テーラ展開[*1]

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で n 回連続微分可能ならば，$a \leq x \leq b$ において

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r + R_n \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2 \\
&= + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n
\end{aligned}
$$

ここに，R_n は剰余項とよばれ，つぎのように表示される．

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= \frac{(x-a)-p}{(n-1)!p}(x-\xi)^{n-p} f^{(n)}(\xi) \\
&= \frac{(x-a)-p}{(n-1)!p}(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))
\end{aligned}
$$

ただし，$n \geq p > 0$，$0 < \theta < 1$，$a < \xi < x$，$\xi = a + \theta(x-a)$．

ここで $p = n, 1$ ととれば，つぎの形にも表わされる．

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(\xi) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(x-a)(x-\xi)^{n-1} f^{(n)}(\xi)
\end{aligned}
$$

[*1] 森口，宇田川，一松著，岩波 数学公式 II 級数・フーリエ解析，岩波書店，124 ページより．