1956)，**非線形サンプル値制御**
5. Y. Ueda, H. Kawakami, N. Akamatsu (1960's)
   ダフィング方程式，アナログコンピュータ

カオス研究の歴史，先駆者

1. Henri Poincaré，3 **体問題**
2. van der Pol, van der Mark (1927)，
   ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. S. M. Ulam and J. von Neumann (1947)，**確率論と決定論**
   On combination of stochastic and deterministic process,
   $f(x) = 4x(1 - x)$
4. R. E. Kalman (1956)，**非線形サンプル値制御**
5. Y. Ueda, H. Kawakami, N. Akamatsu (1960's)
   ダフィング方程式，アナログコンピュータ
6. E. N. Lorenz (1963)，**バタフライ効果**

カオス研究の歴史，先駆者

1. Henri Poincaré，3 **体問題**
2. van der Pol, van der Mark (1927)，
   ネオン管を用いた電気回路におけるカオス
3. S. M. Ulam and J. von Neumann (1947)，**確率論と決定論**
   On combination of stochastic and deterministic process,
   $f(x) = 4x(1 - x)$
4. R. E. Kalman (1956)，**非線形サンプル値制御**
5. Y. Ueda, H. Kawakami, N. Akamatsu (1960's)
   ダフィング方程式，アナログコンピュータ
6. E. N. Lorenz (1963)，**バタフライ効果**
7. T. Y. Li & J. A. Yorke (1975),Period Three Implies Chaos

第1回目の宿題

- S. M. Ulam and J. von Neumann (1947)，
  “On combination of stochastic and deterministic process.”
  を読み
  1. **日本語に訳しなさい．**
  2. **重要な点は何か．あなたの言葉で説明しなさい．**
- **注意**
  必ず自分でやること．
- **書式と期限**
  - **日本語**
  - A4 **サイズ，表紙不要**
  - **学籍番号，氏名明記**
  - **第** 2 **回講義開始時まで**