カオスの数理構造

非線形システム特論 *2004*

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338–8570 **さいたま市 桜区 下大久保** 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru

カオスの有する性質

カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  $\Rightarrow$ **軌道不安定性** Orbital instability

カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**

カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム

カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム
- **有界性** (Boundedness)
  非線形効果により，有界な領域に解が閉じ込められる

カオスの有する性質

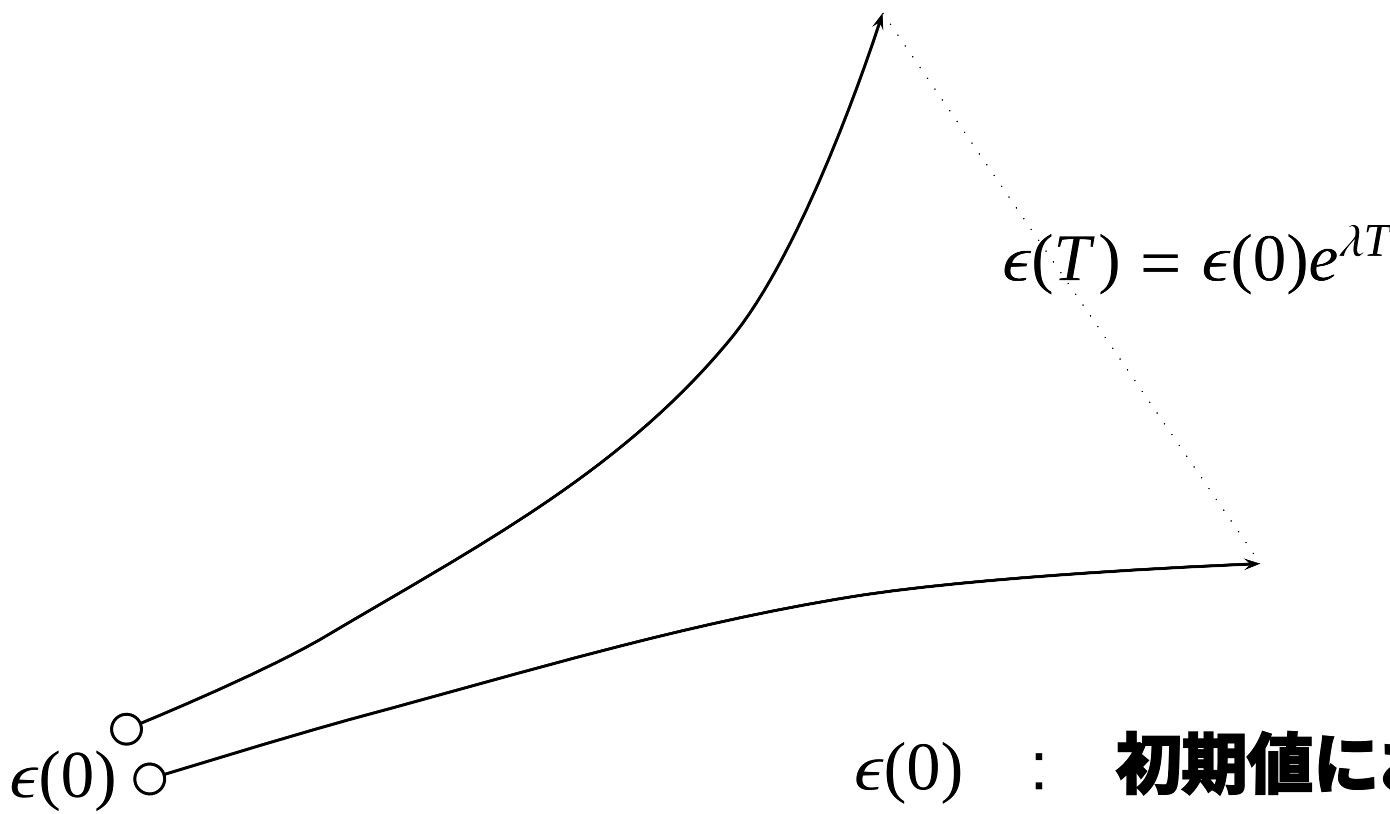
- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム
- **有界性** (Boundedness)
  非線形効果により，有界な領域に解が閉じ込められる
- **カオスの中の秩序** (Order within Chaos)
  アトラクタの自己相似性 (Self-similarity of attractors)

カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム
- **有界性** (Boundedness)
  非線形効果により，有界な領域に解が閉じ込められる
- **カオスの中の秩序** (Order within Chaos)
  アトラクタの自己相似性 (Self-similarity of attractors)

軌道不安定性 Orbital instability

◀ **初期値に与えた差が，指数関数的に拡大**



$\epsilon(0)$: **初期値における誤差**

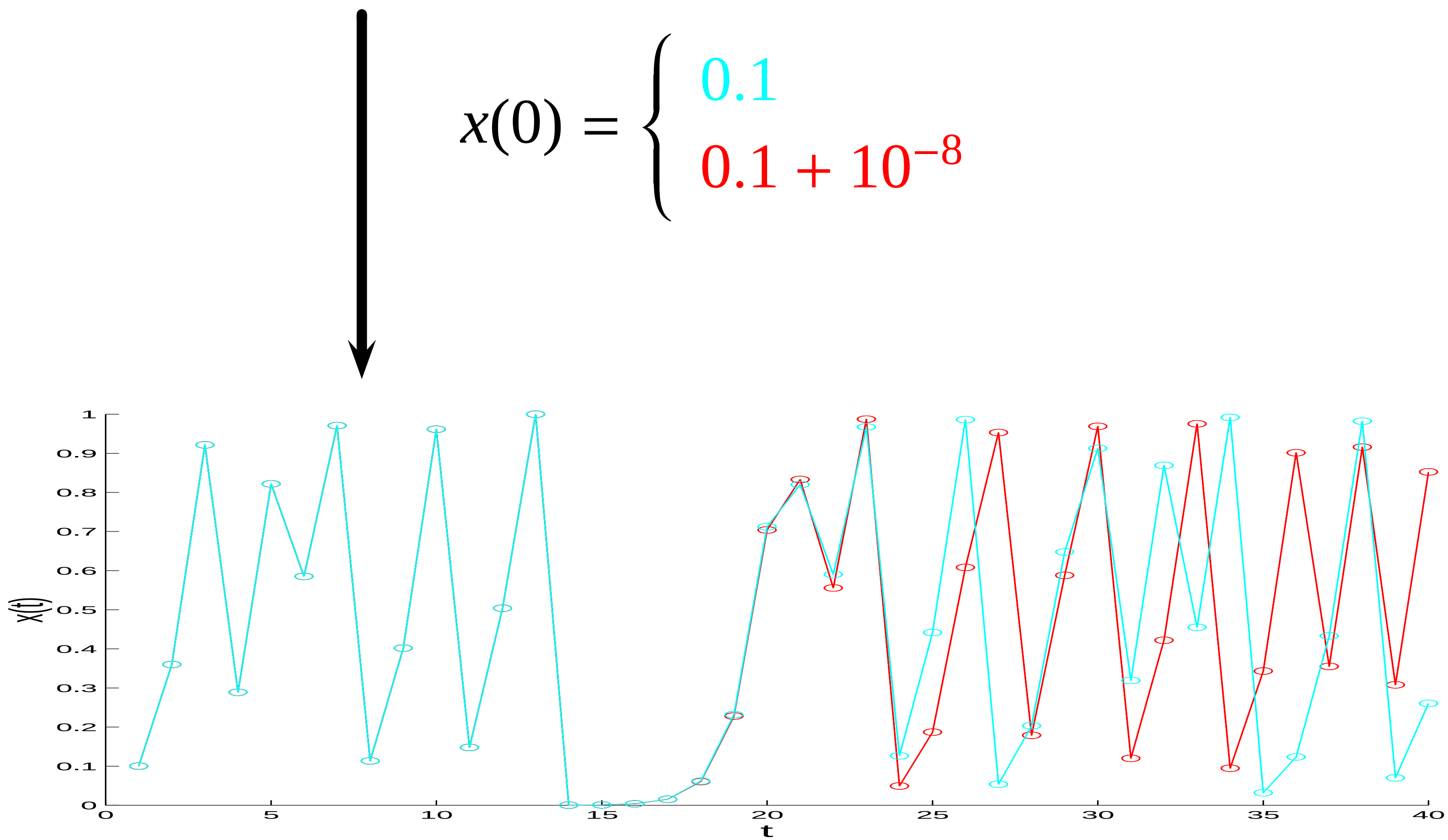
λ : **最大リアプノフ指数**

初期値に対する鋭敏な依存性 → 軌道不安定性

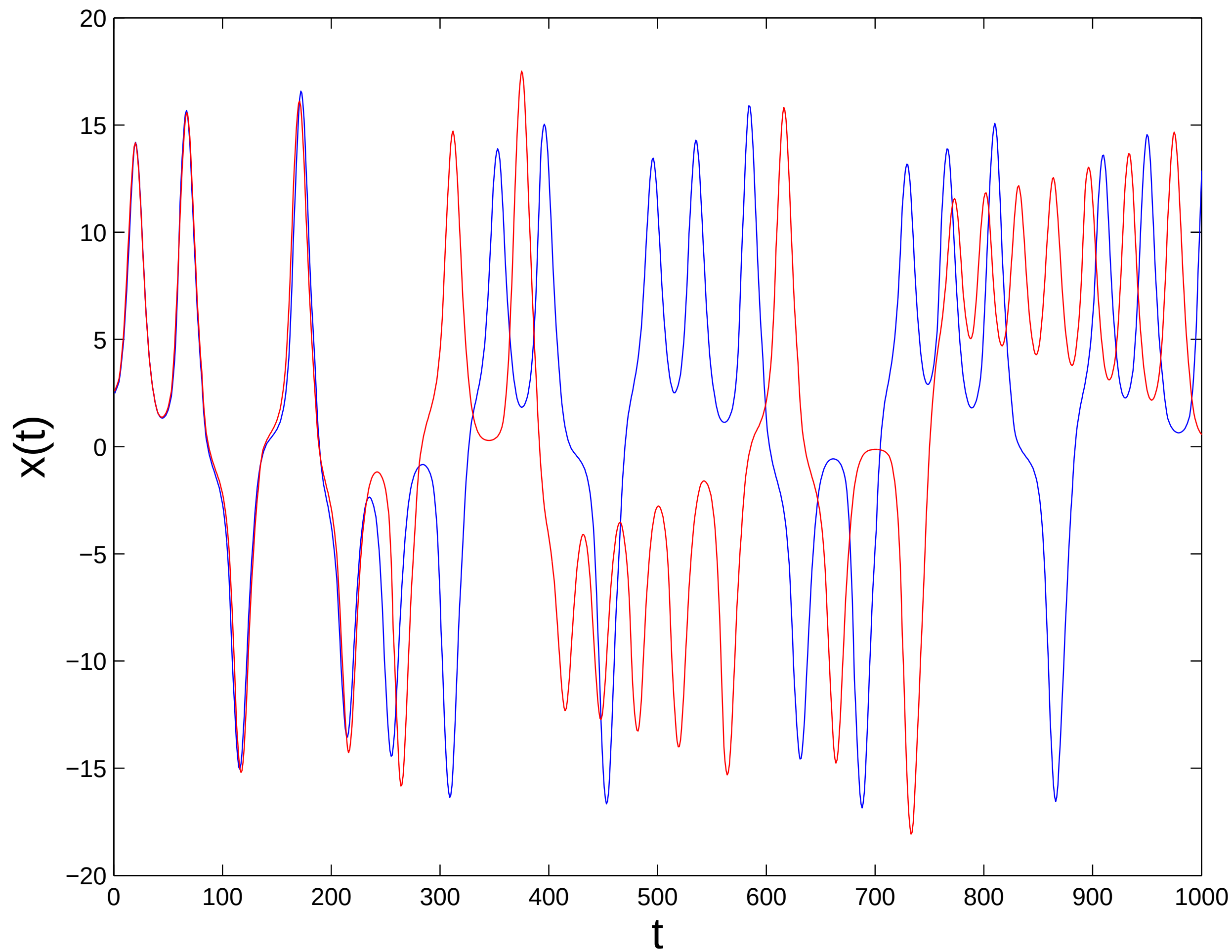
ロジスティック写像の軌道不安定性

ロジスティック写像 $x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t))$

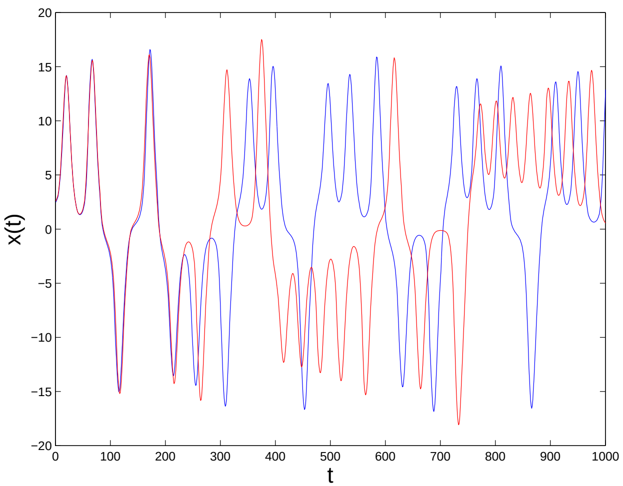
$$x(0) = \begin{cases} 0.1 \\ 0.1 + 10^{-8} \end{cases}$$



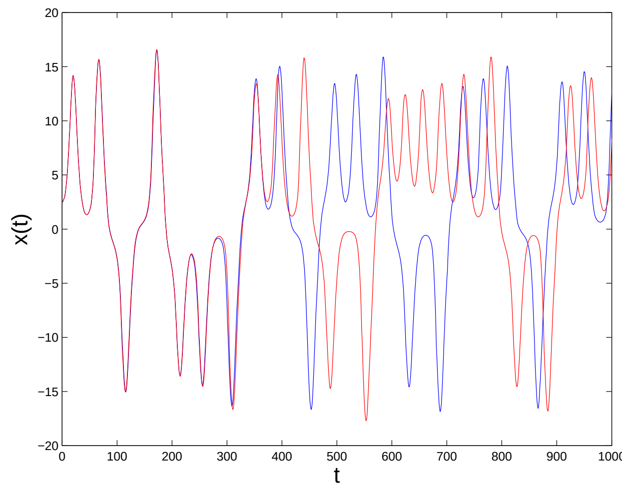
ローレンツ方程式の軌道不安定性



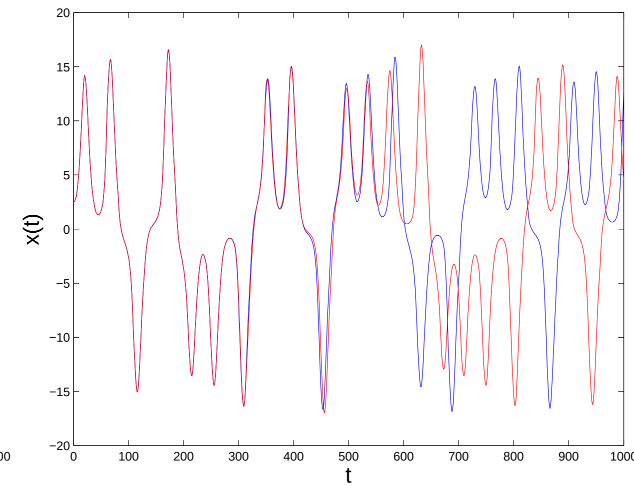
ローレンツ方程式の軌道不安定性



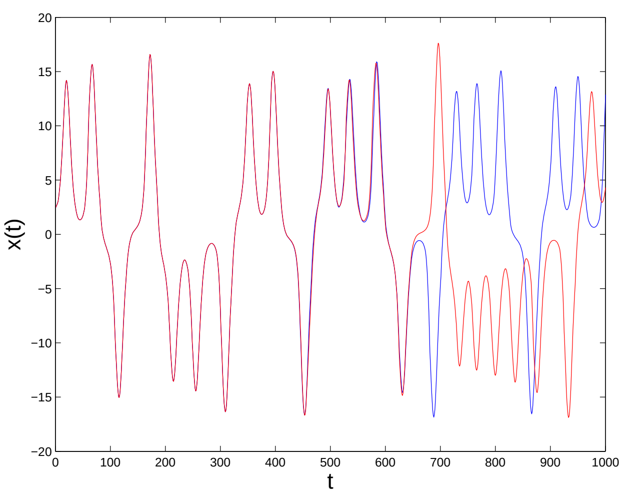
$\epsilon = 1 \times 10^{-1}$



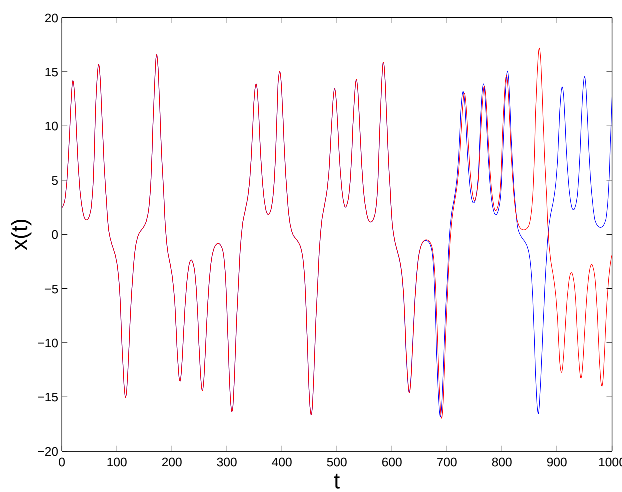
$\epsilon = 1 \times 10^{-2}$



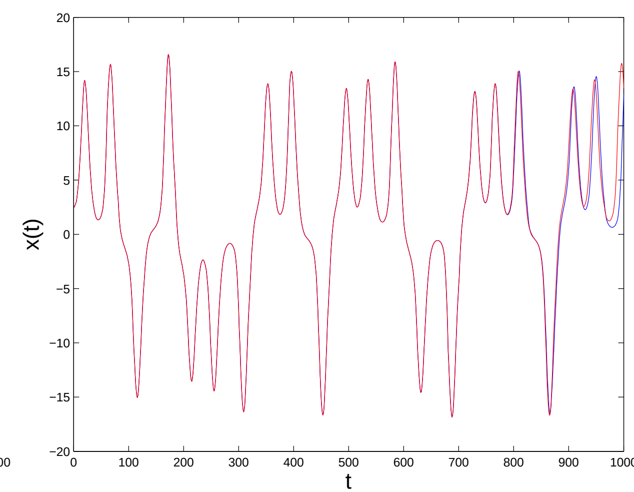
$\epsilon = 1 \times 10^{-3}$



$\epsilon = 1 \times 10^{-4}$

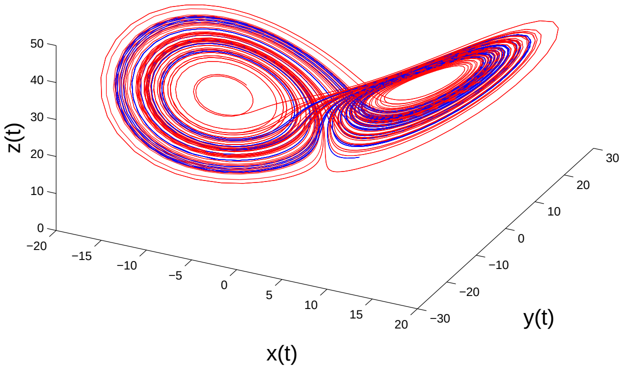


$\epsilon = 1 \times 10^{-5}$

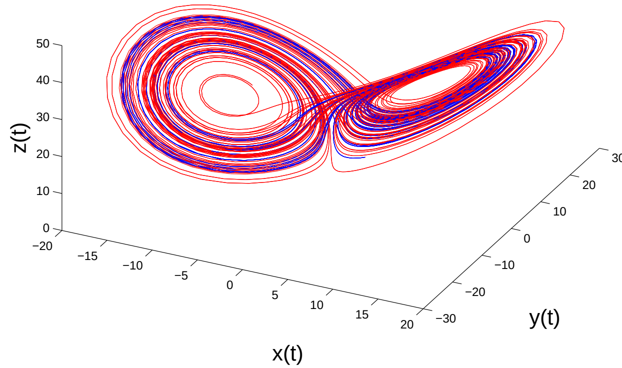


$\epsilon = 1 \times 10^{-6}$

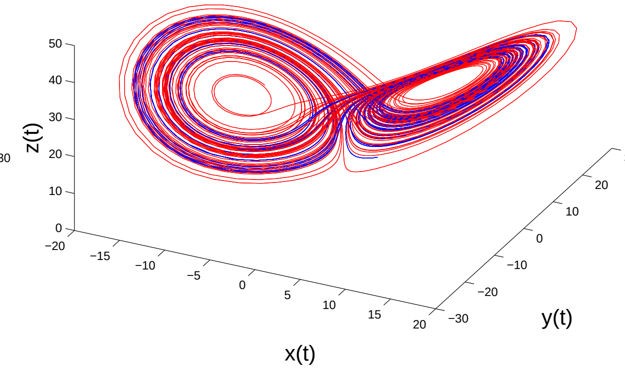
ローレンツ方程式の軌道不安定性



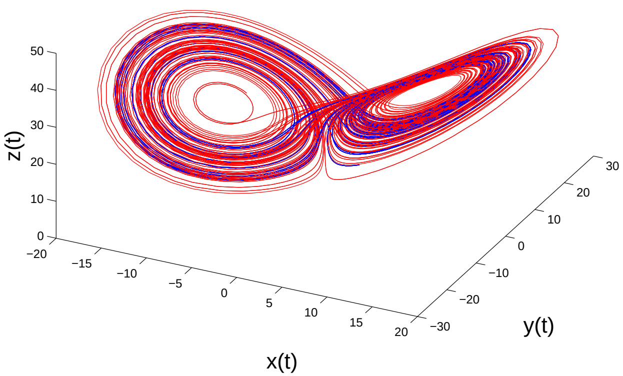
$\epsilon = 1 \times 10^{-1}$



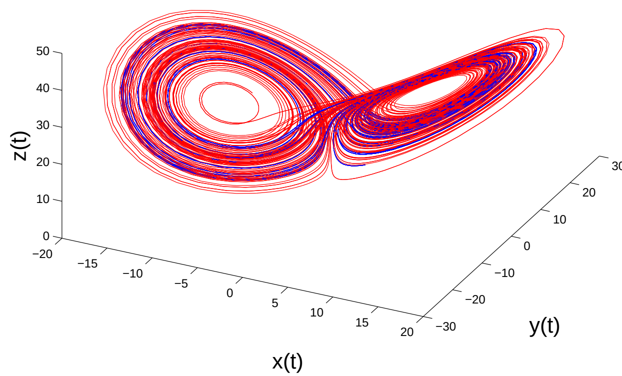
$\epsilon = 1 \times 10^{-2}$



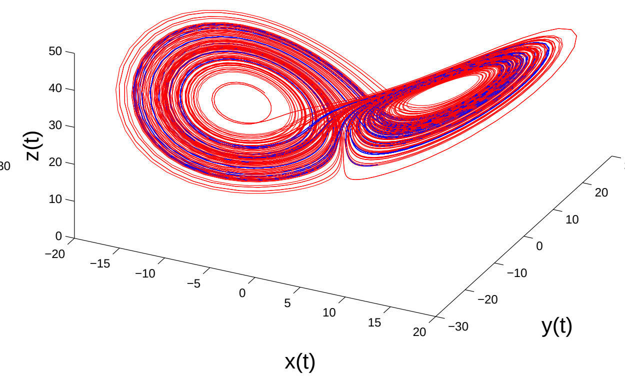
$\epsilon = 1 \times 10^{-3}$



$\epsilon = 1 \times 10^{-4}$



$\epsilon = 1 \times 10^{-5}$



$\epsilon = 1 \times 10^{-6}$

決定論的世界観の自己崩壊

◀ **決定論的力学系の解の一意性**

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1$$

❏ **リップシッツ条件**

$0 < {}^{\exists}K < \infty, {}^{\forall}\boldsymbol{x}, {}^{\forall}\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})| \leq K|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$$

❏ **「f が C^1」or 「f が C^0 でリップシッツ条件成立」** $\Rightarrow$ ${}^{\forall}\boldsymbol{x}_0$ **に対して，解が一意に定まる**

◀ **ラプラス的世界観** $\Leftrightarrow$ **決定論的世界観**

◀ **初期値に対する鋭敏な依存性** $\Rightarrow$ **(長期予測不能性)**

Henri Poincaré

Science et Méthode
科学と方法

↓

偶然とは?

偶然 (Le Hasard) とは?

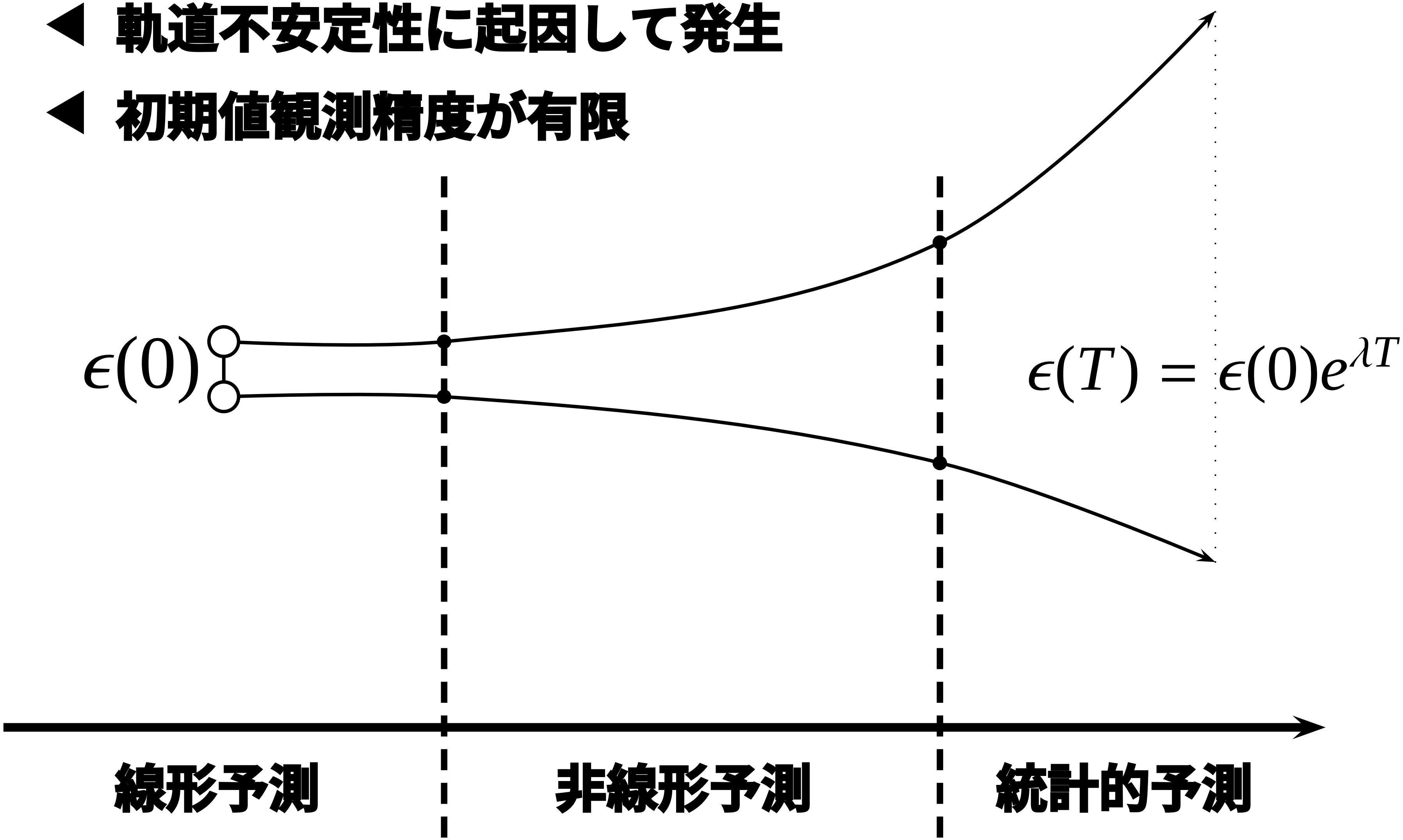
Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considèrable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrons connaître la situation initiale qu'*approximativement*. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même *approximmation*, c'est tout ce qu'il est régi par des lois; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phènoméne fortuit.

カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム
- **有界性** (Boundedness)
  非線形効果により，有界な領域に解が閉じ込められる
- **カオスの中の秩序** (Order within Chaos)
  アトラクタの自己相似性 (Self-similarity of attractors)

長期予測不能性と短期予測可能性

- ◀ 軌道不安定性に起因して発生
- ◀ 初期値観測精度が有限



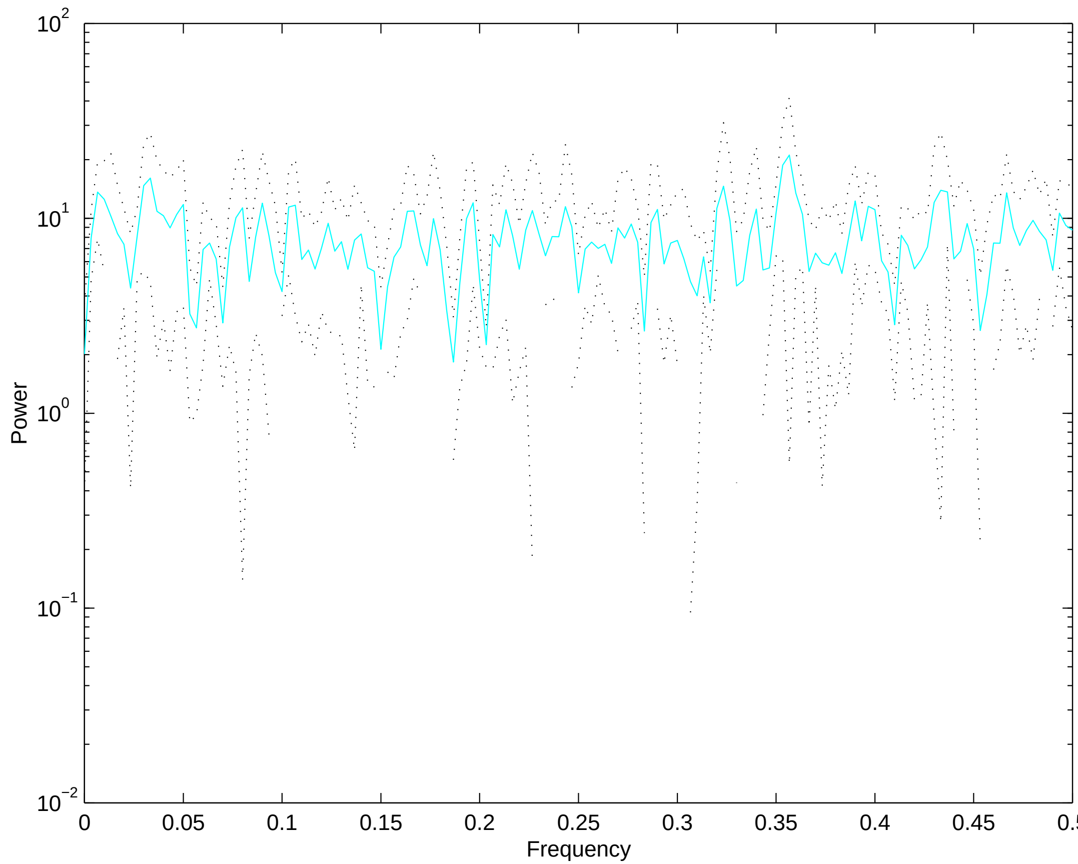
短期予測可能　　**長期予測不可能**

カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム
- **有界性** (Boundedness)
  非線形効果により，有界な領域に解が閉じ込められる
- **カオスの中の秩序** (Order within Chaos)
  アトラクタの自己相似性 (Self-similarity of attractors)

非周期性

◀ 周期性が無い → パワースペクトラムの推定も重要

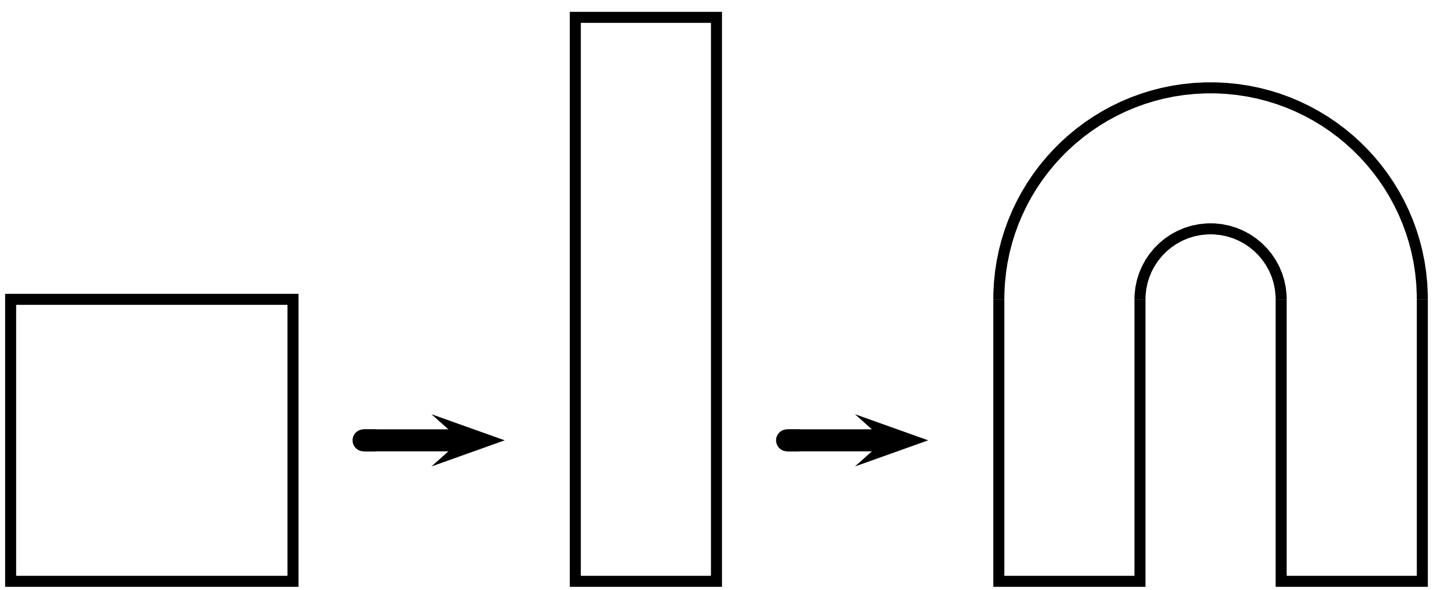


カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  $\Rightarrow$ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  $\Rightarrow$ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム
- **有界性** (Boundedness)
  非線形効果により，有界な領域に解が閉じ込められる
- **カオスの中の秩序** (Order within Chaos)
  アトラクタの自己相似性 (Self-similarity of attractors)

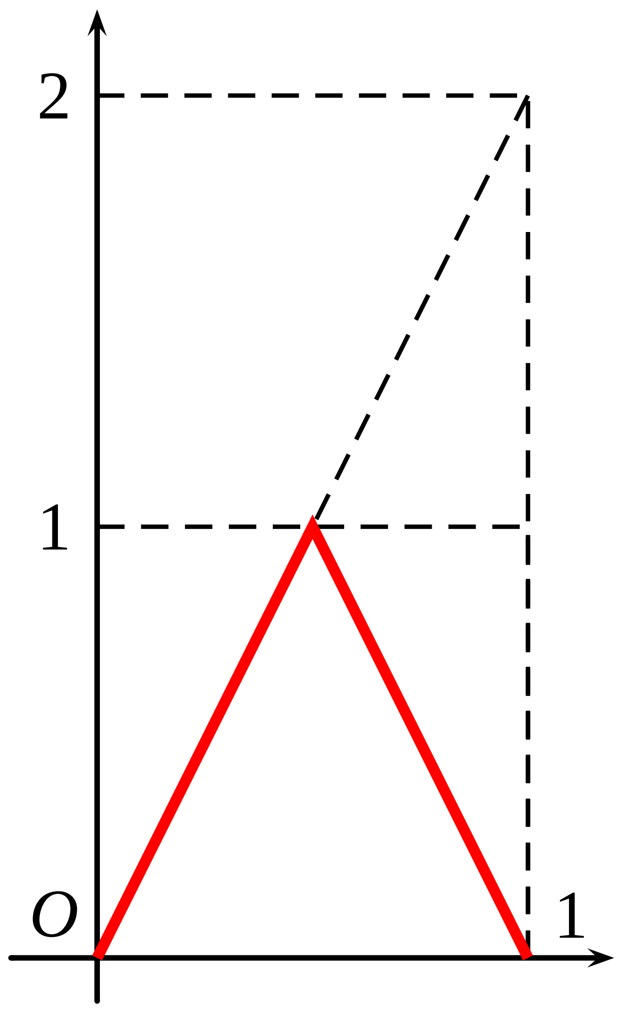
引き延ばしと折曲げによる有界性

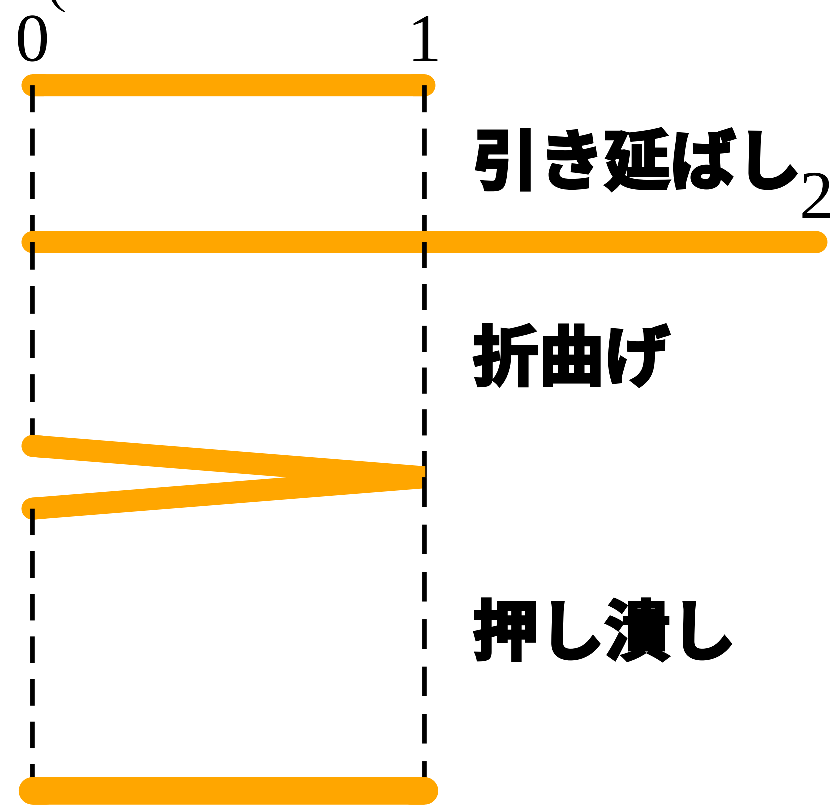
- 線形写像 $y(t+1) = 2y(t)$ も初期値鋭敏依存性がある．しかし，$y(t) \to \infty (t \to \infty)$
- 有界なアトラクタに吸引されるためには，非線形な折曲げ (folding) も必要になる



テント写像の引き延ばしと折曲げ

$$x(t+1) = -2\left|x(t) - \frac{1}{2}\right| - 1 = \begin{cases} 2x(t) & (0 \le x(t) \le 0.5) \\ 2 - 2x(t) & (0.5 \le x(t) \le 1) \end{cases}$$





パイこね変換

カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム
- **有界性** (Boundedness)
  非線形効果により，有界な領域に解が閉じ込められる
- **カオスの中の秩序** (Order within Chaos)
  アトラクタの自己相似性 (Self-similarity of attractors)

カオスの中の秩序

- 分岐 (カオスへ至るルート等)
  - 周期倍分岐
  - 接線分岐，etc

カオスの中の秩序

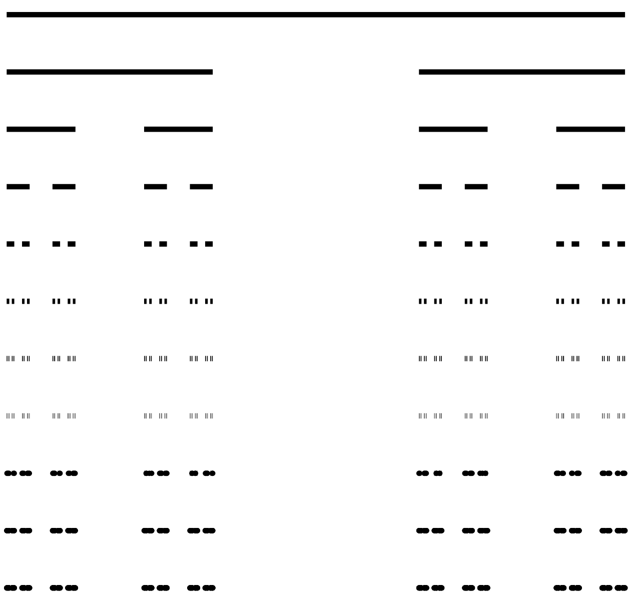
- 分岐 (カオスへ至るルート等)
  - 周期倍分岐
  - 接線分岐，etc
- カオスとフラクタル
  - カオスアトラクタのフラクタル性
  - 分岐構造におけるフラクタル性
  - ベイスンのフラクタル性

カオスの中の秩序

- 分岐 (カオスへ至るルート等)
  - 周期倍分岐
  - 接線分岐，etc
- カオスとフラクタル
  - カオスアトラクタのフラクタル性
  - 分岐構造におけるフラクタル性
  - ベイスンのフラクタル性
- カオスと共存する可算無限個の不安定周期解
  - リー・ヨークの定理
  - シャルコフスキーの定理
  - マロットの定理
  - スメール・バーコフの定理

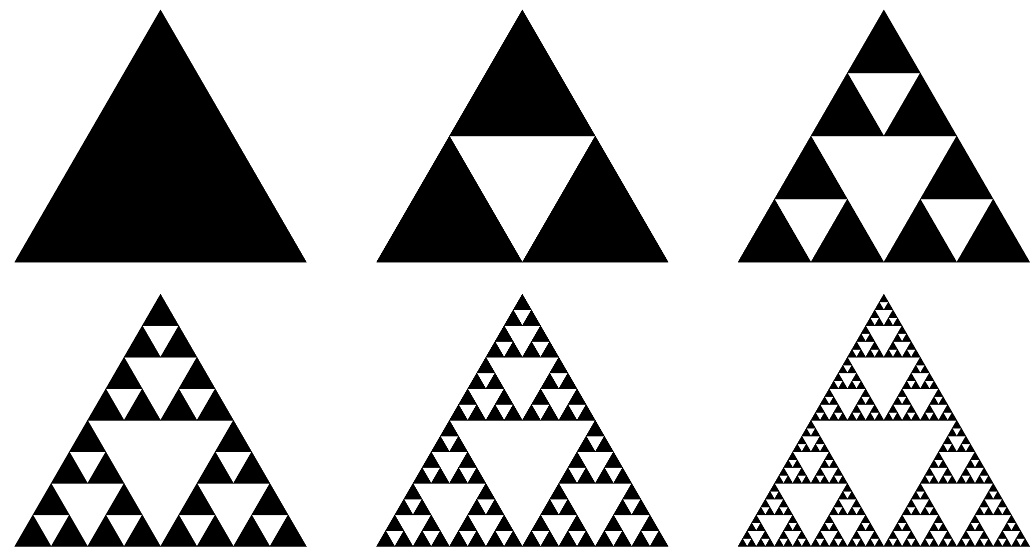
フラクタル (自己相似) 構造

カントール集合



$D_0 = 0.63$

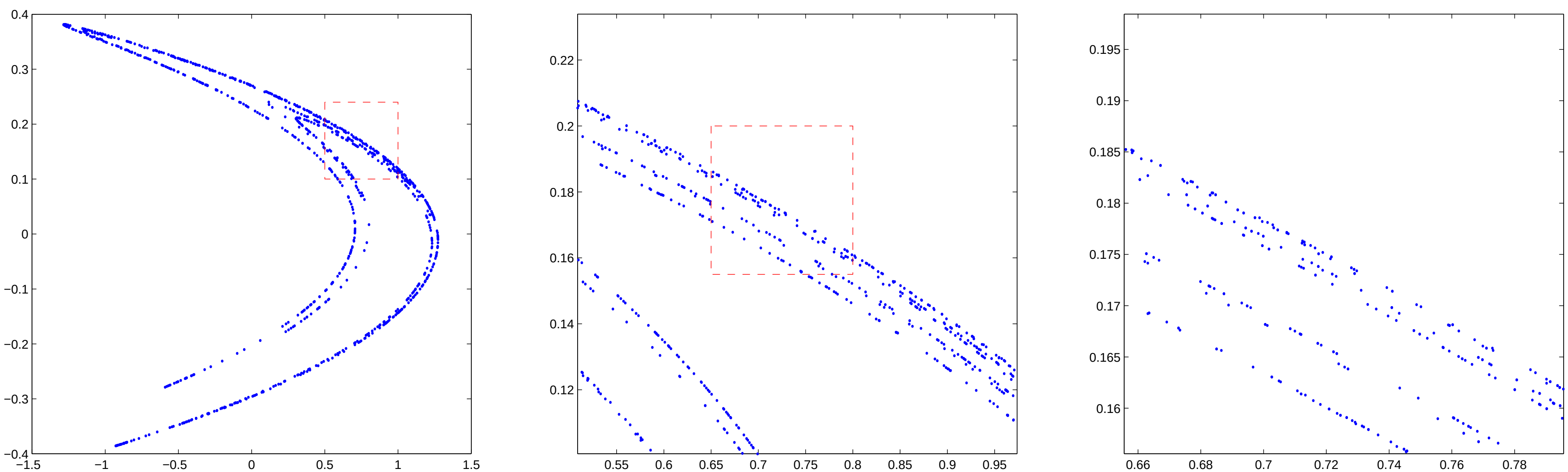
シェルピンスキーギャスケット



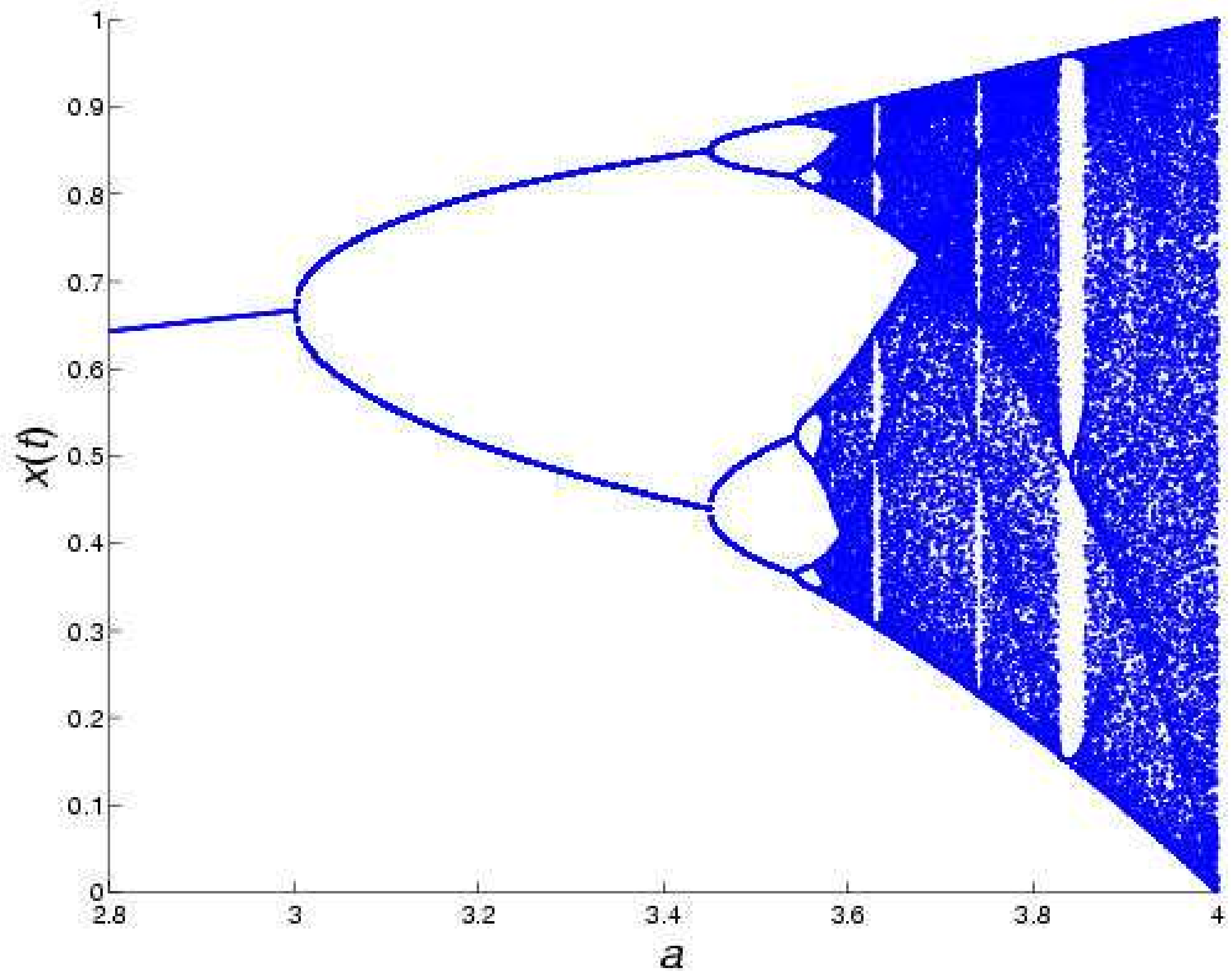
$D_0 = 1.585$

カオスアトラクタのフラクタル構造

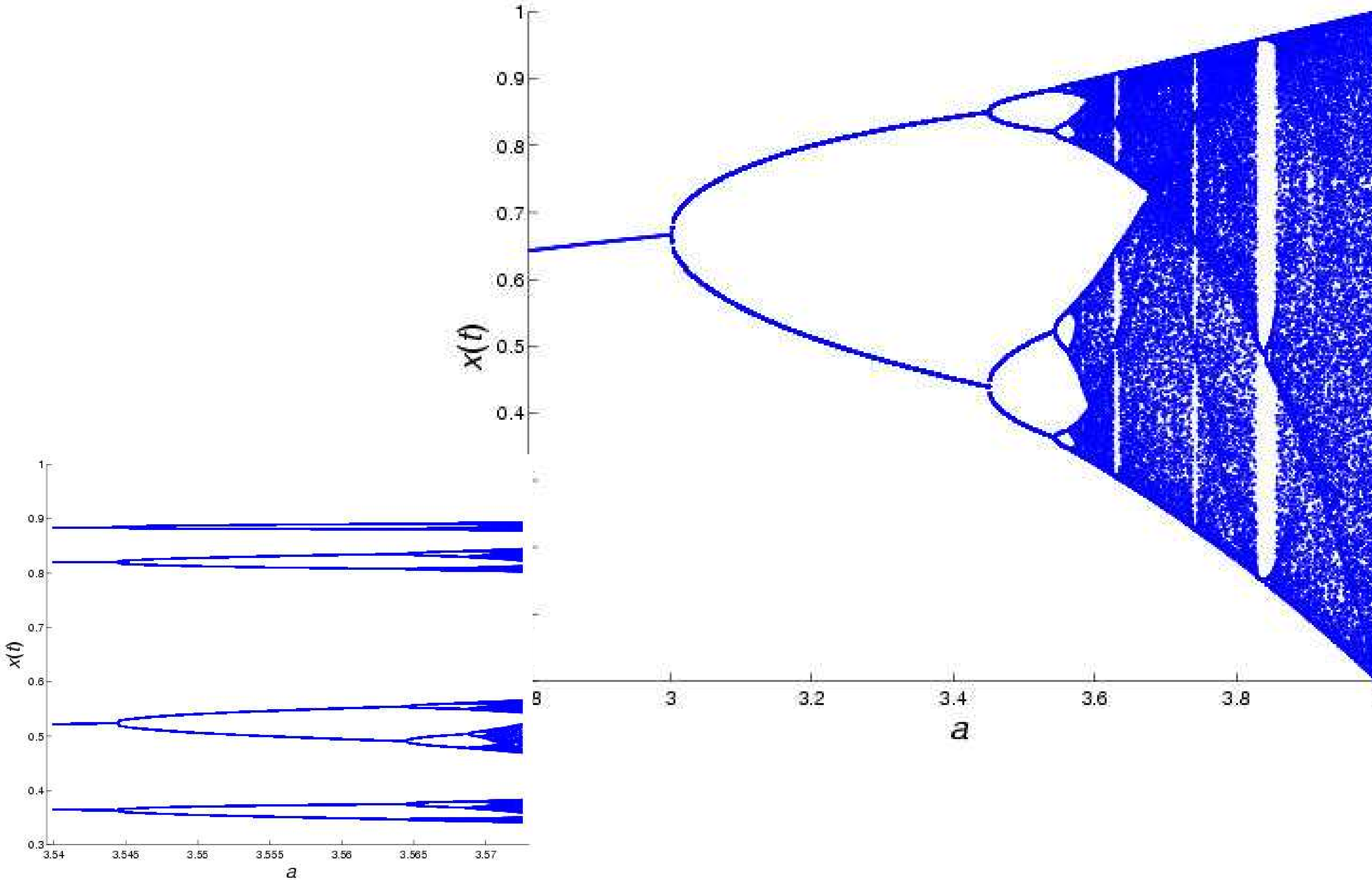
エノン写像
$$\begin{cases} x(t+1) &= 1 + y(t) - ax(t)^2 \\ y(t+1) &= bx(t) \end{cases}$$



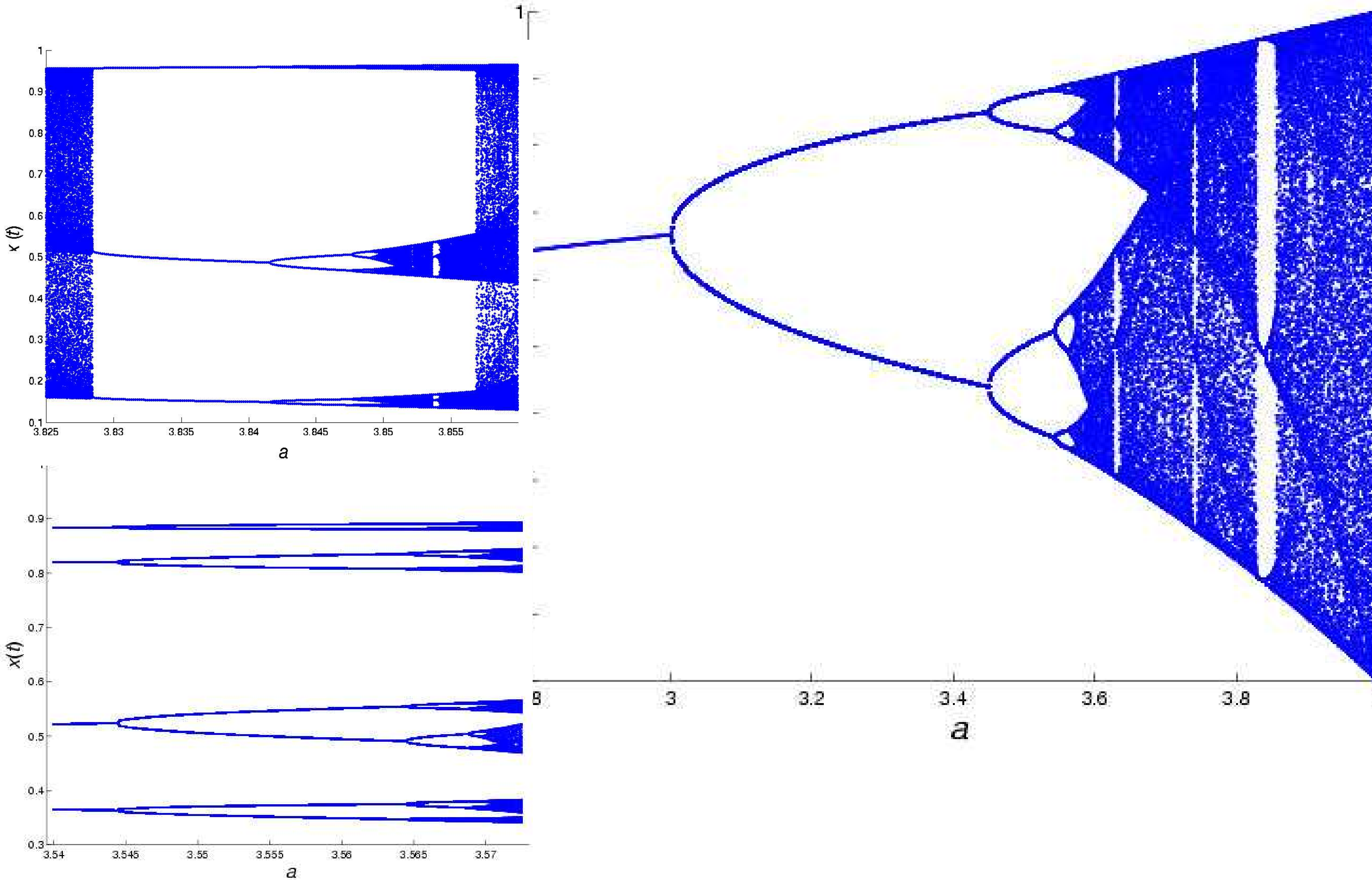
分岐構造におけるフラクタル



分岐構造におけるフラクタル



分岐構造におけるフラクタル



カオスの有する性質

- **初期値に対する鋭敏な依存性** (sensitive dependence on initial conditions)
  ⇒ **軌道不安定性** Orbital instability
- **長期予測不能性と短期予測可能性** (Long-term unpredictability and short-term predictability)
  ⇒ **軌道不安定性に起因**
- **非周期性** (Non-periodicity)
  時系列として観測すると非周期的，連続なパワースペクトラム
- **有界性** (Boundedness)
  非線形効果により，有界な領域に解が閉じ込められる
- **カオスの中の秩序** (Order within Chaos)
  アトラクタの自己相似性 (Self-similarity of attractors)

カオスに関するいくつかの定理

- **李・ヨークの定理**
  T. Y. Li and J. A. Yorke : “Period Three Implies Chaos,” American Math.Monthly, Vol.82, pp.985–992, 1975.
- **シャルコフスキーの定理**
  Sharkovskii :
  “Coexistence of cycles of a continuous maps of a line into itself,”
  Uklain. Math. Z. Vol.16, pp.61–71, 1964.
- **マロットの定理**
  F. R. Marrotto:
  “Snapback Repellers imply chaos,”
  J. Math. Anal. Appl. Vol.63, pp.199–233, 1978.

李・ヨークの定理

$f(x)$ は実数区間 I からそれ自身に写す連続写像とする。区間 I に a,b,c,d が存在して，以下の条件を満たすとする．

$d \le a < b < c$ (or $d \ge a > b > c$), $d = f(c), b = f(a), c = f(b)$

このとき，

(1) f は全ての自然数 k に対して，k 周期軌道が I に存在する

(2) 周期点を含まない $S \subset I$ なる非可算無限集合 S が存在し，

(a) 全ての $x, y \in S\,(x \neq y)$ に対し

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$$

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$$

(b) 任意の $x \in S$，任意の周期点 y に対し

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$$

上極限と下極限

- **数列** a_n
- **集積値** $\Longleftrightarrow$ **部分列が収束する値**
- **上極限**

  $\limsup_{n\to\infty} a_n$: **集積値の最大値**
- **下極限**

  $\liminf_{n\to\infty} a_n$: **集積値の最小値**

李・ヨークの定理の条件

$$d \leq a < b < c \ \text{(or } d \geq a > b > c\text{)}, d = f(c), b = f(a), c = f(b)$$

これを図に描くと

李・ヨークの定理の意味

(1) **初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**
「f は全ての自然数 k に対して，k 周期軌道が I に存在する．」

李・ヨークの定理の意味

(1) **初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**

(2-a) S **に含まれる** 2 **点** x, y **が各々，写像を繰り返していくうちに，お互いにいくらでも近づき，また，ある有限な距離だけ離れる．初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**

「周期点を含まない $S \subset I$ **なる非可算無限集合** S **が存在し，**

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0$$

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \text{ 」}$$

李・ヨークの定理の意味

(1) 初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．

(2-a) S に含まれる 2 点 x, y が各々，写像を繰り返していくうちに，お互いにいくらでも近づき，また，ある有限な距離だけ離れる．初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．

(2-b) S 上の点を初期値にすると，その軌道はいかなる周期軌道にも漸近しない．

「任意の $x \in S$，任意の周期点 y に対し

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0$$」

李・ヨークの定理の意味

(1) **初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**

(2-a) S **に含まれる** 2 **点** x, y **が各々，写像を繰り返していくうちに，お互いにいくらでも近づき，また，ある有限な距離だけ離れる．初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**

(2-b) S **上の点を初期値にすると，その軌道はいかなる周期軌道にも漸近しない．**

注 1 I **の区間は全直線でも** OK

李・ヨークの定理の意味

(1) **初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**

(2-a) S **に含まれる** 2 **点** x, y **が各々，写像を繰り返していくうちに，お互いにいくらでも近づき，また，ある有限な距離だけ離れる．初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**

(2-b) S **上の点を初期値にすると，その軌道はいかなる周期軌道にも漸近しない．**

注1 I **の区間は全直線でも** OK

注2 $d = a$ **のとき，この定理の仮定は** 3 **周期軌道の存在に対応．** (1) **と併せると，**3 **周期軌道があれば，他の全ての周期軌道も存在する** ⇒ **シャルコフスキーの定理**

李・ヨークの定理の意味

(1) **初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**

(2-a) S **に含まれる** 2 **点** x, y **が各々，写像を繰り返していくうちに，お互いにいくらでも近づき，また，ある有限な距離だけ離れる．初期値を適当にとってやると，どんな周期の軌道も作ることが出来る．**

(2-b) S **上の点を初期値にすると，その軌道はいかなる周期軌道にも漸近しない．**

注１ I **の区間は全直線でも** OK

注２ $d = a$ **のとき，この定理の仮定は** 3 **周期軌道の存在に対応．** (1) **と併せると，**3 **周期軌道があれば，他の全ての周期軌道も存在する** $\Rightarrow$ **シャルコフスキーの定理**

注３ f **が** 2 **次元以上** $\rightarrow$ **マロットの定理**

シャルコフスキー列

全自然数を以下の順序に並べたもの

$$
\begin{array}{l}
3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 7 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2n+1 \Rightarrow \cdots \ (\text{奇数}) \\
2^1\cdot 3 \Rightarrow 2^1\cdot 5 \Rightarrow 2^1\cdot 7 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2^1\cdot(2n+1) \Rightarrow \cdots \ (\text{奇数}\times 2^1) \\
2^2\cdot 3 \Rightarrow 2^2\cdot 5 \Rightarrow 2^2\cdot 7 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2^2\cdot(2n+1) \Rightarrow \cdots \ (\text{奇数}\times 2^2) \\
\cdots \\
2^m\cdot 3 \Rightarrow 2^m\cdot 5 \Rightarrow 2^m\cdot 7 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2^m\cdot(2n+1) \Rightarrow \cdots \ (\text{奇数}\times 2^m) \\
\cdots \\
2^\infty\cdot 3 \Rightarrow 2^\infty\cdot 5 \Rightarrow 2^\infty\cdot 7 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2^\infty\cdot(2n+1) \Rightarrow \cdots \ (\text{奇数}\times 2^\infty) \\
\cdots \\
\Rightarrow 2^\infty \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2^6 \Rightarrow 2^5 \Rightarrow 2^4 \Rightarrow 2^3 \Rightarrow 2^2 \Rightarrow 2^1 \Rightarrow 1 \ (2^n)
\end{array}
$$

◀ **偶数＝$2^k\times$ 奇数なので，全ての自然数を網羅している．**

シャルコフスキーの定理

$f : R \to R$ は連続とする．f が n 周期点を持てば，シャルコフスキー列において $n \Rightarrow k$ である全ての自然数 k に対して，f は k–周期点を持つ．

- 李・ヨークの定理の (1)
- ロジスティック写像の分岐構造をほぼ予測している
- 周期点の安定性については述べていない

マロットの定理

- 李・ヨークの定理を多次元に拡張
  - 拡大的不動点
  - スナップバックリペラ

拡大的不動点(expanding fixed point)

- $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は微分可能であるとする．
  点 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ を中心として，半径 $r > 0$ の球を $B_r(\boldsymbol{z})$ とする．

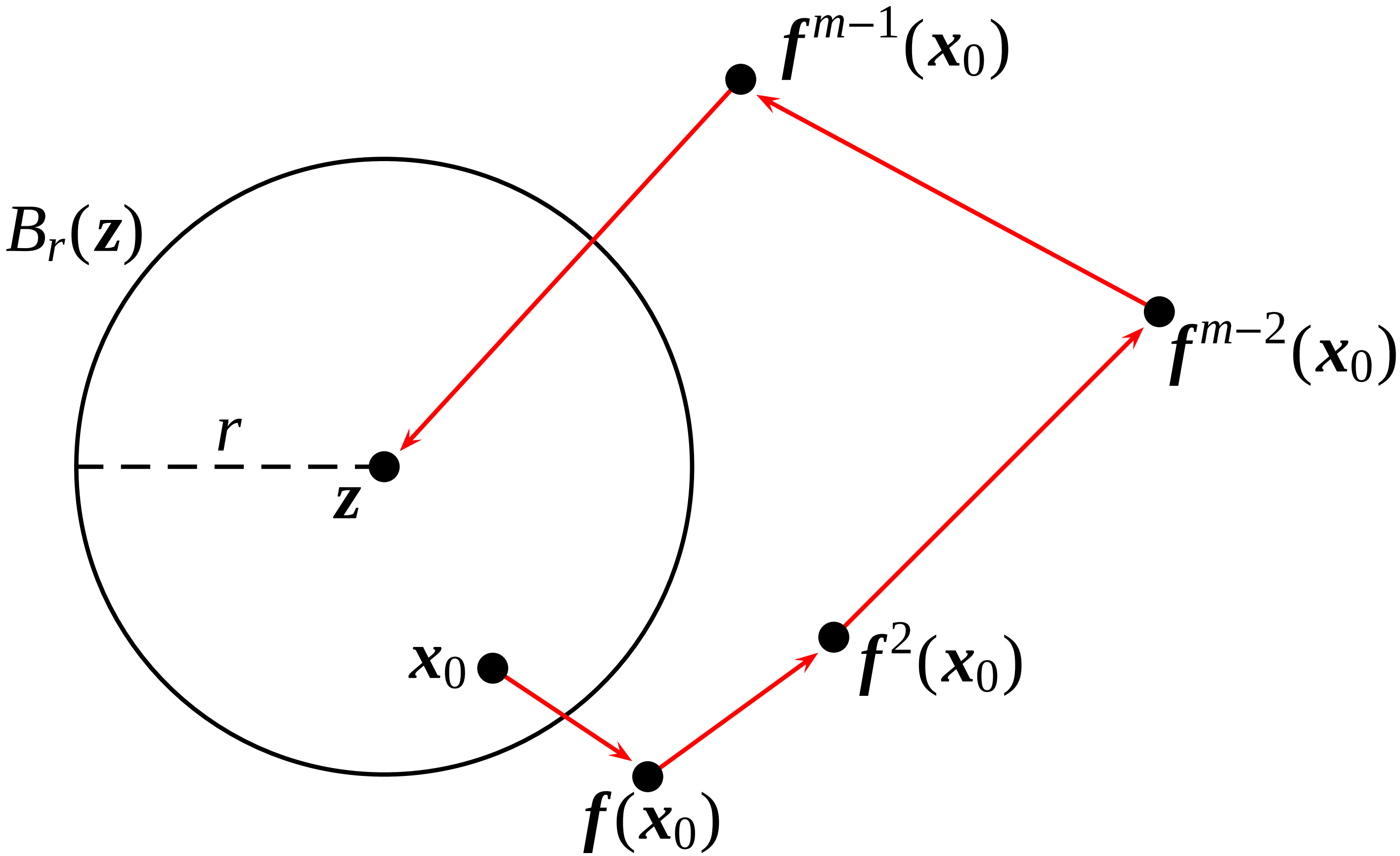
$$B_r(\boldsymbol{z}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}| \leq r\}$$

  $\boldsymbol{z}$ を $\boldsymbol{F}$ の不動点とする．任意の $\boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{z})$ において，$\boldsymbol{F}$ のヤコビアン行列 $D\boldsymbol{F}$ の全固有値の絶対値が 1 より大きいとき，$\boldsymbol{z}$ を $B_r(\boldsymbol{z})$ における拡大的不動点という．

- 不安定結節点 or 不安定渦状点

スナップバックリペラ (snapback repeller)

- $\boldsymbol{x}_0 \in B_r(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{z})$ と自然数 m が存在して，$\boldsymbol{f}^m(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{z}$ かつ $\boldsymbol{f}^k(\boldsymbol{x}_0) \notin B_r(\boldsymbol{z})(k = 1, 2, \ldots, m-1)$，$\det D\boldsymbol{f}^m(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$ を満たす拡大的不動点 $\boldsymbol{z}$



マロットの定理

微分可能写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **がスナックバックリペラを持つとする．このとき** f **は次の意味でカオス的である．**

(1) $^\forall k > N, {}^\exists N \in \mathbb{N}$ **に対して，** f **は** k **周期点を持つ．**

(2) **非可算無限集合** $S \subset \mathbb{R}^n$ **が存在し，** S **はいかなる周期点も含まず**

(a) $f(S) \subset S$

(b) $^\forall \boldsymbol{x}, {}^\forall \boldsymbol{y} \in S\,(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y})$ **に対し**

$$\limsup_{n\to\infty} |\boldsymbol{F}^n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}^n(\boldsymbol{y})| > 0$$

(c) $^\forall \boldsymbol{x} \in S$ **と任意の周期点** y **に対し**

$$\limsup_{n\to\infty} |\boldsymbol{F}^n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}^n(\boldsymbol{y})| > 0$$

(d) **非可算無限集合** $S_0 \subset S$ **が存在し，** $^\forall \boldsymbol{x}, {}^\forall \boldsymbol{y} \in S_0$ **に対し**

$$\limsup_{n\to\infty} |\boldsymbol{F}^n(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}^n(\boldsymbol{y})| = 0$$

李・ヨークの定理に対する批判

- 李・ヨークの定理の意味でのカオスの観測可能性
- 条件 (2) の S (スクランブル集合) のルベーグ測度が 0
- ルベーグ測度
  - 点集合などの「長さ」を決める
  - 例 : カントール集合
- 位相的カオス (topological chaos) or 形式的カオス

しかし，

李・ヨークの定理のカオスの帰結は，
一種のカオスの定義を与えている

→ カオスの定義とは?

カオスの定義

カオスの定義

実は,「カオスの定義」自体が非常にチャレンジングな話題

カオスの定義

実は,「カオスの定義」自体が非常にチャレンジングな話題

↓

様々なクラスのモデルを対象

- **非線形性のクラス**
- **次元 (自由度)**
- **保存系?散逸系?**
- **同相写像?**

カオスの定義

実は,「カオスの定義」自体が非常にチャレンジングな話題

様々なクラスのモデルを対象

非線形性のクラス
次元 (自由度)
保存系?散逸系?
同相写像?

どのモデル，どの対象にも，共通で普遍的な定義ではなく，
限定されたクラスに対して，カオスを特徴づけるもの

Devaney のカオス

状態空間を I とする．以下の条件が成立するとき，$f : I \to I$ は I 上でカオス的である．

(1) f は初期条件に鋭敏に依存する．
$\Longleftrightarrow$ 予測不可能性を有していること．

(2) f は位相的に推移的 (topological transitivity) である．
$\Longleftrightarrow$ 分解不可能であること．

(3) 周期点は I において稠密である．
$\Longleftrightarrow$ 規則性があること．

(1) f は初期条件に鋭敏に依存

任意の $x \in I$ と x の任意の近傍 V に対して，$|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ となるような $y \in V$ と自然数 $n > 0$ と $\delta > 0$ が存在する．

- 初期状態において，どんなに近い点 (x と y) であっても，写像を繰り返すうち ($f^n(x)$ と $f^n(y)$)，その距離 ($|f^n(x) - f^n(y)|$) が，拡大される．その距離は，δ より大きい．
- 上の定義では，必ずしも指数関数的とは言っていない．

(2) f は位相的に推移的

任意の開集合の対 $U, V \subset I$ に対して，$f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ であるような k が存在する．

- I の任意の小さい近傍 (U) の中に，写像を繰り返すうち $(f^k(U))$，I の他の任意の近傍 (V) を訪れる $(f^k(U) \cap V \neq \emptyset)$ ような点が存在する．
- 任意の開区間 U の中に，I の任意に分割された区間を落ちこぼすことなく経めぐる．
- 分解不可能

(3) 周期点は I において稠密

- **閉包** (closure)
  A の閉包を $\overline{A}$ とする．開円板 $\rightarrow$ 閉円板
- **稠密性** (Dense)
  位相空間 X の部分集合 A について，$\overline{A} = X$ のとき，A は X において稠密
- f の周期点の集合を $\mathrm{Per}(f)$ とする．$\mathrm{Per}(f)$ を含む最小の閉集合，つまり，$\mathrm{Per}(f)$ の閉包 $\overline{\mathrm{Per}(f)} = I$ のとき，$\mathrm{Per}(f)$ は I の中で稠密である．
  - 周期点集合 $\mathrm{Per}(f)$ が I において稠密とは，I の中の任意の空でない開集合 U が $\mathrm{Per}(f)$ と交わること．
  - 任意の点 $x \in I$ のどんな近くにも $\mathrm{Per}(f)$ の点がある．

Devaney の定義

(1) **初期値鋭敏依存性**

(2) **位相推移性**

(3) **稠密性**

$$\text{条件 }(1) \Longleftarrow \text{条件 }(2), (3)$$

$$\text{条件 }(1), (3) \Longleftarrow \text{条件 }(2)$$

位相エントロピ h_{top}

- f : 区間上の写像，区分的に単調
- ラップ数 lap(f) : f の単調な部分区間の個数
  例 : テント写像 F の場合
  lap(F) = 2, lap(F^2) = 4, $\cdots$, lap(F^n) = 2^n
- 定義
  $$h_{\mathrm{top}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathrm{lap}(f^n)$$
- 単調性を示す部分空間の拡大率
  $\Rightarrow$ 写像の持つ形状の複雑さを定量化
  例 : テント写像 F の場合
  $$h_{\mathrm{top}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log 2^n = \log 2$$
- $h_{\mathrm{top}} > 0 \Rightarrow$ Li-Yorke のカオスが存在

リアプノフ指数 λ

- 周期点の安定性を議論するために，$(f^n)'(x)$ を用いた
- カオスとなる場合，有限の n では切れないので以下のような指標を用いる

$$
\begin{aligned}
\lambda &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \left| (f^n)'(x(0)) \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left| f'(x(0)) \right|
\end{aligned}
$$

注) chain rule

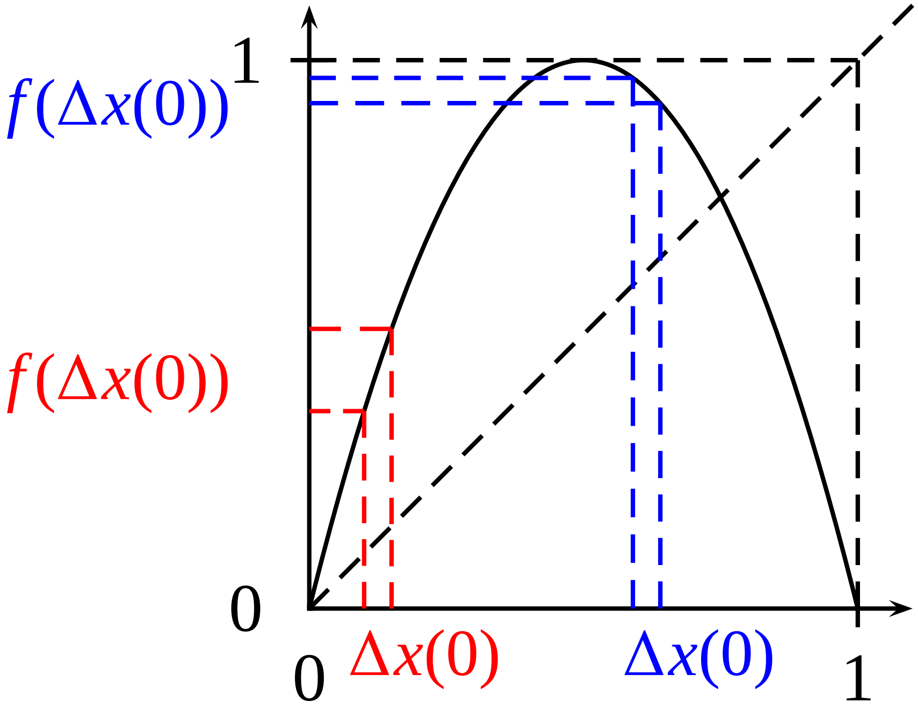
$$
(f^n(x))' = \prod_{i=1}^{n-1} f'(f^i(x))
$$

リアプノフ指数の意味

１次元力学系 $x(n+1) = f(x(n))$ に対し，$\Delta x(0)$, $\Delta x(0)$ を与える

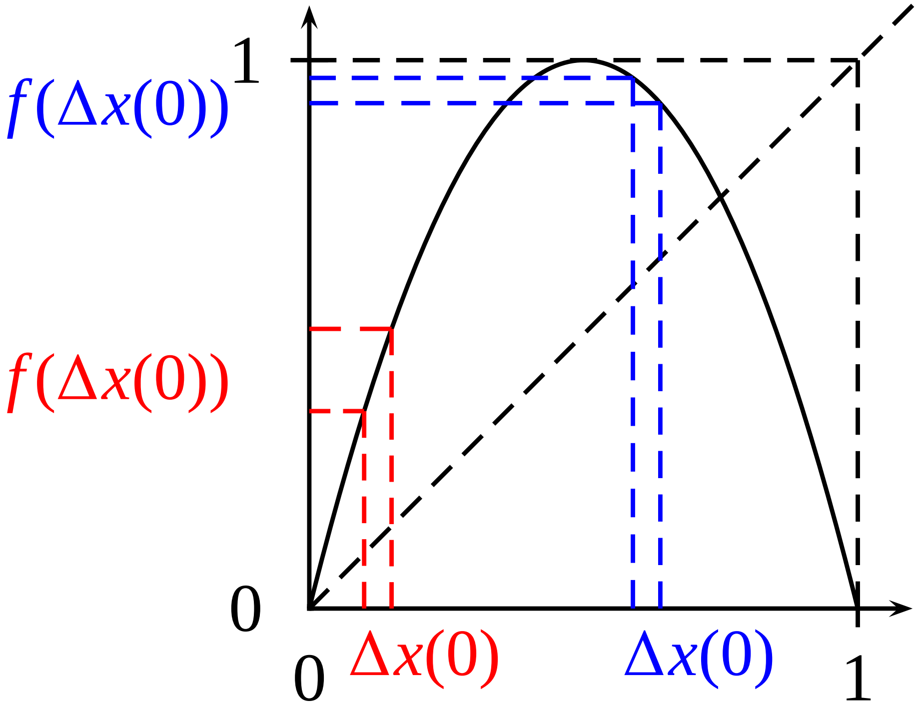
リアプノフ指数の意味

１次元力学系 $x(n+1) = f(x(n))$ に対し，$\Delta x(0)$, $\Delta x(0)$ を与える



リアプノフ指数の意味

１次元力学系 $x(n+1) = f(x(n))$ に対し，$\Delta x(0)$, $\Delta x(0)$ を与える

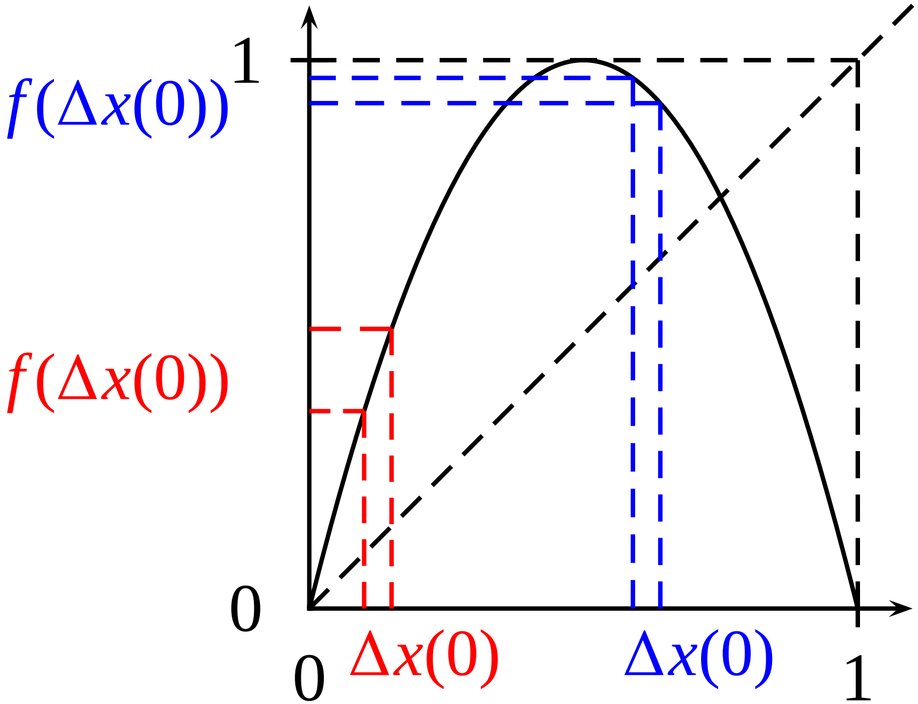


$\Delta x(0) \to |f'(\Delta x(0))| > 1$

$\Delta x(0) \to |f'(\Delta x(0))| < 1$

リアプノフ指数の意味

１次元力学系 $x(n+1) = f(x(n))$ に対し，$\Delta x(0)$, $\Delta x(0)$ を与える



$\Delta x(0) \to |f'(\Delta x(0))| > 1$

$\Delta x(0) \to |f'(\Delta x(0))| < 1$

$$\boxed{\lambda = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} \log |f'(x(n))|}$$

カオスの分類

◀ 位相エントロピ h_{top} とリアプノフ指数 λ による分類

$h_{\text{top}} > 0 \iff$ **形式的カオス** (topological chaos)

$$\begin{cases} \lambda < 0 & : \text{窓} \\ \lambda > 0 & : \text{可観測カオス} \end{cases}$$

参考文献

- 小室元政 :
  「カオスの定義」, in 合原一幸編 「カオスセミナー」 第 1 章，海文堂，1994.
- 香田徹，合原一幸:
  「カオス概論」，in 合原一幸編著「カオス」第 1 章，サイエンス社，1991.
- 早間 慧 (はやま さとし):
  カオス力学の基礎 第 2 版，現代数学社．