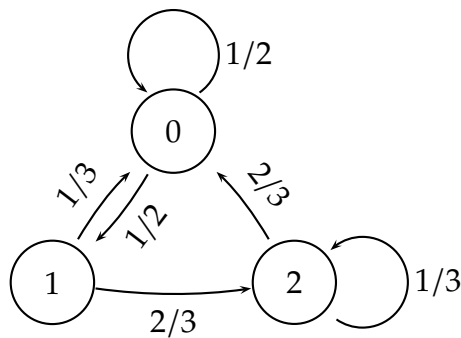


1. 3 元マルコフ情報源 $S = \{0, 1, 2\}$ が以下のような状態遷移行列を持っている .

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

- (あ) シャノン線図を描きなさい (5 点) .

(答)



- (い) 各状態の定常確率を求めなさい (5 点) .

(答) 定常確率を p_1, p_2, p_3 とすると ,

$$(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2, p_3) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

となる . $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ と併せると $p_1 = 1/2, p_2 = 1/4, p_3 = 1/4$

2. 送信記号集合 $A = \{a_1, a_2\}$, 受信記号集合 $B = \{b_1, b_2\}$, 通信路行列

$$T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

である通信路について , 以下の問いに答えなさい .

- (a) この通信路の名称を答えなさい (5 点) .

(答) 2 元対称通信路

- (b) 確率 p は何と呼ばれるか (5 点) .

(答) 誤り確率

(c) $p(a_1) = x, p(a_2) = 1 - x$ とする . $p(b_1), p(b_2)$ を求めよ (両方で 5 点) .

(答)

$$\begin{aligned} p(a_1) &= (1-p)x + p(1-x) = x + p - 2px \\ p(a_2) &= (1-p)(1-x) + px = 1 - (x + p - 2px) \end{aligned}$$

(d) $H(B)$ を求めよ (10 点) .

(答) $x + p - 2px = \alpha$ とおくと $p(b_1) = \alpha, p(b_2) = 1 - \alpha$ となるので ,

$$H(B) = -\alpha \log_2 \alpha - (1 - \alpha) \log_2 (1 - \alpha) = \mathcal{H}(\alpha)$$

(e) $H(B|A)$ を求めよ (10 点) .

(答)

$$\begin{aligned} H(B|A) &= -\sum_A \sum_B p(a, b) \log_2 p(b|a) \\ &= -p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p) \\ &= \mathcal{H}(p) \end{aligned}$$

(f) 通信路容量 C を求めよ (10 点) .

(答)

$$\begin{aligned} C &= \max_{0 \leq x \leq 1} I(A; B) \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} (H(B) - H(B|A)) \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} (\mathcal{H}(\alpha) - \mathcal{H}(p)) \\ &= \max_{\alpha} (\mathcal{H}(\alpha) - \mathcal{H}(p)) \\ &= \max_{\alpha} \mathcal{H}(\alpha) - \mathcal{H}(p) \end{aligned}$$

$\alpha = 1/2$ で $\mathcal{H}(\alpha)$ で最大値 1 をとる . よって $C = 1 - \mathcal{H}(p)$

3. 情報源 $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ に対する以下の表のような符号化を考える . 以下の問いに答えよ .

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
s_1	0	1	0	0	100	1
s_2	10	110	10	01	101	01
s_3	110	001	110	011	110	000
s_4	1110	011	1110	0111	111	0010
s_5	1011	101	11110	01111	000	0011

(1) 一意に復号不可能な符号はどれか . 理由も示すこと (4 点 , 4 点) .

(答) C_1, C_2

C_1 では $10110 \rightarrow bc$ または ea , C_2 では $1101 \rightarrow ae$ または ba となるため .

(2) 瞬時符号はどれか . 理由も示すこと (6 点 , 6 点) .

(答) C_3, C_5, C_6

符号木を描くと C_3, C_5, C_6 では終端に符号が割り振られるが , C_4 では , 枝の途中で割り振られる .

(3) 情報源 S の発生確率を

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 & 0.0625 \end{pmatrix}$$

とする．この情報源に適した符号はどれか．理由も示すこと(2点, 2点)．

(答) 瞬時符号 C_3, C_5, C_6 から平均符号長が最も短いものを選べば良い．

$$\begin{aligned}L_{C_3} &= \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{16} \times 3 = 1 \times 3 = 3 \\L_{C_5} &= \\L_{C_6} &= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{16} \times 4 + \frac{1}{16} \times 4 = 15/8 = 1.875\end{aligned}$$

より, L_{C_6} が最も短いので, C_6 が最適となる．

(4) 情報源 S の発生情報量を求めなさい(10点)．

(答)

$$\begin{aligned}H(S) &= - \sum_{i=1}^5 P(s_i) \log_2 P(s_i) \\&= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \log_2 \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \log_2 \frac{1}{16} \\&= 1.875[\text{bits}]\end{aligned}$$

(5) 情報源 S のハフマン符号を構成し, その平均符号語長, 効率, 冗長度を求めなさい(ハフマン符号 9点, 平均符号化長, 効率, 冗長度, 各2点)．

平均符号語長を L , 効率を e , 冗長度を r とすると,

$$\begin{aligned}L &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + 4 \times \frac{1}{16} \\&= \frac{15}{8} \\e &= H(S)L = 1 \\r &= 1 - e = 0\end{aligned}$$