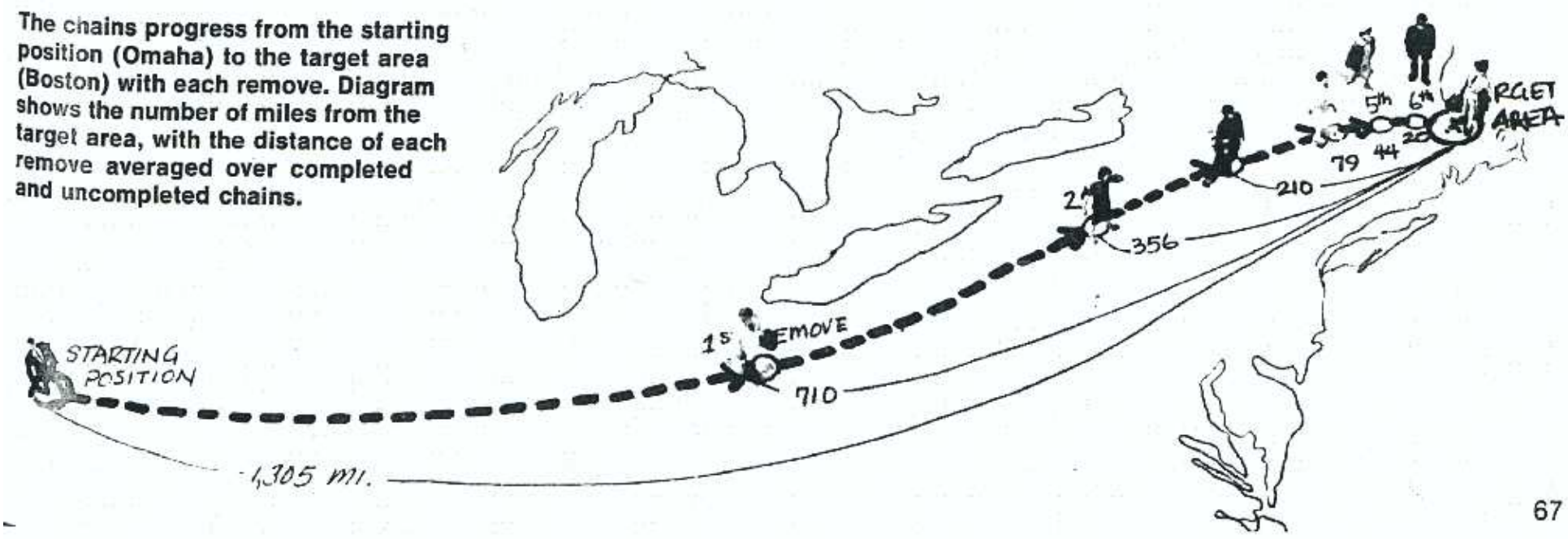
複雑ネットワーク入門

インターネットから人間関係まで

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻
工学部 情報システム工学科
338–8570 **さいたま市 桜区 下大久保** 255
Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716
Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp
URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru

ある実験

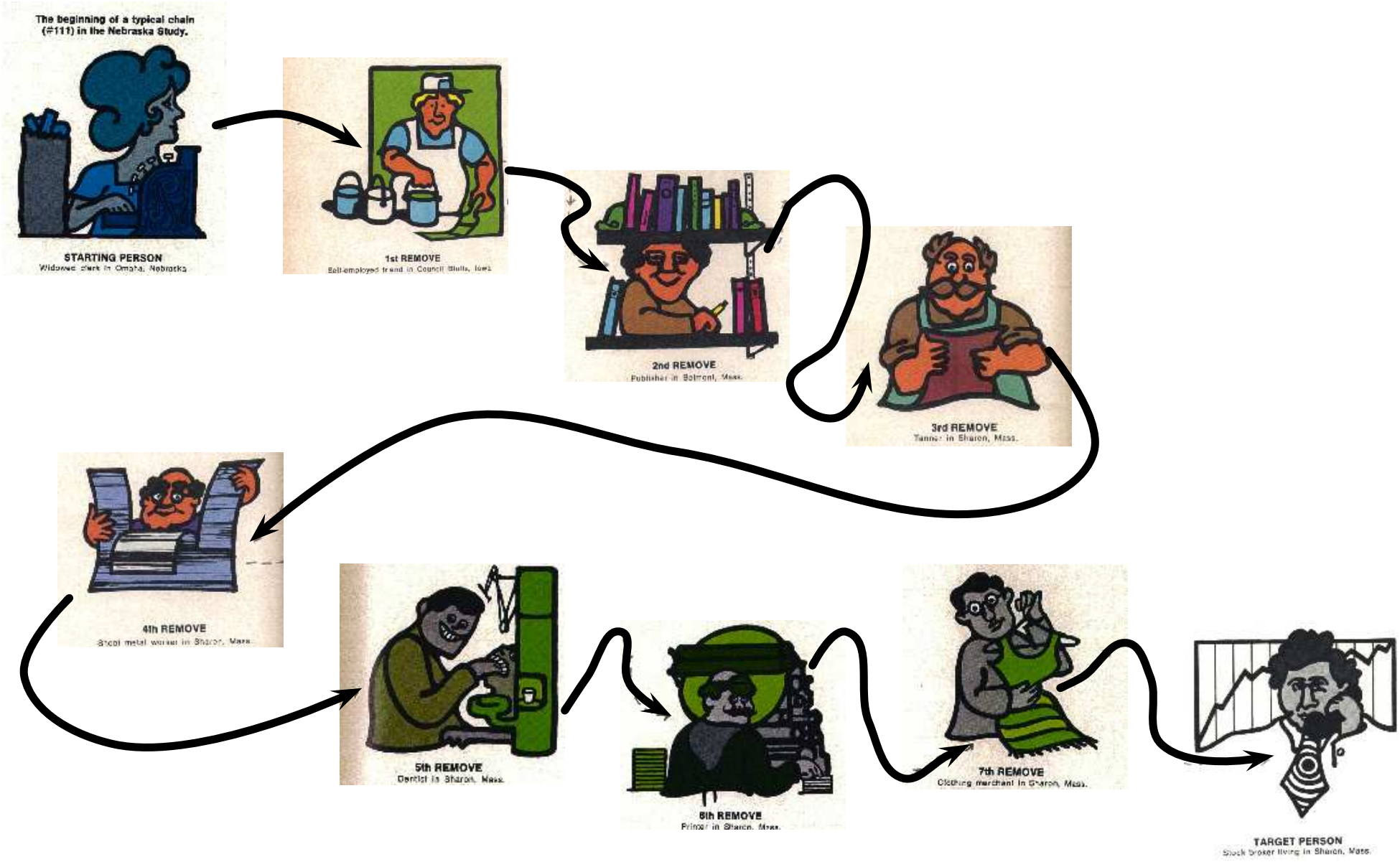


- Stanley Milgram (**アメリカの心理学者**)

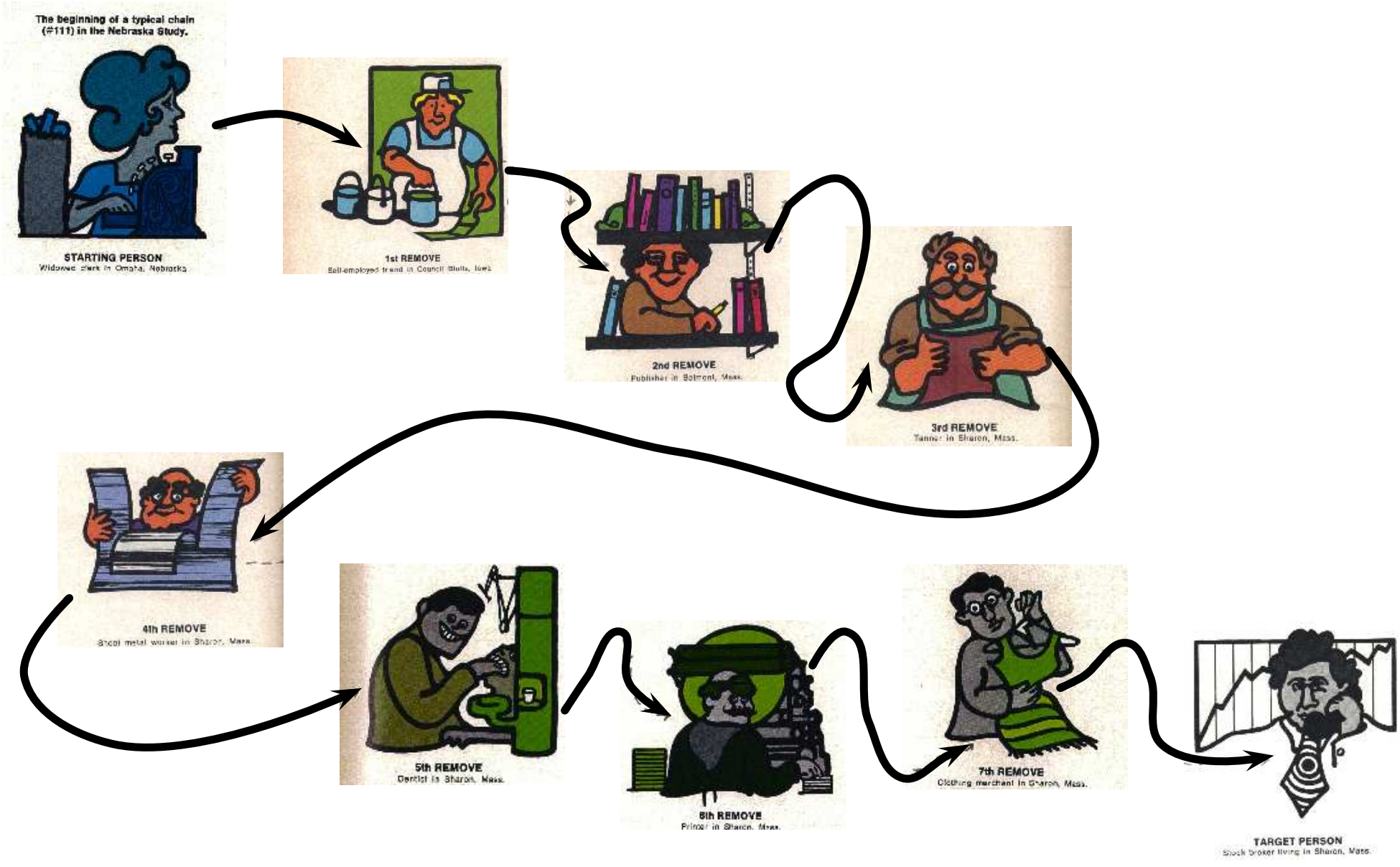
仮説　世界が知人関係からなるネットワークと考えると，世界はある意味で小さい． ⇒ Small World Problem

- **手紙渡しの実験**
  - Witchita (Kansas **州**) → Boston (Massachusetts **州**)
  - Omaha (Nebraska **州**) → Boston (Massachusetts **州**)

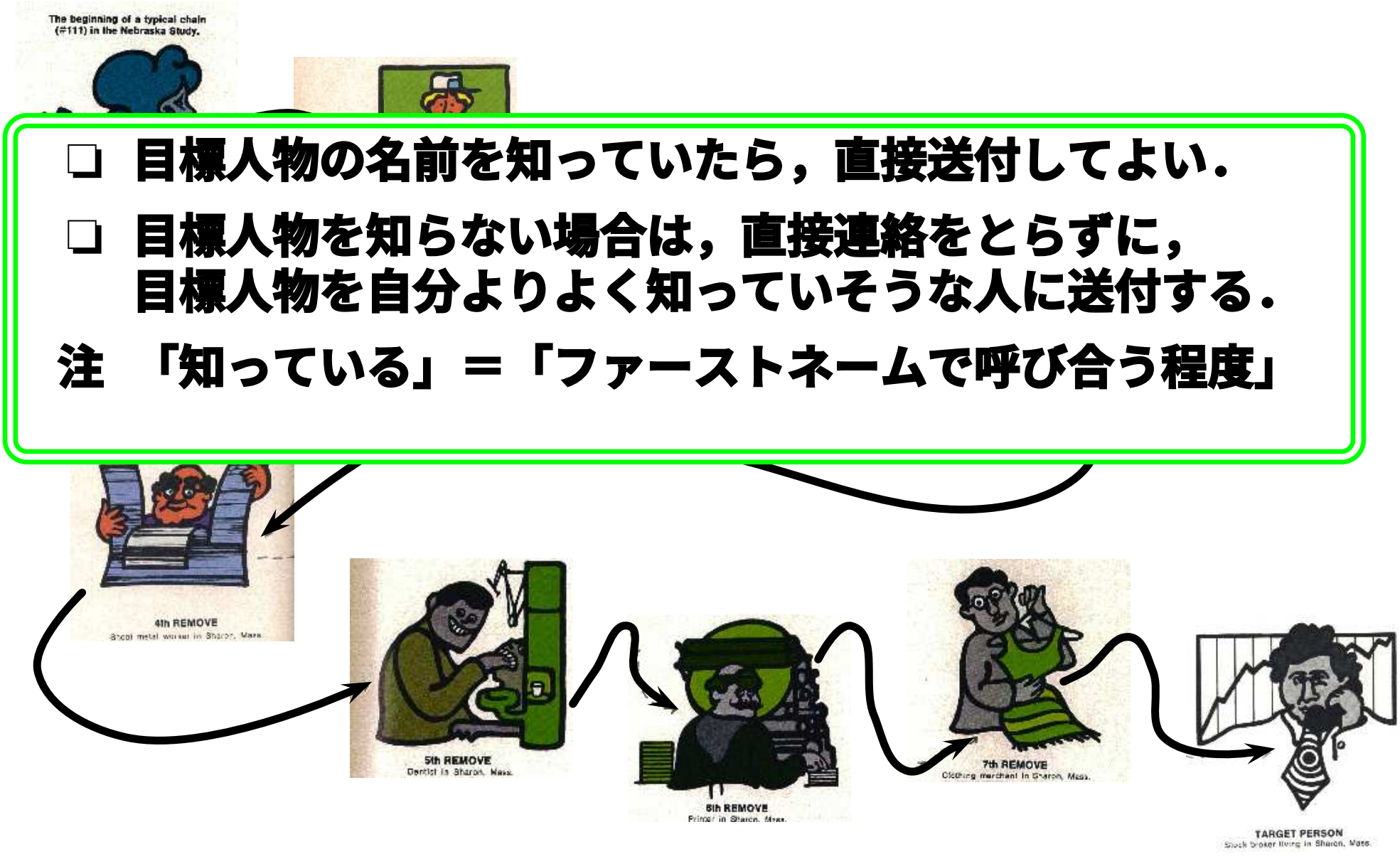
手紙渡しの実験


The beginning of a typical chain (#111) in the Nebraska Study.
STARTING PERSON
1st REMOVE
2nd REMOVE
3rd REMOVE
4th REMOVE
5th REMOVE
Dentist in Sharon, Mass.
6th REMOVE
7th REMOVE
Clothing merchant in Sharon, Mass.
TARGET PERSON

手紙渡しの実験


The beginning of a typical chain (#111) in the Nebraska Study.
STARTING PERSON
1st REMOVE
2nd REMOVE
3rd REMOVE
4th REMOVE
5th REMOVE
Dentist in Sharon, Mass.
6th REMOVE
7th REMOVE
Clothing merchant in Sharon, Mass.
TARGET PERSON

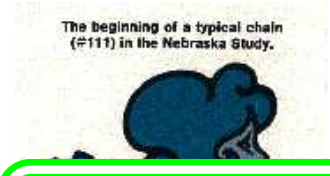
手紙渡しの実験



- ❑ 目標人物の名前を知っていたら，直接送付してよい．
- ❑ 目標人物を知らない場合は，直接連絡をとらずに，
  目標人物を自分よりよく知っていそうな人に送付する．

注　「知っている」＝「ファーストネームで呼び合う程度」

手紙渡しの実験

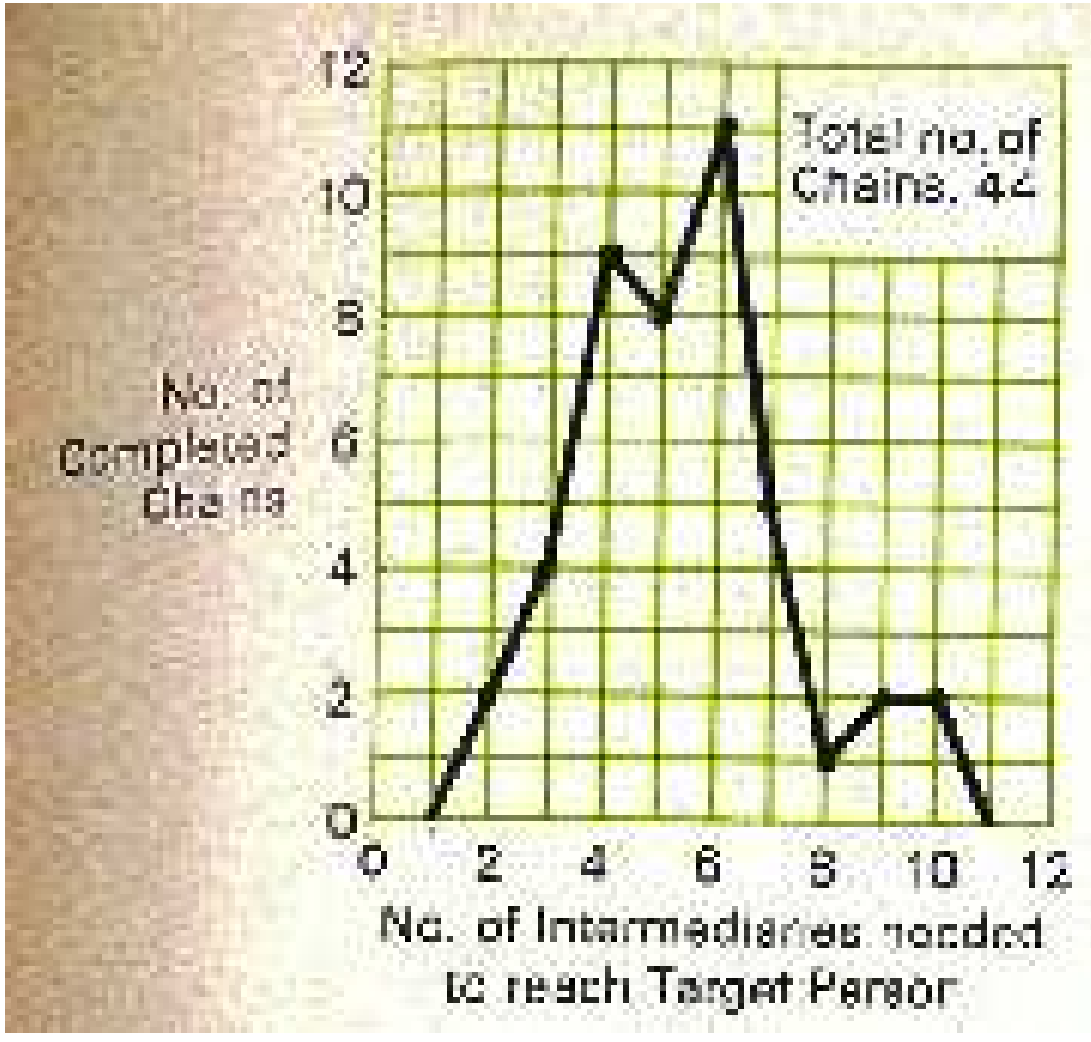


- 目標人物の名前を知っていたら，直接送付してよい．
- 目標人物を知らない場合は，直接連絡をとらずに，
  目標人物を自分よりよく知っていそうな人に送付する．

注　「知っている」＝「ファーストネームで呼び合う程度」

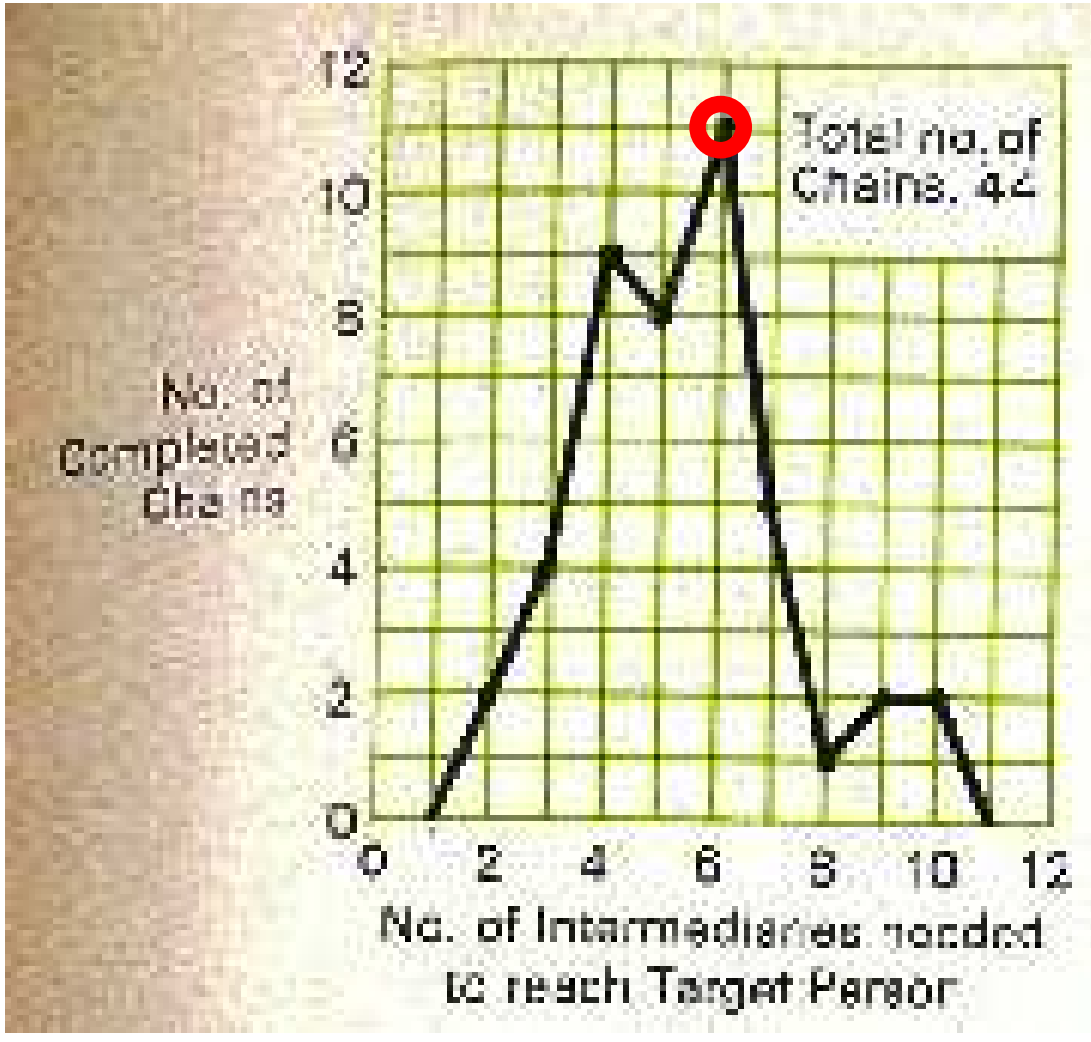
**手紙が宛先に届けられるには，
平均何人必要だっただろうか?**

驚くべき結果



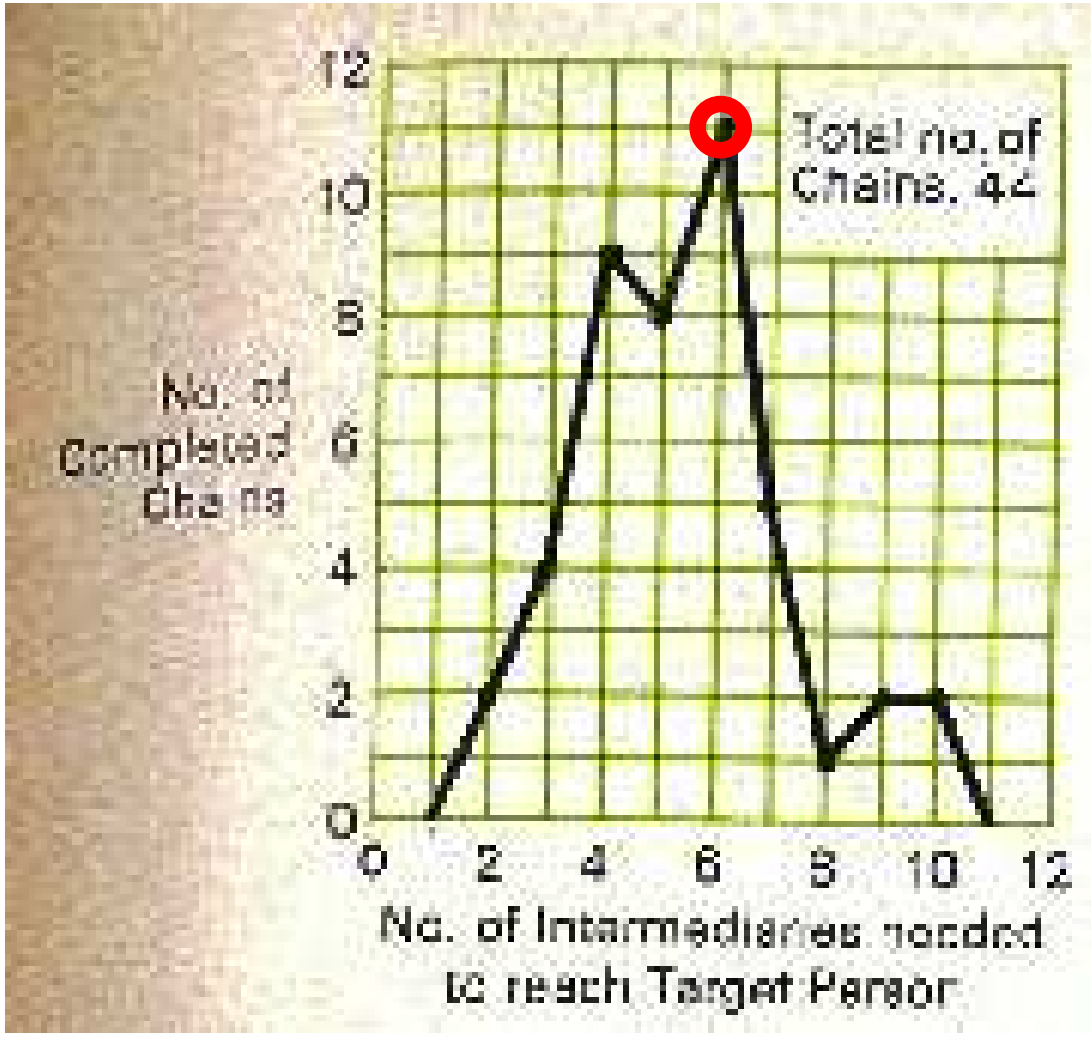
S. Milgram: “The Small-World Problem,” Psychology Today, Vol.1, pp.67–67, 1967.

驚くべき結果



S. Milgram: “The Small-World Problem,” Psychology Today, Vol.1, pp.67–67, 1967.

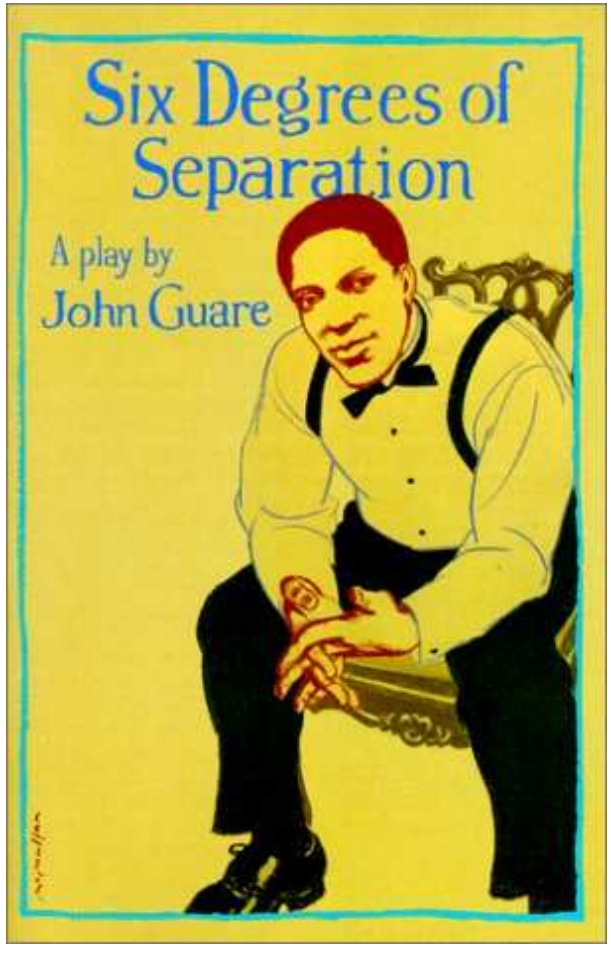
驚くべき結果

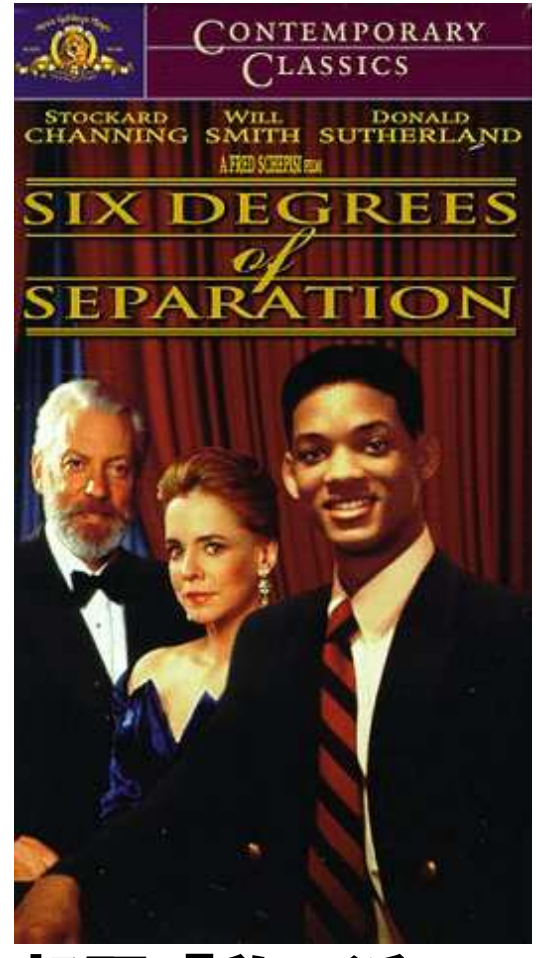


6 **次の隔たり**
Six Degrees of Separation

S. Milgram: “The Small-World Problem,” Psychology Today, Vol.1, pp.67–67, 1967.

Six Degrees of Separation





邦題『私に近い６人の他人』

ケビン・ベーコン・ゲーム

- **俳優の共演関係**
  - **ケビン・ベーコン自身のベーコン数は**
  - **ケビン・ベーコンと共演した俳優のベーコン数は**
  - **ケビン・ベーコンと共演した俳優と共演した俳優のベーコン数は**
- http://www.cs.virginia.edu/oracle/
- **例: マリリン・モンロー**
  The Oracle says: Marilyn Monroe has a Bacon number of 2.
  Marilyn Monroe was in The Misfits (1961) with Eli Wallach. Eli Wallach was in Mystic River (2003) with Kevin Bacon.

ケビン・ベーコン・ゲーム

- **俳優の共演関係**
  - **ケビン・ベーコン自身のベーコン数は** 0
  - **ケビン・ベーコンと共演した俳優のベーコン数は**
  - **ケビン・ベーコンと共演した俳優と共演した俳優のベーコン数は**
- http://www.cs.virginia.edu/oracle/
- **例: マリリン・モンロー**
  The Oracle says: Marilyn Monroe has a Bacon number of 2.
  Marilyn Monroe was in The Misfits (1961) with Eli Wallach. Eli Wallach was in Mystic River (2003) with Kevin Bacon.

ケビン・ベーコン・ゲーム

- **俳優の共演関係**
  - **ケビン・ベーコン自身のベーコン数は** 0
  - **ケビン・ベーコンと共演した俳優のベーコン数は** 1
  - **ケビン・ベーコンと共演した俳優と共演した俳優のベーコン数は**
- http://www.cs.virginia.edu/oracle/
- **例: マリリン・モンロー**
  The Oracle says: Marilyn Monroe has a Bacon number of 2.
  Marilyn Monroe was in The Misfits (1961) with Eli Wallach. Eli Wallach was in Mystic River (2003) with Kevin Bacon.

ケビン・ベーコン・ゲーム

- **俳優の共演関係**
  - **ケビン・ベーコン自身のベーコン数は** 0
  - **ケビン・ベーコンと共演した俳優のベーコン数は** 1
  - **ケビン・ベーコンと共演した俳優と共演した俳優のベーコン数は** 2
- http://www.cs.virginia.edu/oracle/
- **例: マリリン・モンロー**
  The Oracle says: Marilyn Monroe has a Bacon number of 2.
  Marilyn Monroe was in The Misfits (1961) with Eli Wallach. Eli Wallach was in Mystic River (2003) with Kevin Bacon.

ケビン・ベーコン数の分布

ベーコン数	俳優数	累積数
0	1	1
1	1,879	1,880
2	158,022	159,902
3	447,500	607,402
4	109,360	716,762
5	8,178	724,940
6	863	725,803
7	93	725,896
8	13	725,909
平均 2.954	**計** 725,909 **人**	

(http://www.cs.virginia.edu/oracle/ **より** 2005 **年** 7 **月** 9 **日調査**)

ケビン・ベーコン数の分布

ベーコン数	俳優数	累積数
0	1	1
1	1,879	1,880
2	158,022	159,902
3	447,500	607,402
4	109,360	716,762
5	8,178	724,940
6	863	725,803
7	93	725,896
8	13	725,909
平均 2.954	**計** 725,909 **人**	

(http://www.cs.virginia.edu/oracle/ **より** 2005 **年** 7 **月** 9 **日調査**)

我々はネットワークの中に生きている

- **対人関係・友人関係**
- **俳優の共演関係**
- **インターネット** [**コンピュータが物理的に接続**]
- World Wide Web [**ハイパーリンク**]
- **会社間の取引関係**
- **遺伝子ネットワーク**
- **伝染病** (**ペスト，エボラ出血熱，**SARS)
- **ウイルス** (**生物/コンピュータ**)
- **脳・神経回路網**
- **飛行機・道路・鉄道**
- **電力輸送配電網**

問題意識

- 現実世界のネットワークは，なぜ　　のか?

  の隔たり (手紙渡しの実験)

  - ベーコン数の平均値
- 現実世界のネットワークには，

  があるのだろうか？
  - もしあるとしたら，　　だろうか？
  - それは　　されるのだろうか？

↓ 方法論の一つ

問題意識

- 現実世界のネットワークは，なぜ狭い のか?

  の隔たり (手紙渡しの実験)

  - ベーコン数の平均値
- 現実世界のネットワークには，

  があるのだろうか？

  - もしあるとしたら，　だろうか？
  - それは　されるのだろうか？

↓ 方法論の一つ

問題意識

- 現実世界のネットワークは，なぜ狭い のか?
  - 6次 の隔たり (手紙渡しの実験)
  - ベーコン数の平均値 2.954
- 現実世界のネットワークには，
  があるのだろうか？
  - もしあるとしたら，　だろうか？
  - それは　されるのだろうか？

方法論の一つ

問題意識

- 現実世界のネットワークは，なぜ狭い のか?
  - 6次 の隔たり (手紙渡しの実験)
  - ベーコン数の平均値 2.954
- 現実世界のネットワークには，
  - 構造的な特徴 があるのだろうか？
  - もしあるとしたら，　　だろうか？
  - それは　　されるのだろうか？

↓ 方法論の一つ

問題意識

- 現実世界のネットワークは，なぜ狭い のか?
  - 6次 の隔たり (手紙渡しの実験)
  - ベーコン数の平均値 2.954
- 現実世界のネットワークには，
  - 構造的な特徴 があるのだろうか？
  - もしあるとしたら，どのような特徴 だろうか？
  - それは されるのだろうか？

↓ 方法論の一つ

問題意識

- 現実世界のネットワークは，なぜ狭い のか?
  - 6次 の隔たり (手紙渡しの実験)
  - ベーコン数の平均値 2.954
- 現実世界のネットワークには，
  - 構造的な特徴 があるのだろうか？
  - もしあるとしたら，どのような特徴 だろうか？
  - それは どのように形成 されるのだろうか？

方法論の一つ

問題意識

- **現実世界のネットワークは，なぜ狭い のか?**
  - 6 次 の隔たり (手紙渡しの実験)
  - ベーコン数の平均値 2.954
- **現実世界のネットワークには，**
  - 構造的な特徴 があるのだろうか？
  - もしあるとしたら，どのような特徴 だろうか？
  - それは どのように形成 されるのだろうか？

方法論の一つ

グラフ理論 (graph theory)

グラフ理論

- **純粋数学の一分野** (1736 **年以降**)
  - Euler, Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchhoff . . .
  - Erdös, Rényi (random network, 1950's)
  - Watts, Strogatz (small world network, 1998)
  - Barabási and collegues (scale free network, 1999)
- **グラフとは？**
  - **繋がりを　　と　　で表現．**
    例えば，人を　　すると，友人関係は　　で表される．
  - **人と友人関係に限らず，いろいろなネットワークにおける繋がりを　　したもの**

グラフ理論

- **純粋数学の一分野** (1736 **年以降**)
  - Euler, Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchhoff . . .
  - Erdös, Rényi (random network, 1950's)
  - Watts, Strogatz (small world network, 1998)
  - Barabási and collegues (scale free network, 1999)
- **グラフとは？**
  - **繋がりを 点 (ノード，**node**) と で表現．**
    例えば，人を すると，友人関係は で表される．
  - **人と友人関係に限らず，いろいろなネットワークにおける繋がりを したもの**

グラフ理論

- **純粋数学の一分野** (1736 **年以降**)
  - Euler, Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchhoff . . .
  - Erdös, Rényi (random network, 1950's)
  - Watts, Strogatz (small world network, 1998)
  - Barabási and collegues (scale free network, 1999)
- **グラフとは？**
  - **繋がりを 点 (ノード，**node**) と 線 (リンク，**link**) で表現．**
    例えば，人を　　すると，友人関係は　　で表される．
  - **人と友人関係に限らず，いろいろなネットワークにおける**
    繋がりを　　したもの

グラフ理論

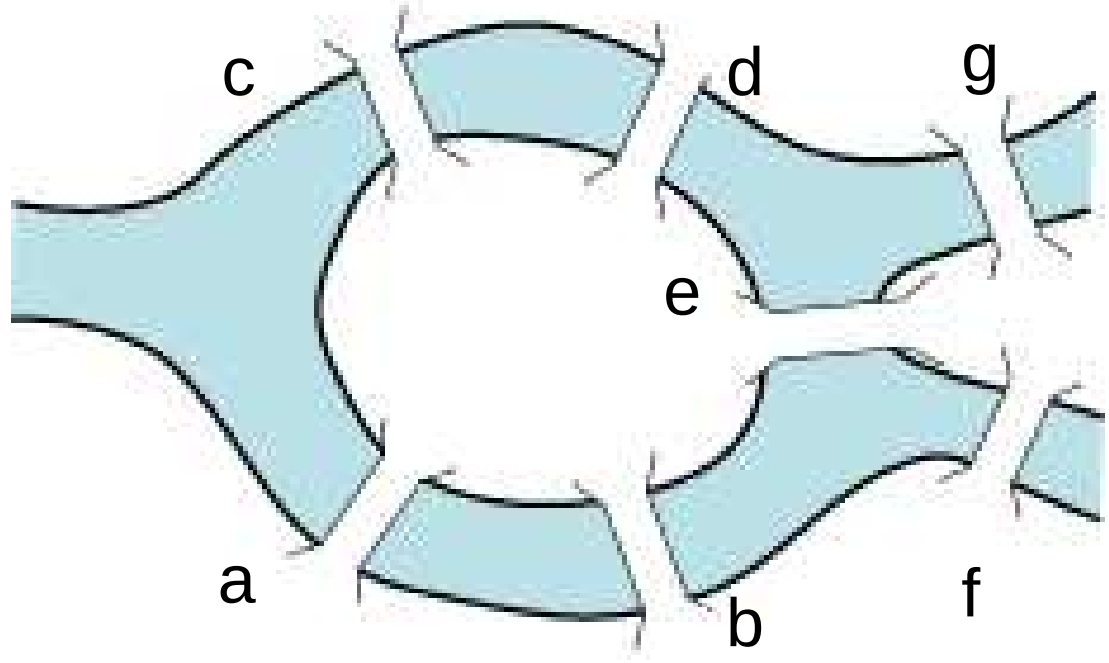
- **純粋数学の一分野** (1736 **年以降**)
  - Euler, Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchhoff . . .
  - Erdös, Rényi (random network, 1950's)
  - Watts, Strogatz (small world network, 1998)
  - Barabási and collegues (scale free network, 1999)
- **グラフとは？**
  - **繋がりを 点 (ノード，**node**) と 線 (リンク，**link**) で表現．**
    例えば，人を 点 すると，友人関係は 線 で表される．
  - **人と友人関係に限らず，いろいろなネットワークにおける**
    繋がりを したもの

グラフ理論

- **純粋数学の一分野** (1736 **年以降**)
  - Euler, Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchhoff . . .
  - Erdös, Rényi (random network, 1950's)
  - Watts, Strogatz (small world network, 1998)
  - Barabási and collegues (scale free network, 1999)
- **グラフとは？**
  - **繋がりを 点 (ノード，**node**) と 線 (リンク，**link**) で表現．**
    例えば，人を 点 すると，友人関係は 線 で表される．
  - **人と友人関係に限らず，いろいろなネットワークにおける**
    繋がりを 抽象化 したもの

グラフ理論のはじまり (1736)

ケーニヒスベルグ (プロイセン) の橋 (1875 **年以前**)

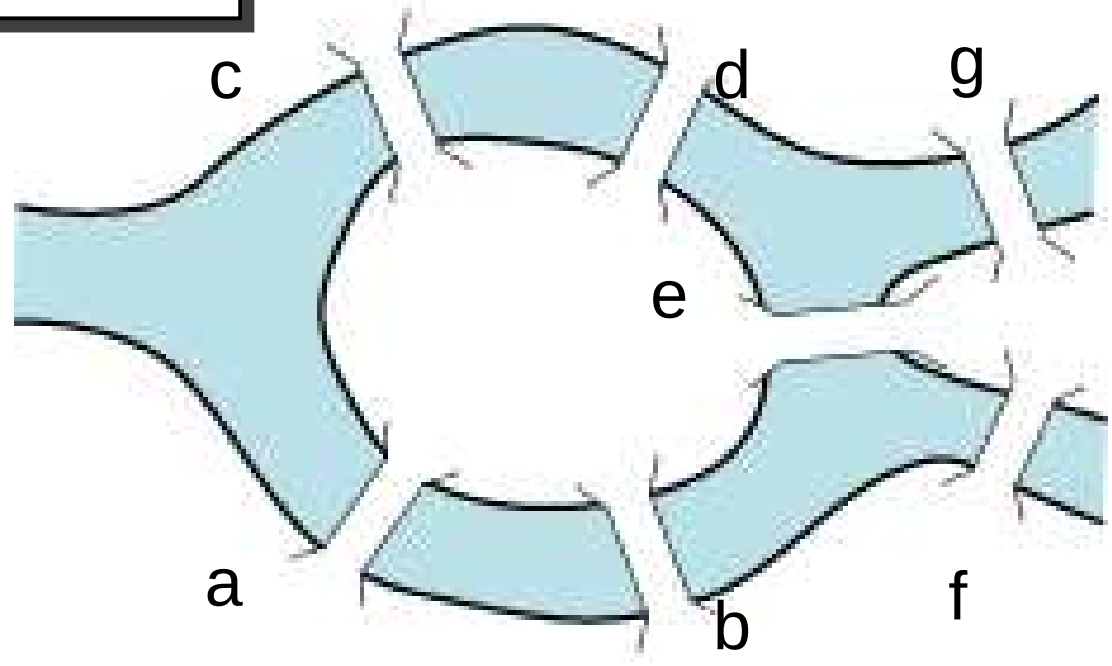


どの橋も二度渡ることなく，全ての橋を渡ることはできるか？

⇒ **一筆書きできるか，ということ．**

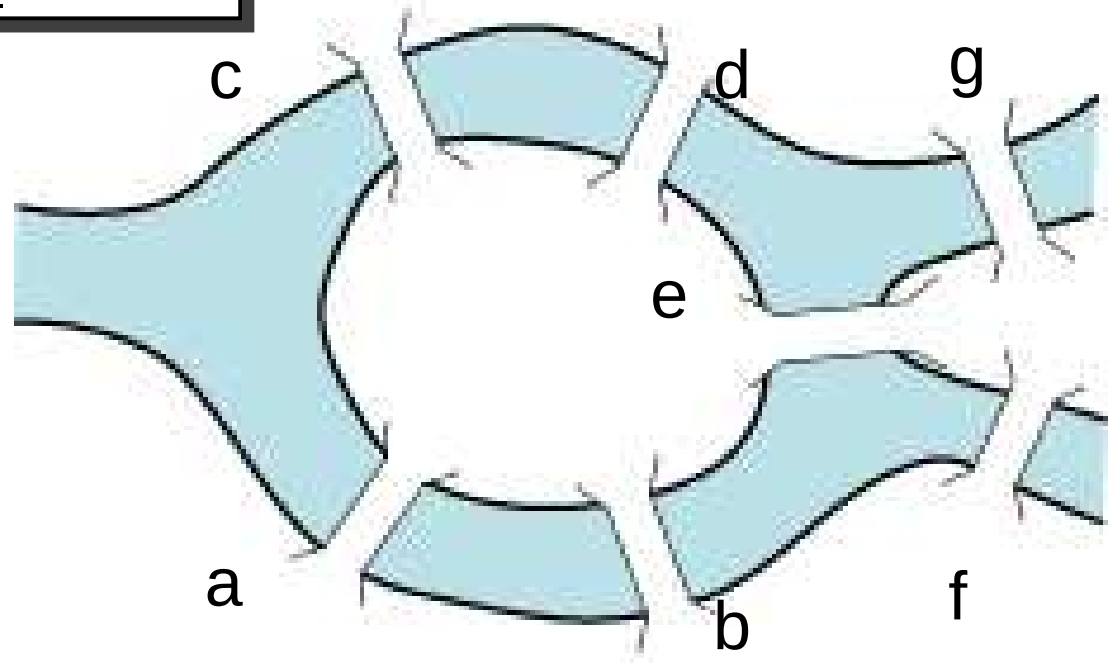
Eulerの証明 (1736)

- 中州，島 ⇒
- 橋 ⇒



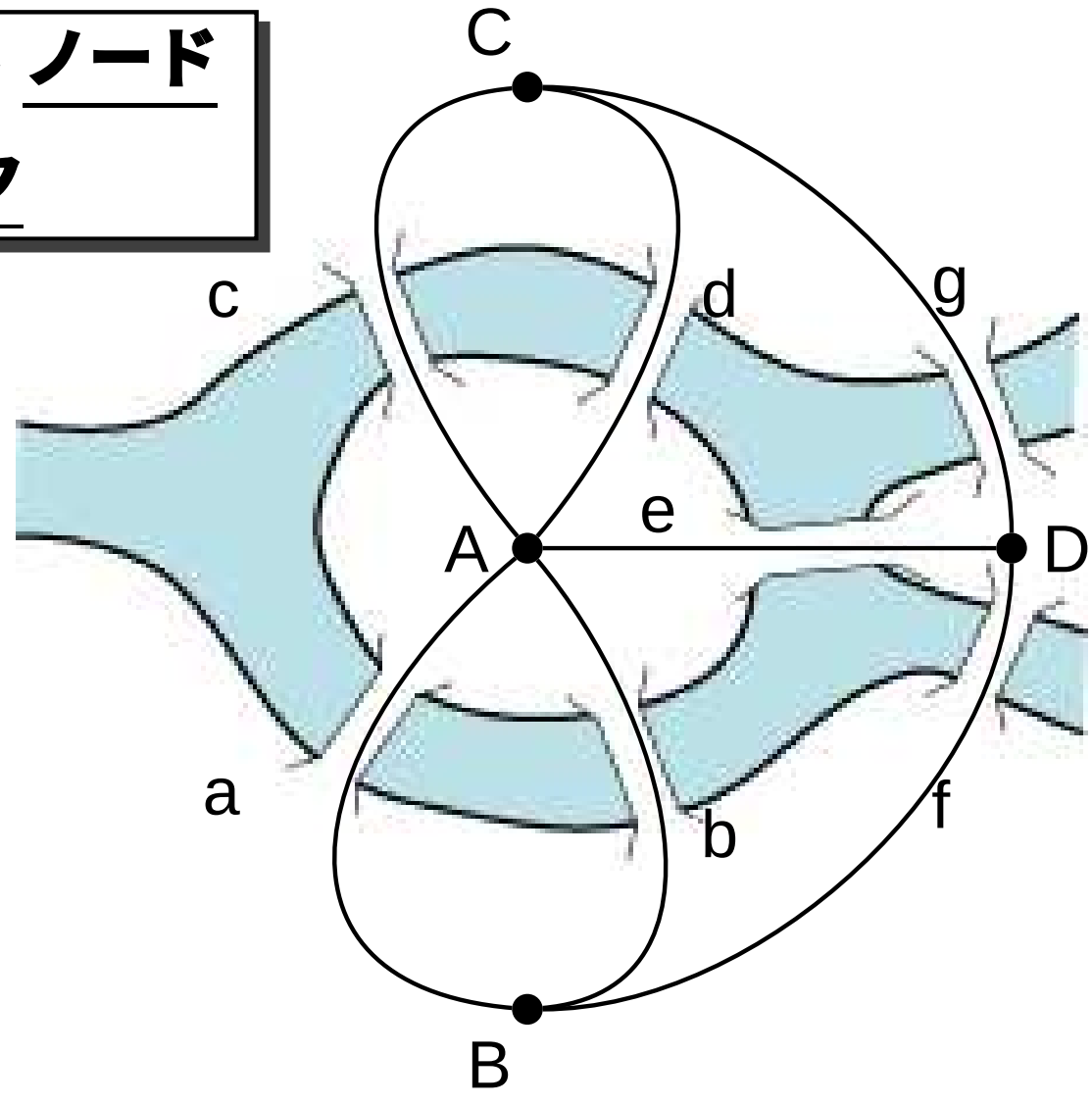
Eulerの証明 (1736)

- 中州，島 ⇒ ノード
- 橋 ⇒ リンク



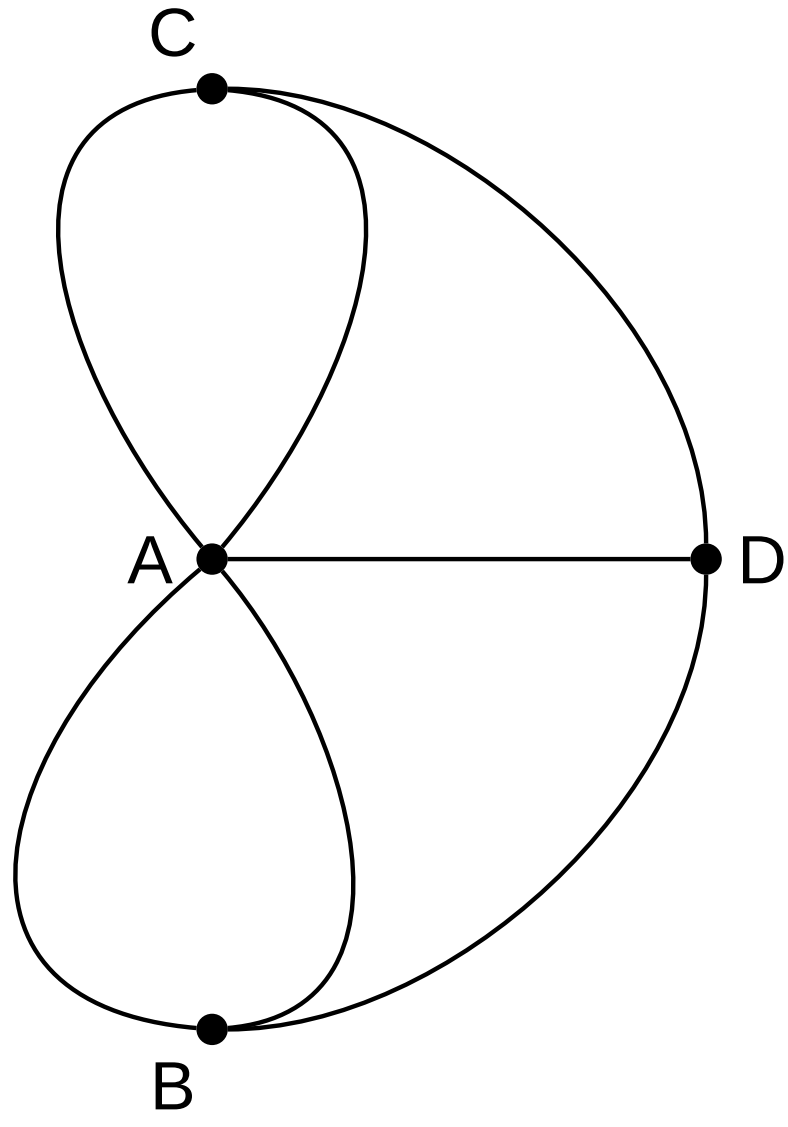
Eulerの証明 (1736)

- 中州，島 ⇒ ノード
- 橋 ⇒ リンク



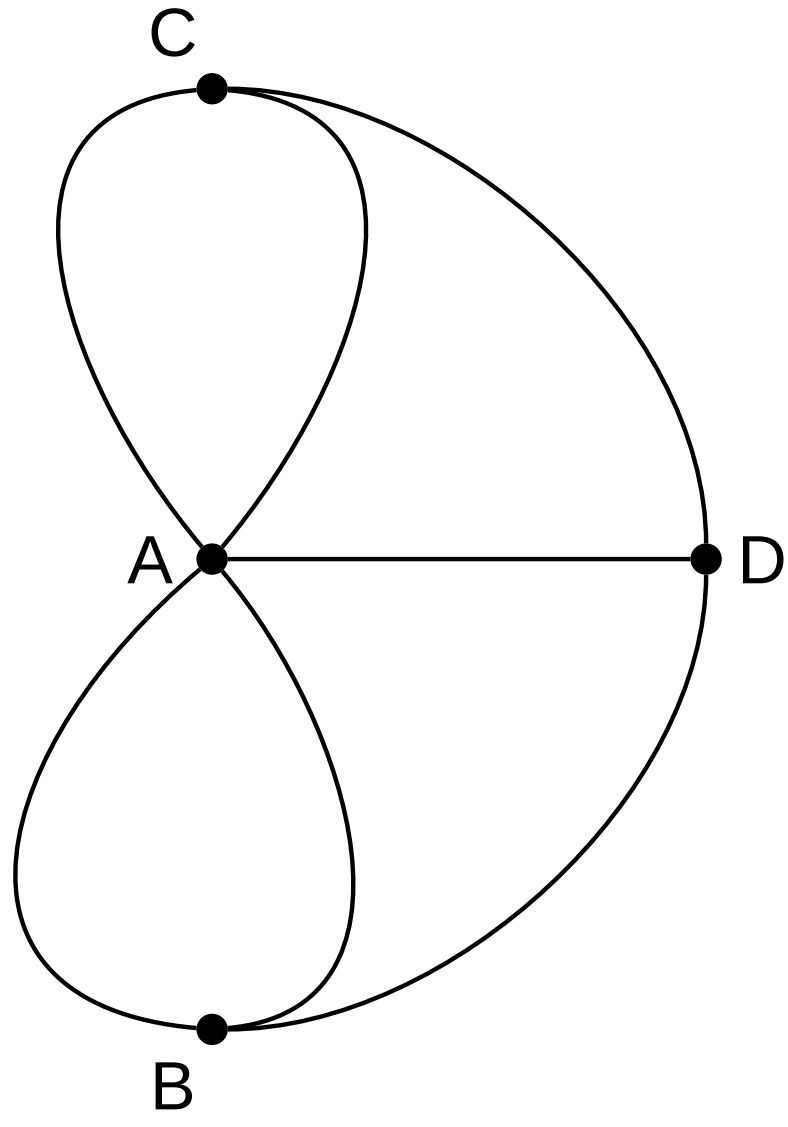
Eulerの証明 (1736)

- リンク数 (次数) が奇数であるノードは，　　か　　である．
- 全ての橋を一度だけ通る経路 (一筆書き) には，出発点と終着点が　　ずつ．
- 従って，次数が奇数のノードが　　ある右図のグラフには，望み (一筆書き) の経路は　　ことになる．



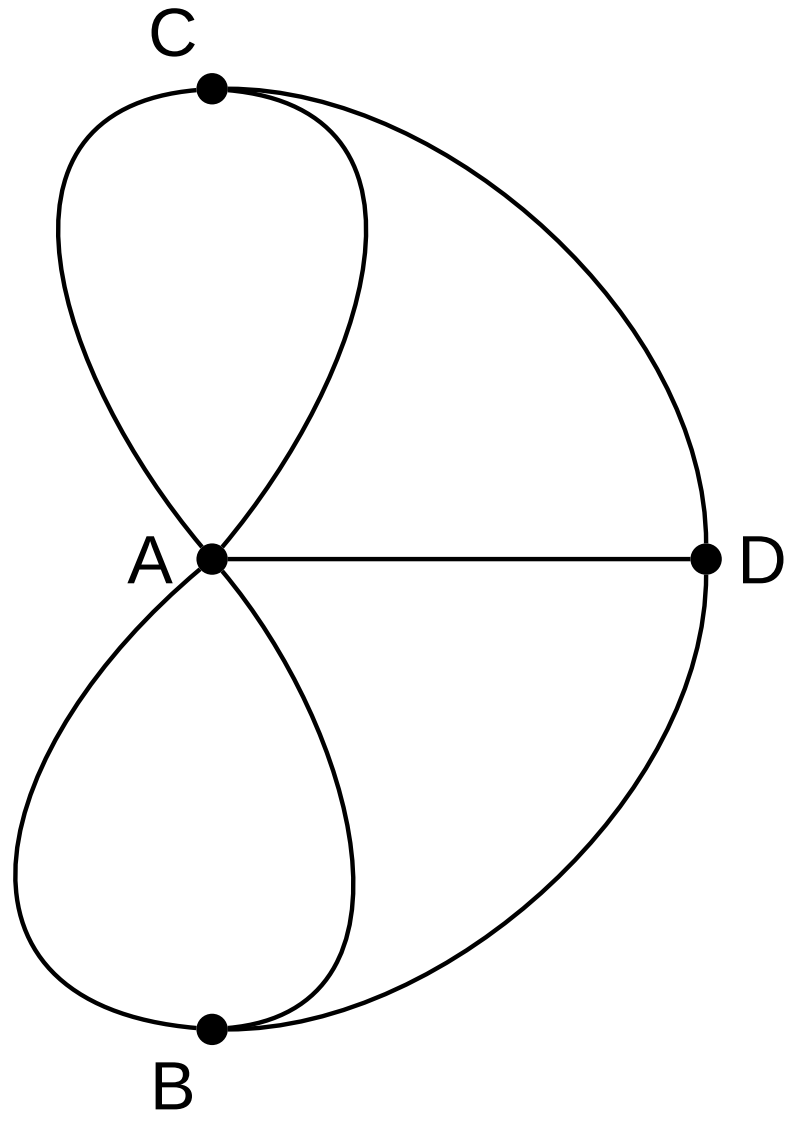
Eulerの証明 (1736)

- リンク数 (次数) が奇数であるノードは，出発点 か 終着点 である．
- 全ての橋を一度だけ通る経路 (一筆書き) には，出発点と終着点が ずつ．
- 従って，次数が奇数のノードが ある右図のグラフには，望み (一筆書き) の経路は ことになる．



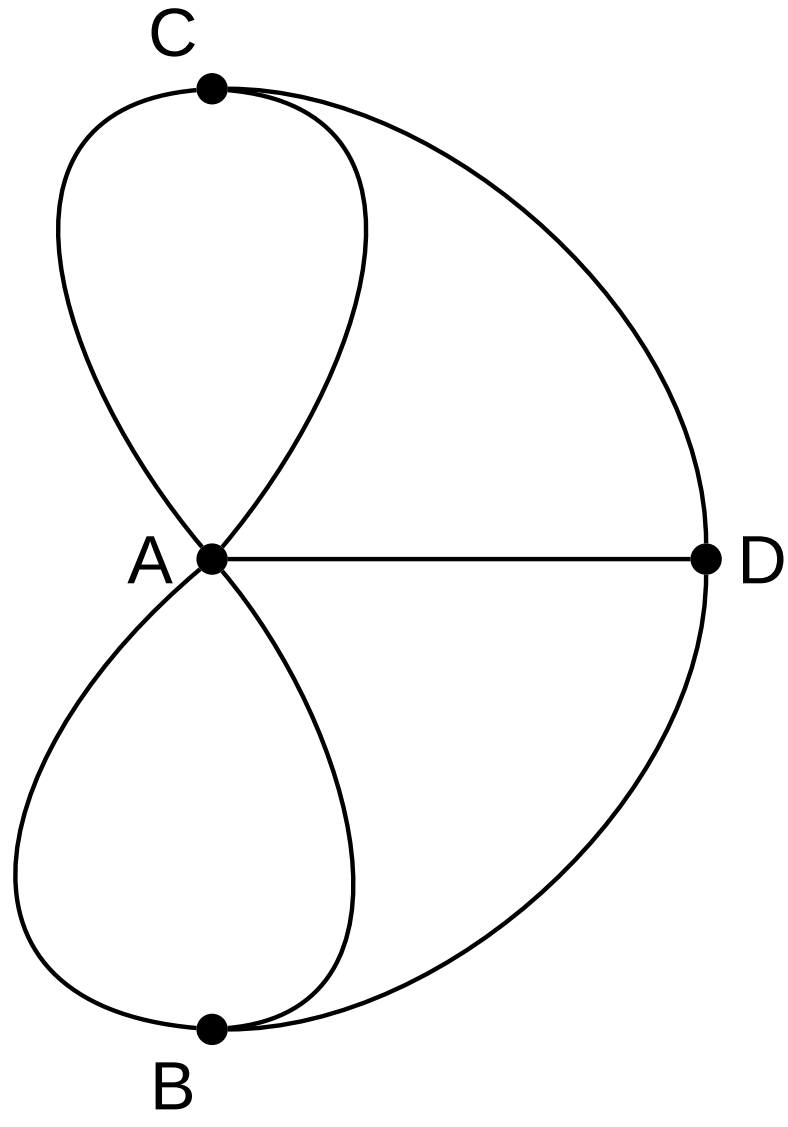
Eulerの証明 (1736)

- リンク数 (次数) が奇数であるノードは，出発点 か 終着点 である．
- 全ての橋を一度だけ通る経路 (一筆書き) には，出発点と終着点が一つ ずつ．
- 従って，次数が奇数のノードが ある右図のグラフには，望み (一筆書き) の経路は ことになる．



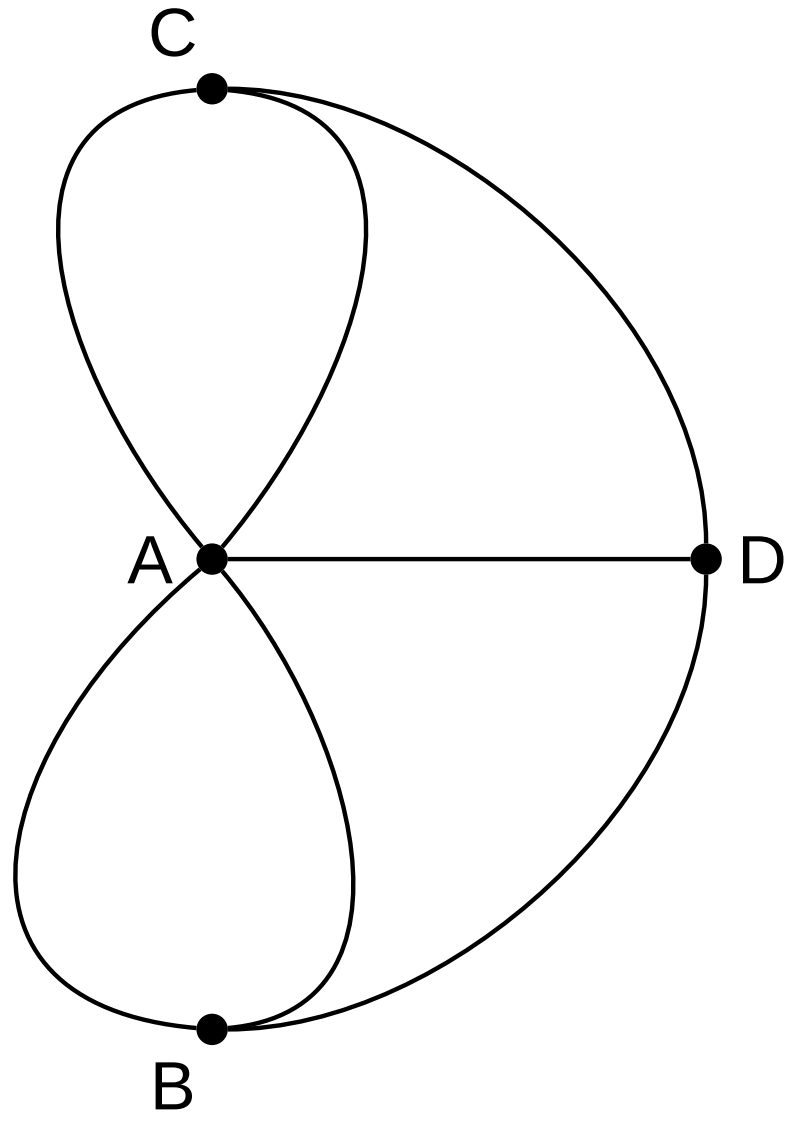
Eulerの証明 (1736)

- リンク数 (次数) が奇数であるノードは，出発点 か 終着点 である．
- 全ての橋を一度だけ通る経路 (一筆書き) には，出発点と終着点が一つ ずつ．
- 従って，次数が奇数のノードが３つ以上 ある右図のグラフには，望み (一筆書き) の経路は ことになる．

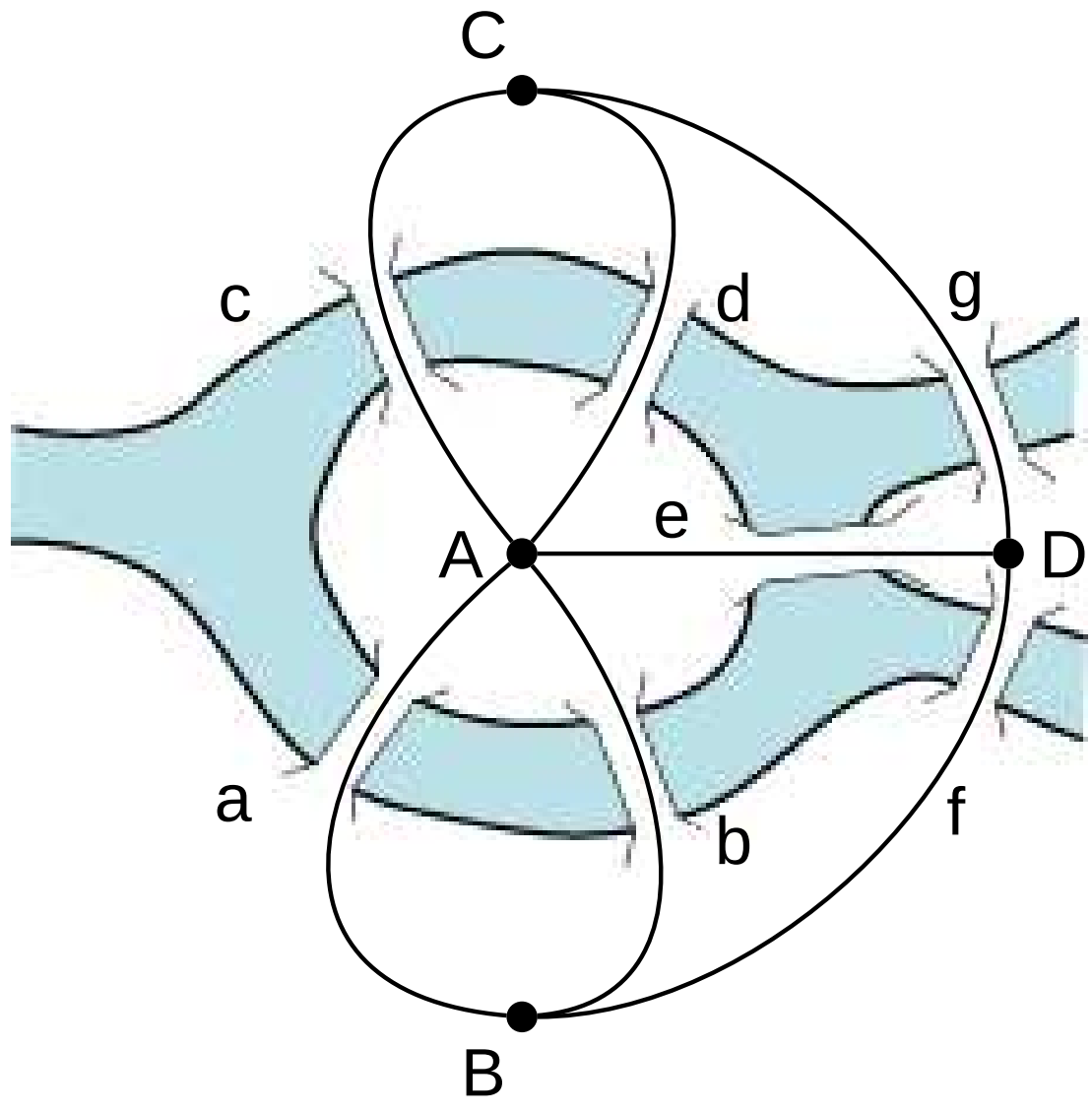


Eulerの証明 (1736)

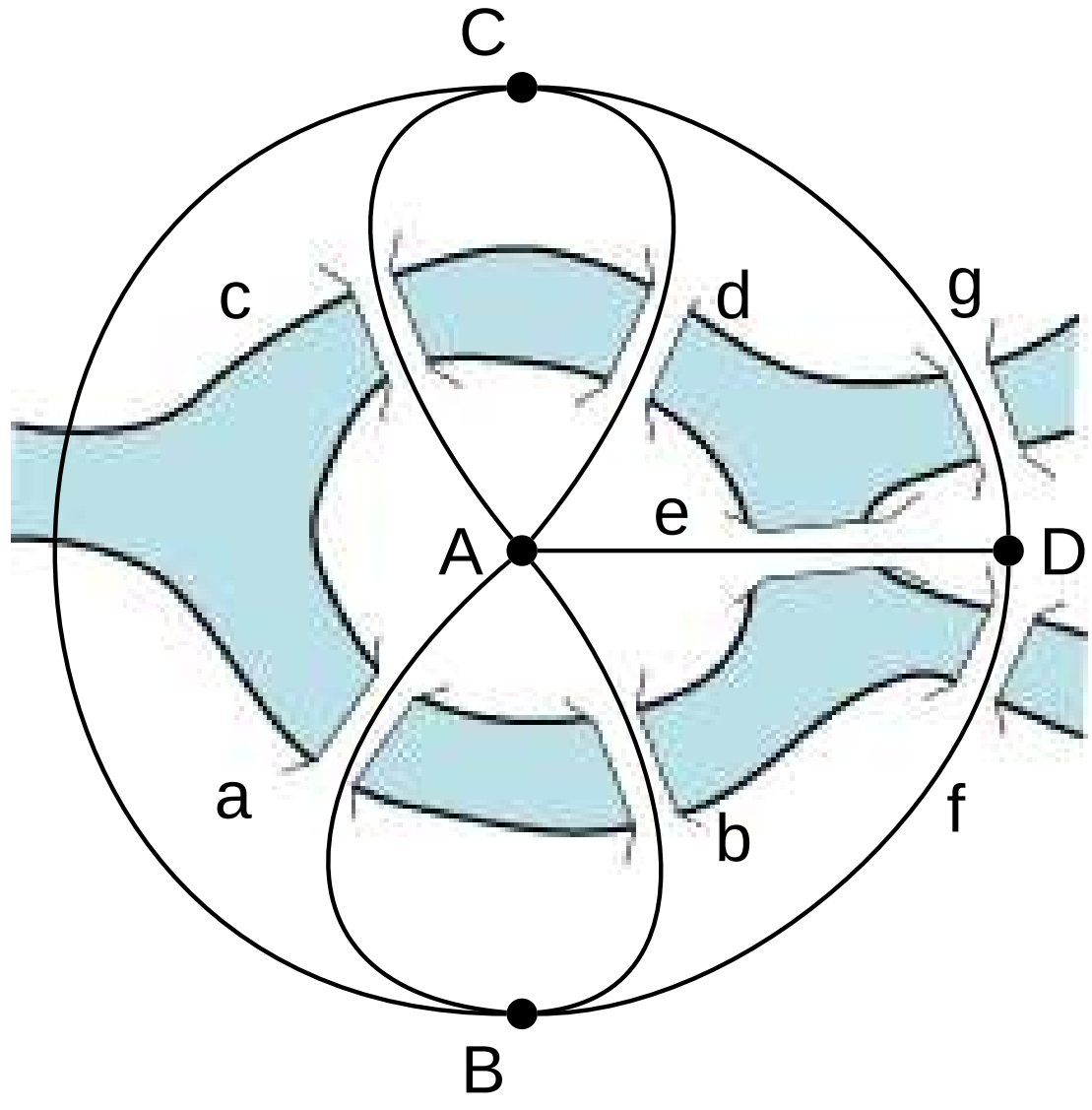
- リンク数 (次数) が奇数であるノードは，出発点 か 終着点 である．
- 全ての橋を一度だけ通る経路 (一筆書き) には，出発点と終着点が一つ ずつ．
- 従って，次数が奇数のノードが３つ以上 ある右図のグラフには，望み (一筆書き) の経路は存在しない ことになる．



1875年に新しい橋が …

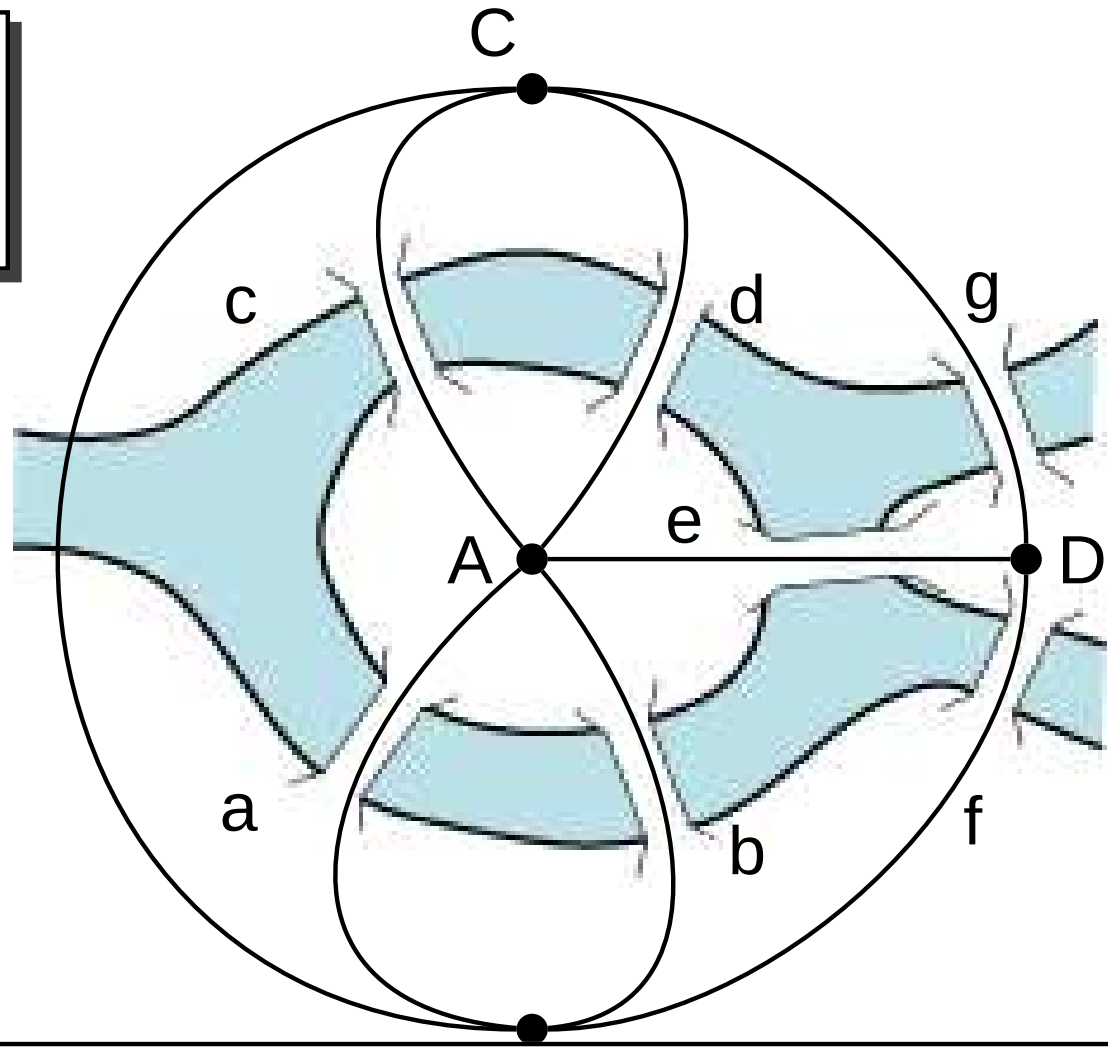


1875年に新しい橋が …



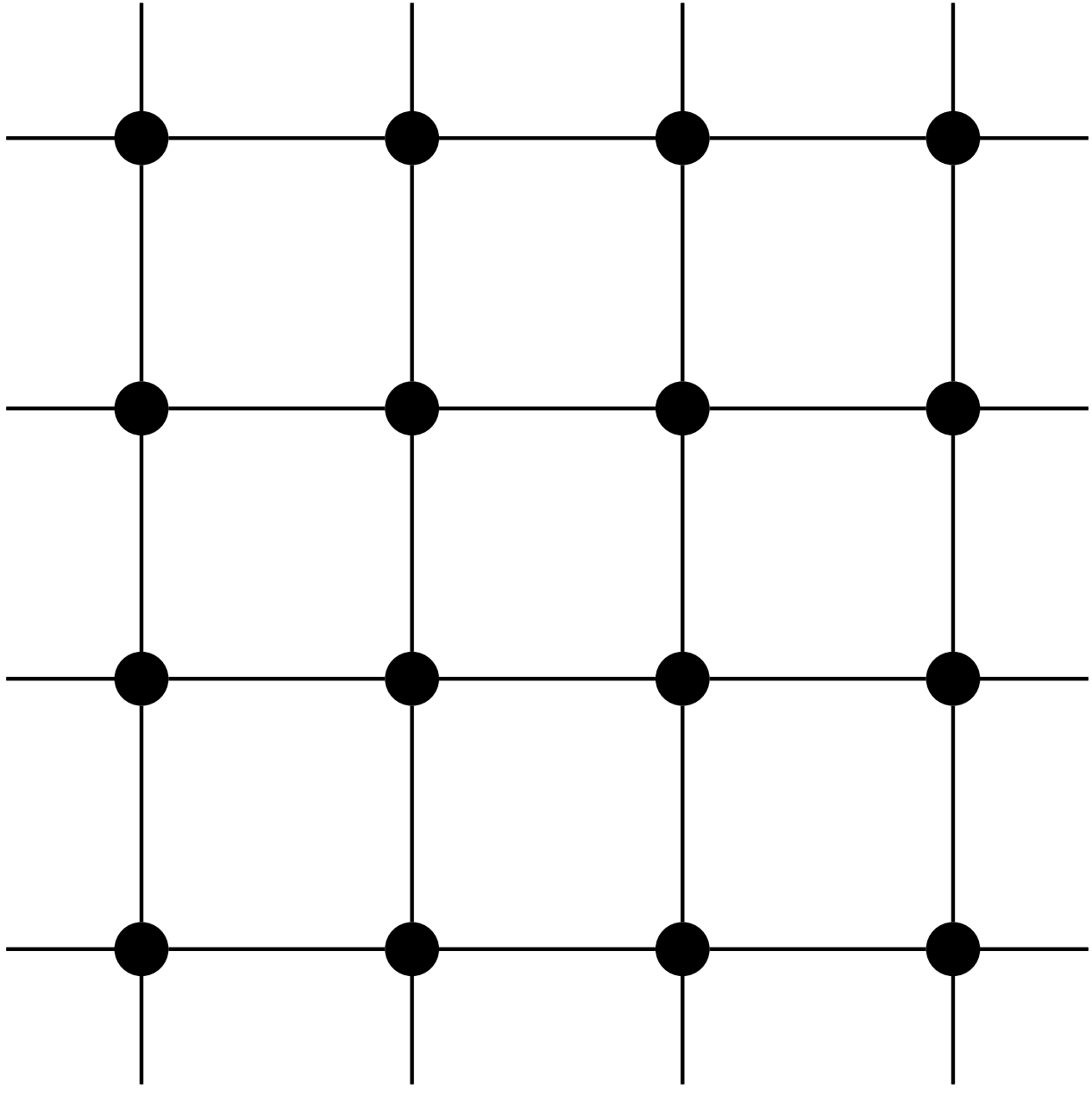
グラフを用いた抽象化により …

我々が住む世界を理解するための鍵になり得る

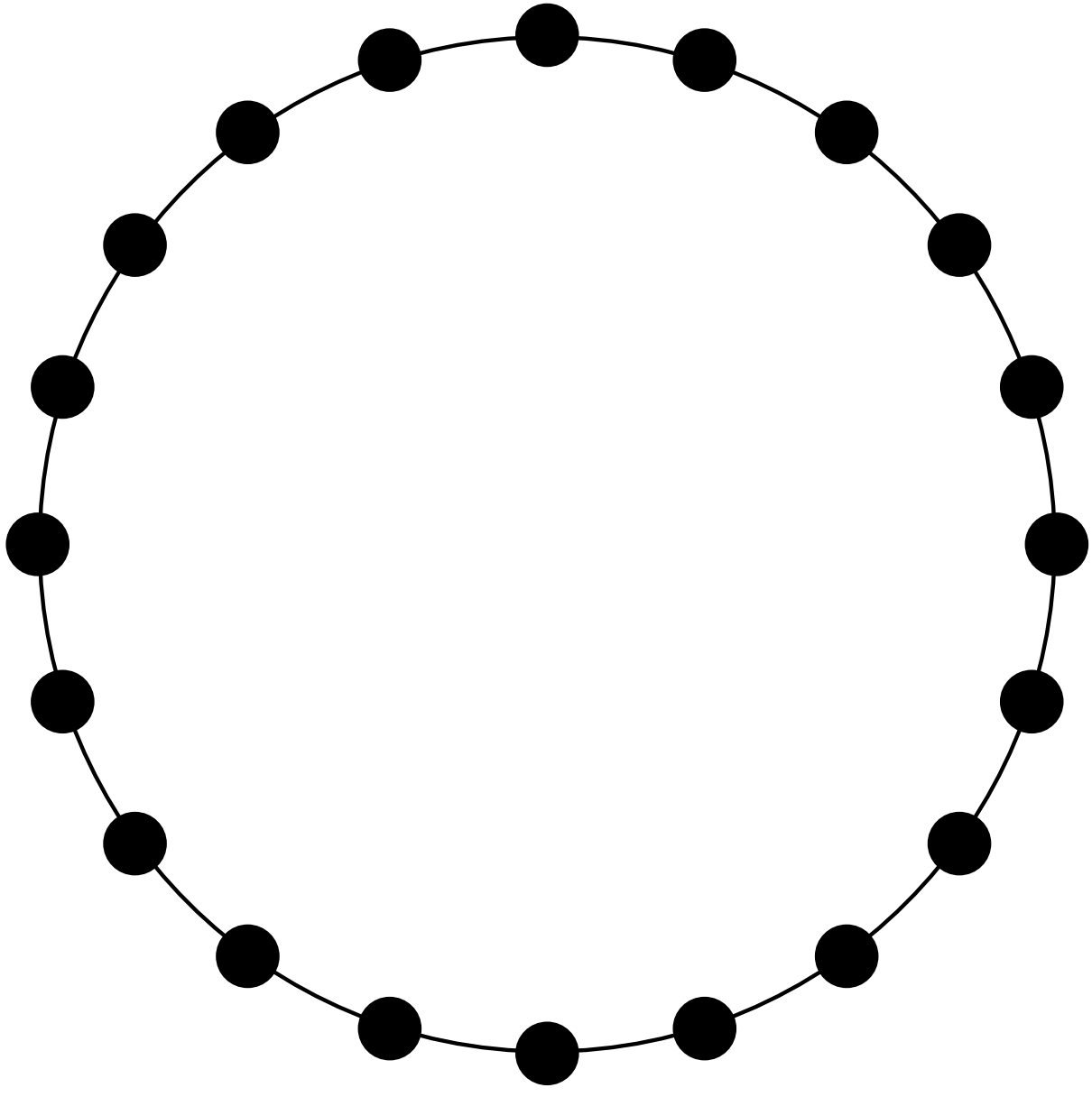


**構造に加えられた小さな変化が，
それまで隠されていた新たな可能性を生み出す**

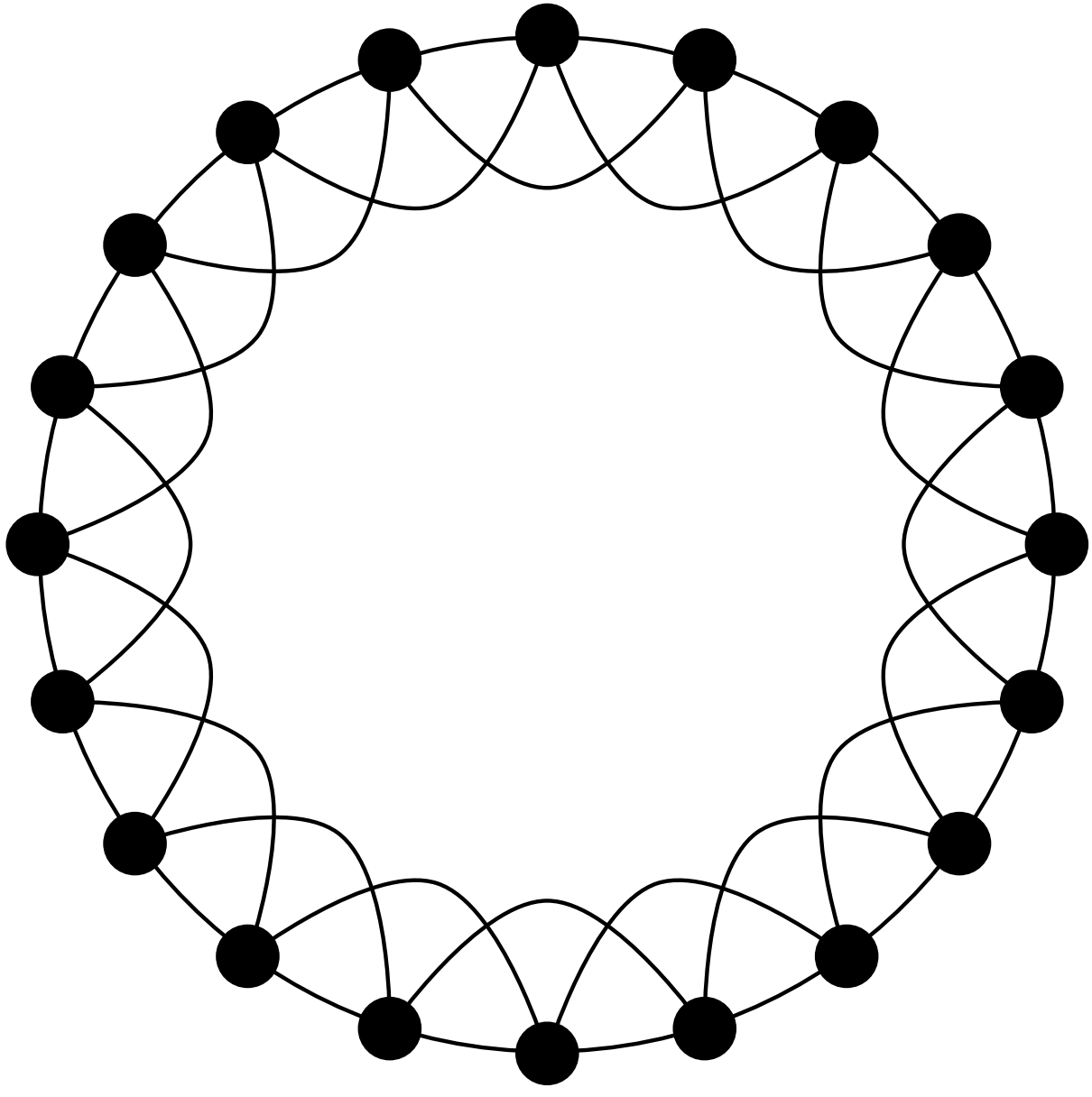
規則的なグラフ (20 世紀半ばまで)



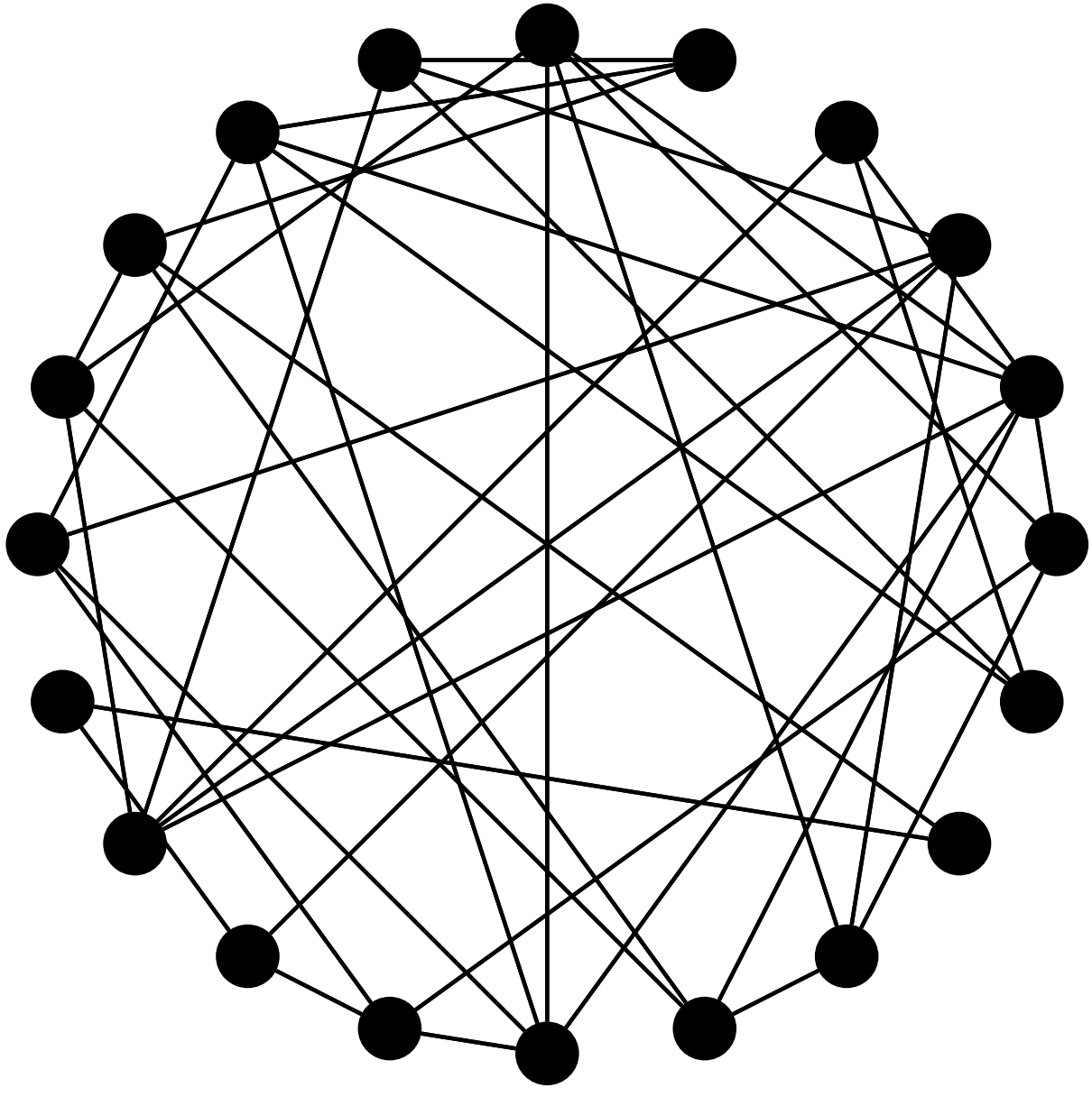
規則的なグラフ (20 世紀半ばまで)



規則的なグラフ

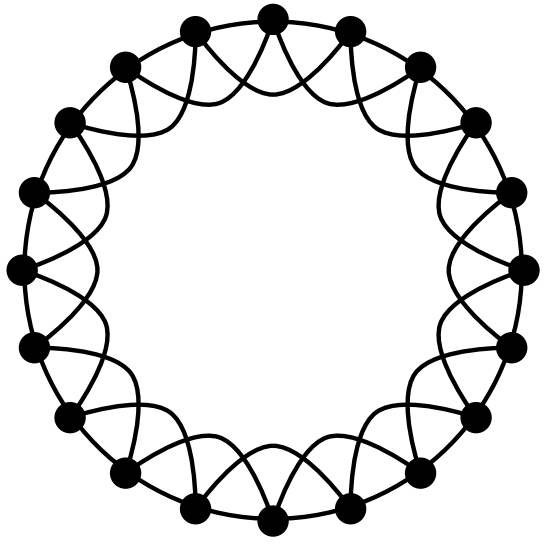


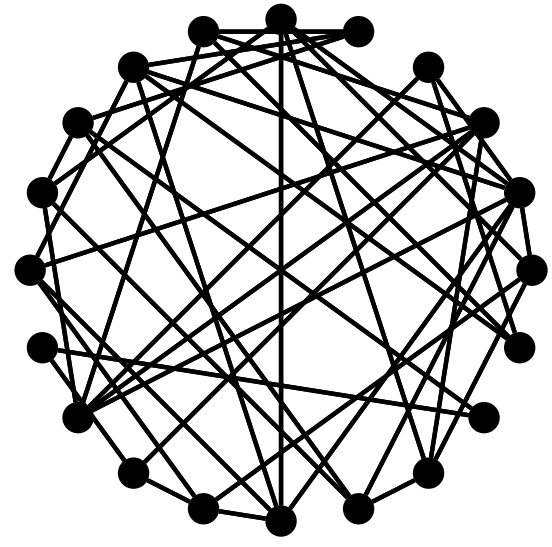
ランダムグラフ (20 世紀半ば以降)



現実世界のネットワーク構造は?

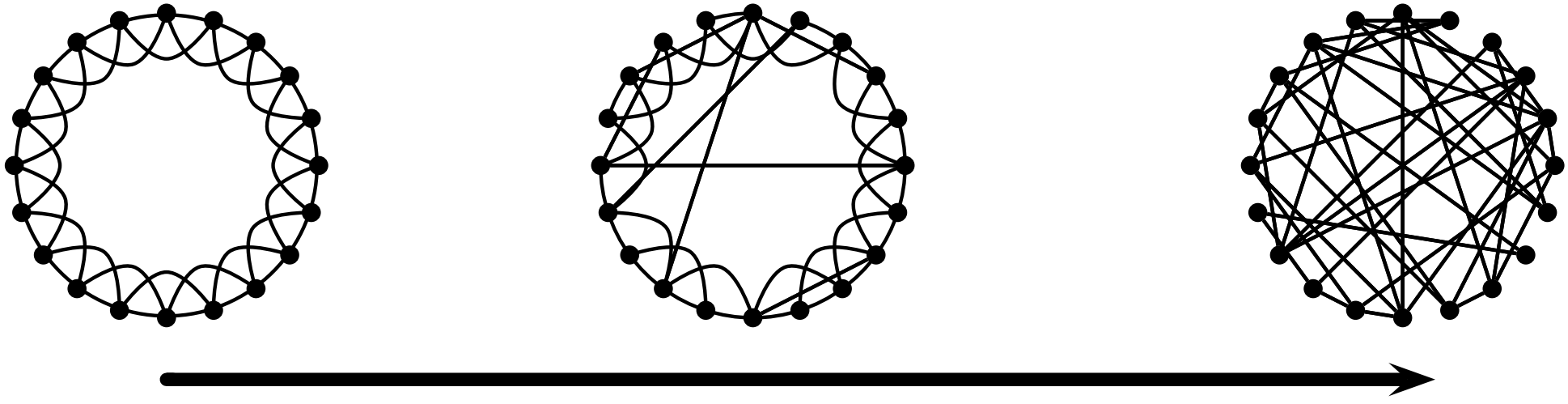
- 『規則的』ではない．
  - 「6 次の隔たり」にはならない．⇒ 小さな世界でない．
- 『ランダム』でもない．
  - 現実では「友達の友達は友達」であることが多いが，そうなっていない．





スモールワールドネットワーク

(Watts and Strogatz, 1998)

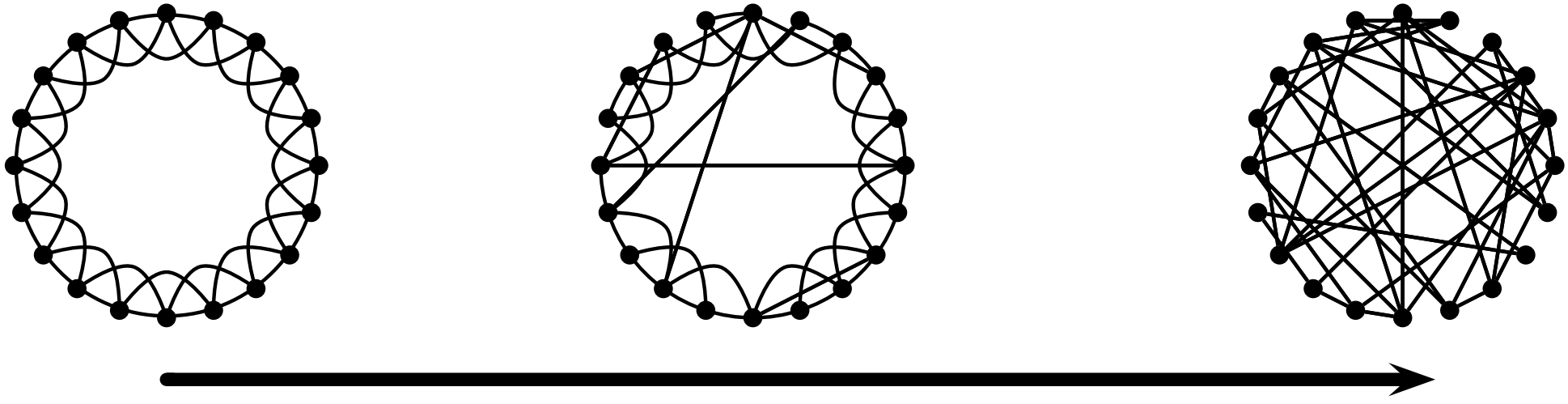


規則的でもランダムでもない
中間の構造を有するのだが …

- **任意の二ノード間の平均距離 L はネットワークのサイズ (ノード数) に比べて → と同じ**
- **各ノードにおけるクラスタ性 C が → と同じ**

スモールワールドネットワーク

(Watts and Strogatz, 1998)

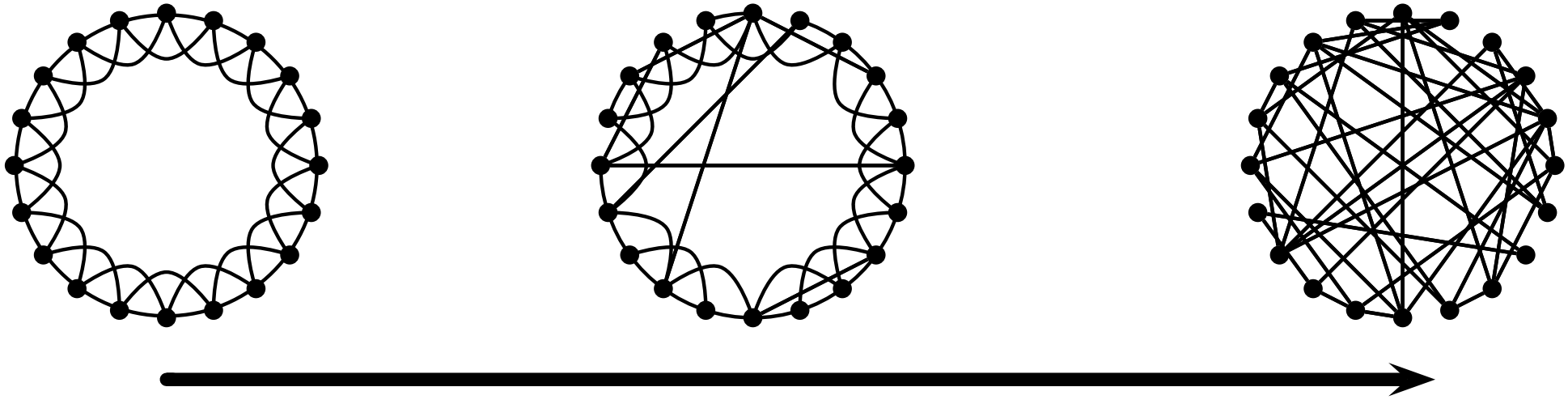


規則的でもランダムでもない
中間の構造を有するのだが ・・・

- **任意の二ノード間の平均距離 L はネットワークのサイズ (ノード数) に比べて 小さい → と同じ**
- **各ノードにおけるクラスタ性 C が → と同じ**

スモールワールドネットワーク

(Watts and Strogatz, 1998)

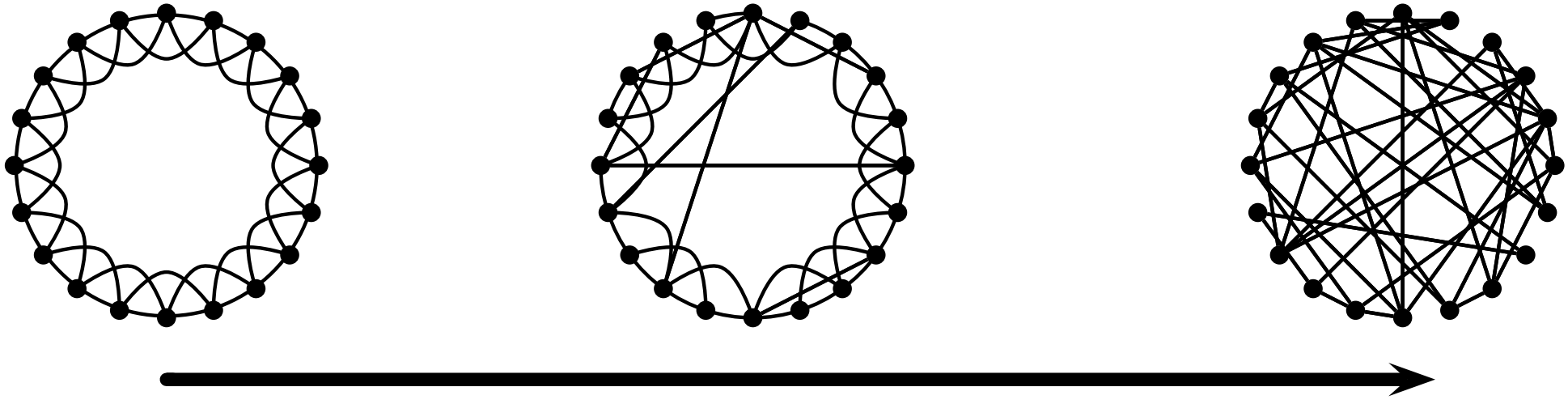


規則的でもランダムでもない
中間の構造を有するのだが …

- **任意の二ノード間の平均距離 L はネットワークのサイズ (ノード数) に比べて 小さい $\rightarrow$ ランダムグラフ と同じ**
- **各ノードにおけるクラスタ性 C が**
  $\rightarrow$ と同じ

スモールワールドネットワーク

(Watts and Strogatz, 1998)

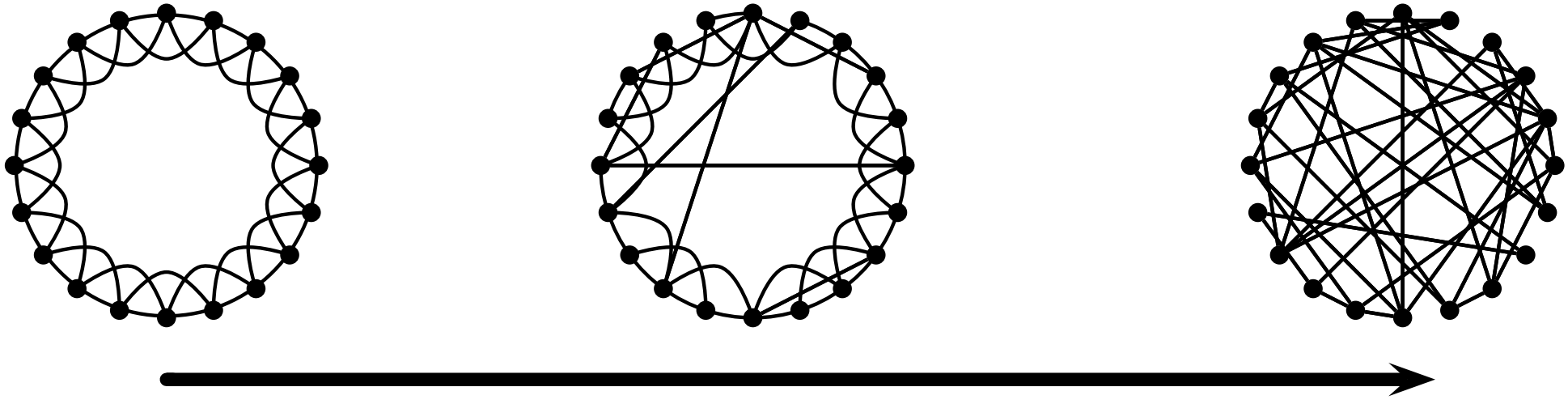


規則的でもランダムでもない
中間の構造を有するのだが ・・・

- **任意の二ノード間の平均距離 L はネットワークのサイズ (ノード数) に比べて 小さい $\rightarrow$ ランダムグラフ と同じ**
- **各ノードにおけるクラスタ性 C が 高い**
  $\rightarrow$ と同じ

スモールワールドネットワーク

(Watts and Strogatz, 1998)



規則的でもランダムでもない
中間の構造を有するのだが ・・・

- **任意の二ノード間の平均距離 L はネットワークのサイズ (ノード数) に比べて 小さい $\rightarrow$ ランダムグラフ と同じ**
- **各ノードにおけるクラスタ性 C が 高い**
  $\rightarrow$ 規則的なグラフ と同じ

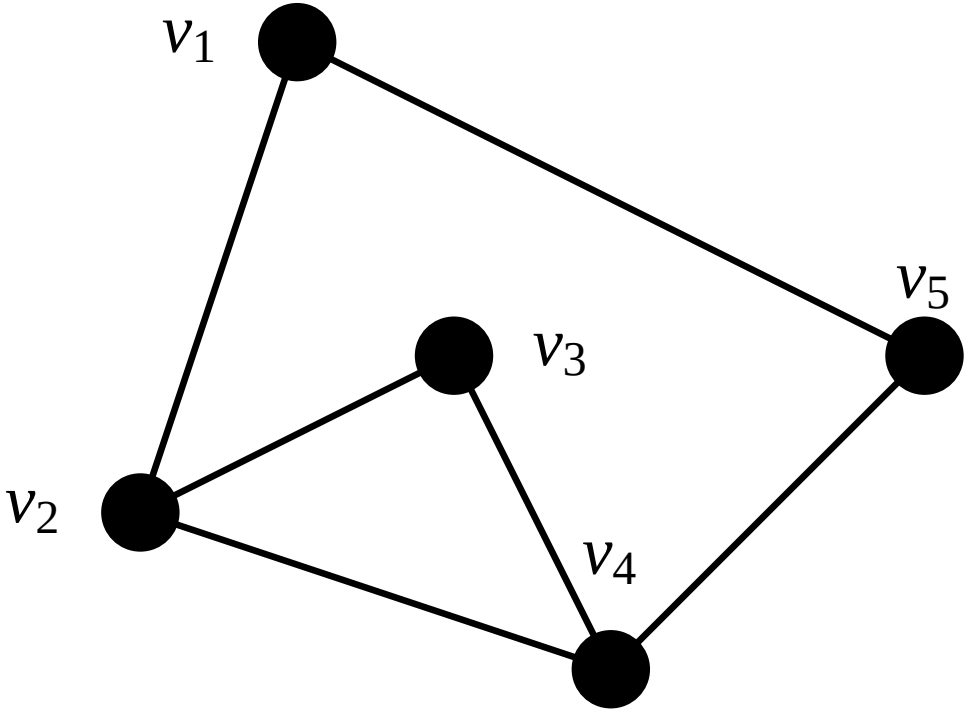
現実世界のスモールワールドネットワーク

	N	L_{actual}	L_{random}	C_{actual}	C_{random}
映画俳優	225,226	3.65	2.99	0.79	0.00027
送電網	4,941	18.7	12.4	0.080	0.005
神経回路網	282	2.65	2.25	0.28	0.05

- **任意の二ノード間の平均距離 L はネットワークのサイズ (ノード数) に比べ小さい (ランダムグラフと同じ)**
- **各ノードにおけるクラスタ性 C は大きい (ランダムグラフではほぼ 0)**

現実世界のネットワークを特徴づけるもう一つの視点

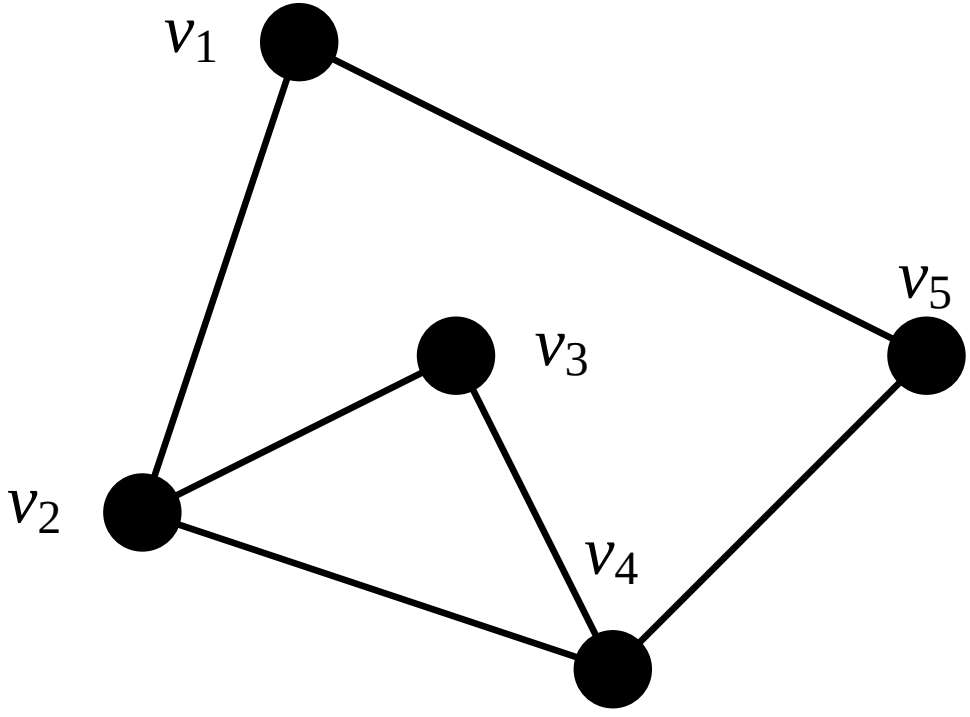
$\Longrightarrow$ ネットワークの次数分布



$k_1 =$
$k_2 =$
$k_3 =$
$k_4 =$
$k_5 =$

現実世界のネットワークを特徴づけるもう一つの視点

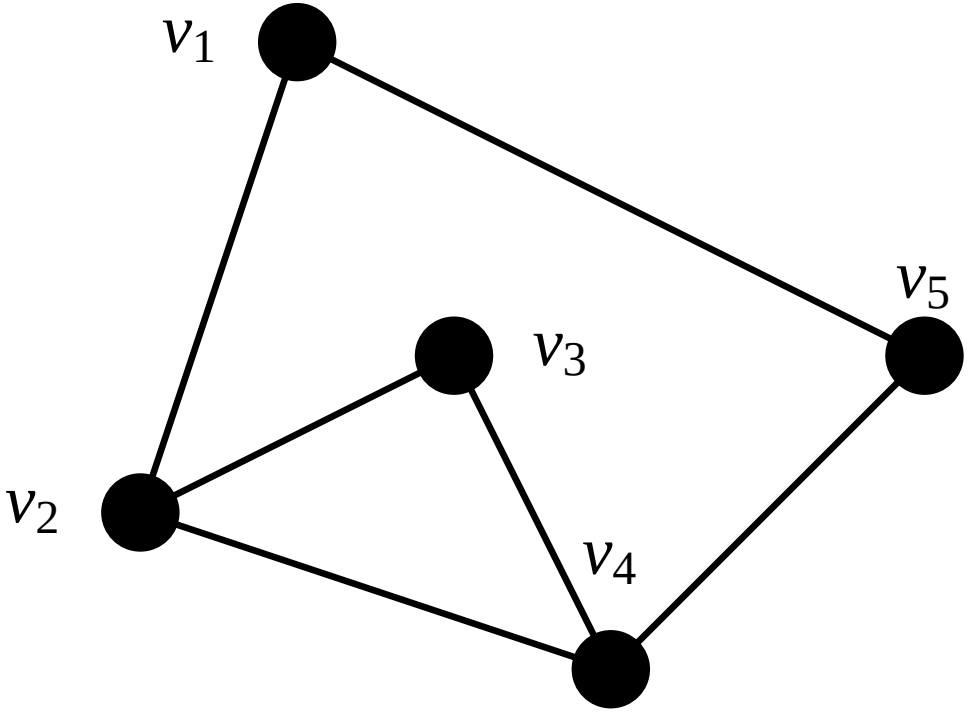
$\Longrightarrow$ ネットワークの次数分布



$k_1 = 2$
$k_2 =$
$k_3 =$
$k_4 =$
$k_5 =$

現実世界のネットワークを特徴づけるもう一つの視点

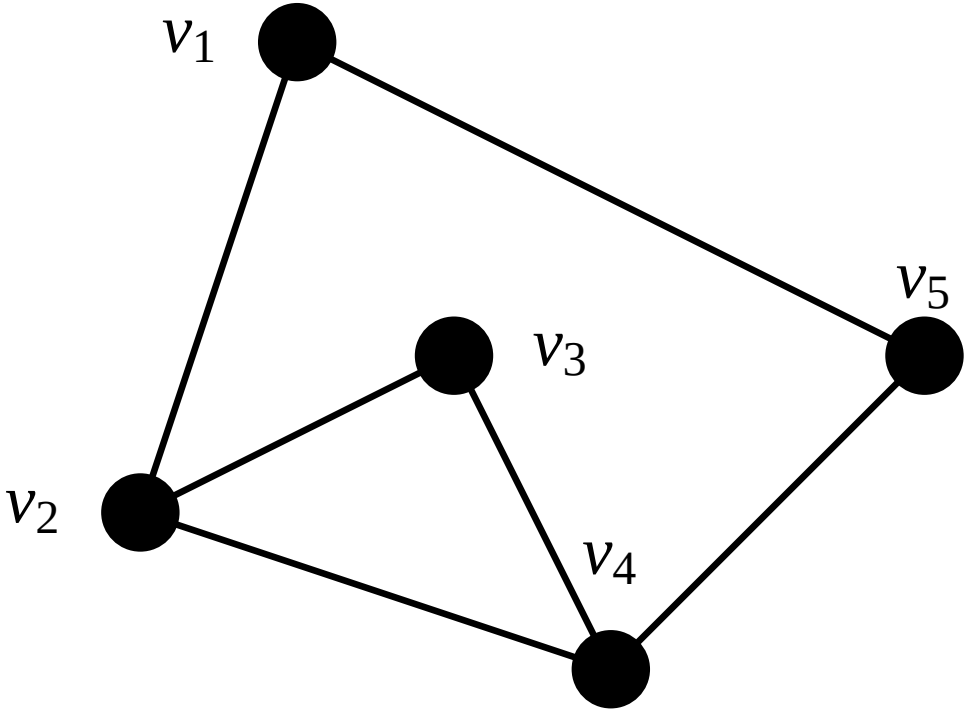
$\Longrightarrow$ ネットワークの次数分布



$k_1 = 2$
$k_2 = 3$
$k_3 =$
$k_4 =$
$k_5 =$

現実世界のネットワークを特徴づけるもう一つの視点

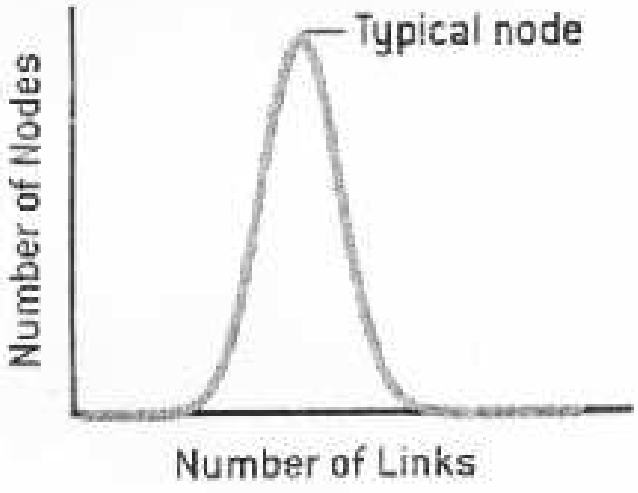
$\Longrightarrow$ ネットワークの次数分布



$$k_1 = 2$$
$$k_2 = 3$$
$$k_3 = 2$$
$$k_4 = 3$$
$$k_5 = 2$$

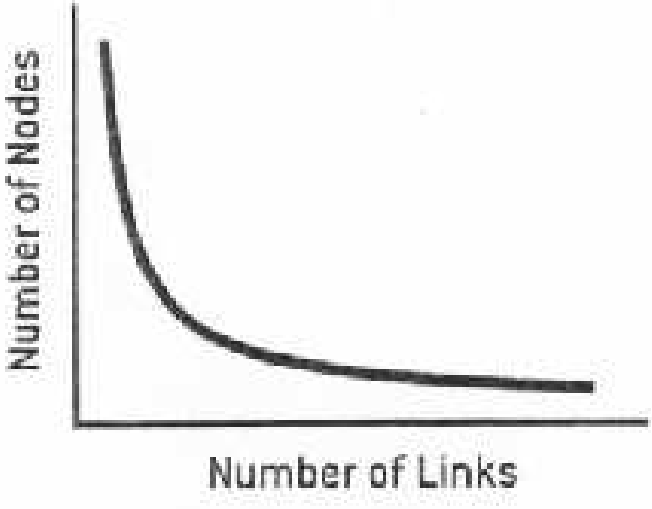
ネットワークの次数分布

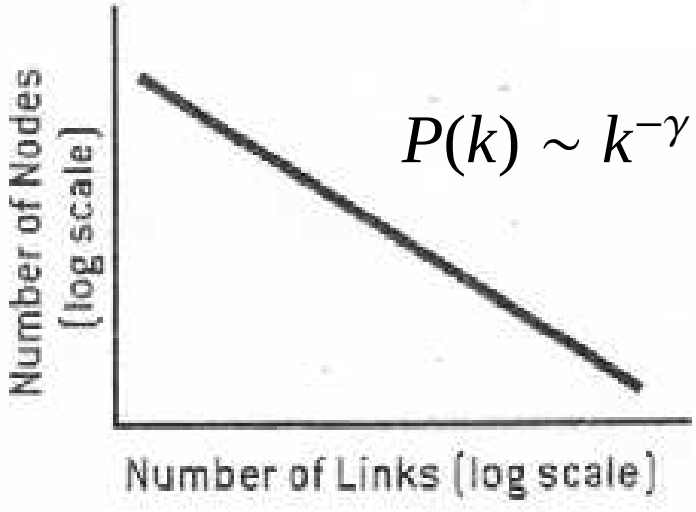
今までのネットワーク



- 多数のリンクを持つ　　が存在
- 次数分布が　　になる

実際のネットワーク

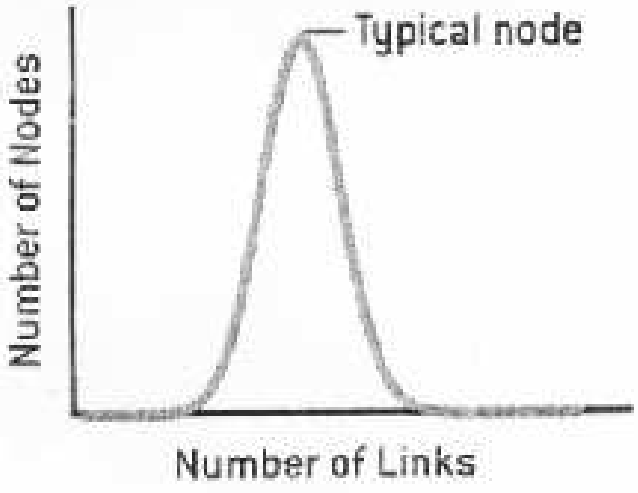




$$P(k) \sim k^{-\gamma}$$

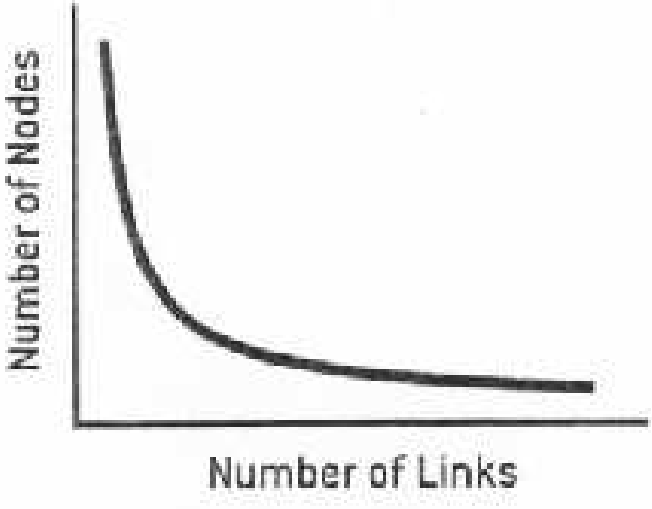
ネットワークの次数分布

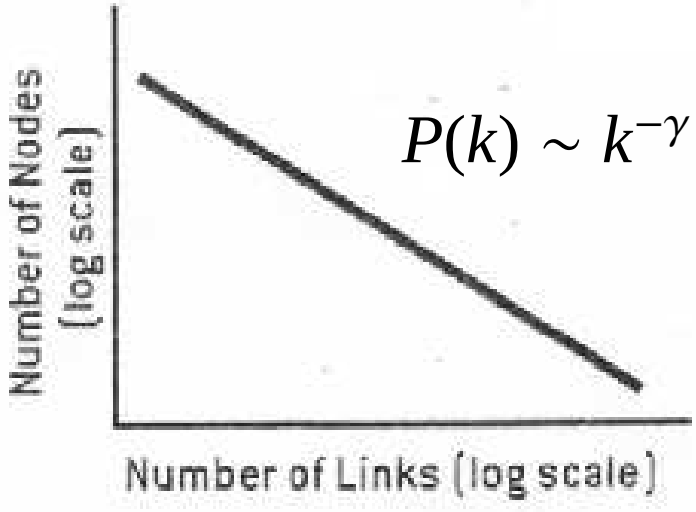
今までのネットワーク



- 多数のリンクを持つ ハブ が存在
- 次数分布が になる

実際のネットワーク

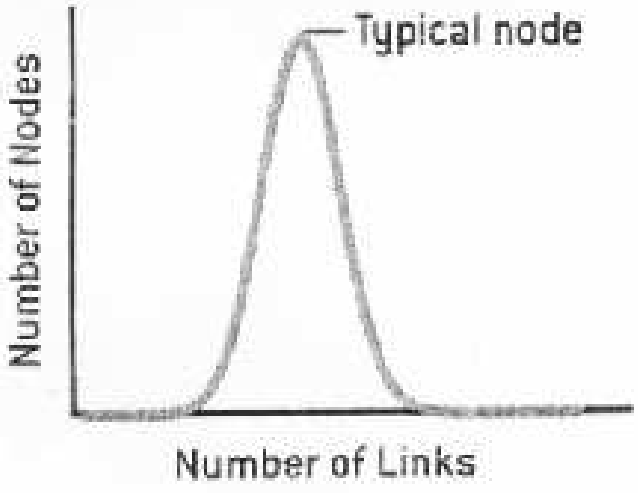




$$P(k) \sim k^{-\gamma}$$

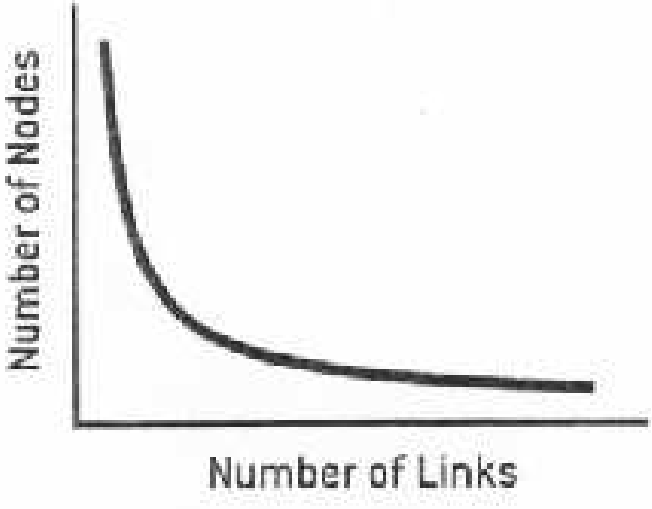
ネットワークの次数分布

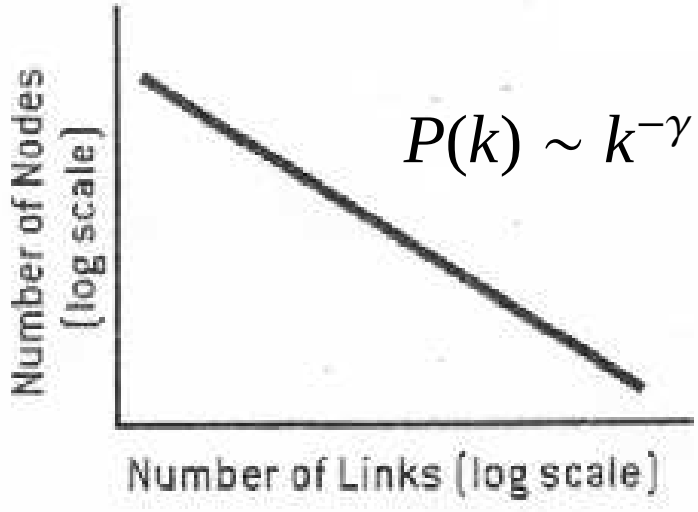
今までのネットワーク



- 多数のリンクを持つ ハブ が存在
- 次数分布が ベキ分布 になる

実際のネットワーク

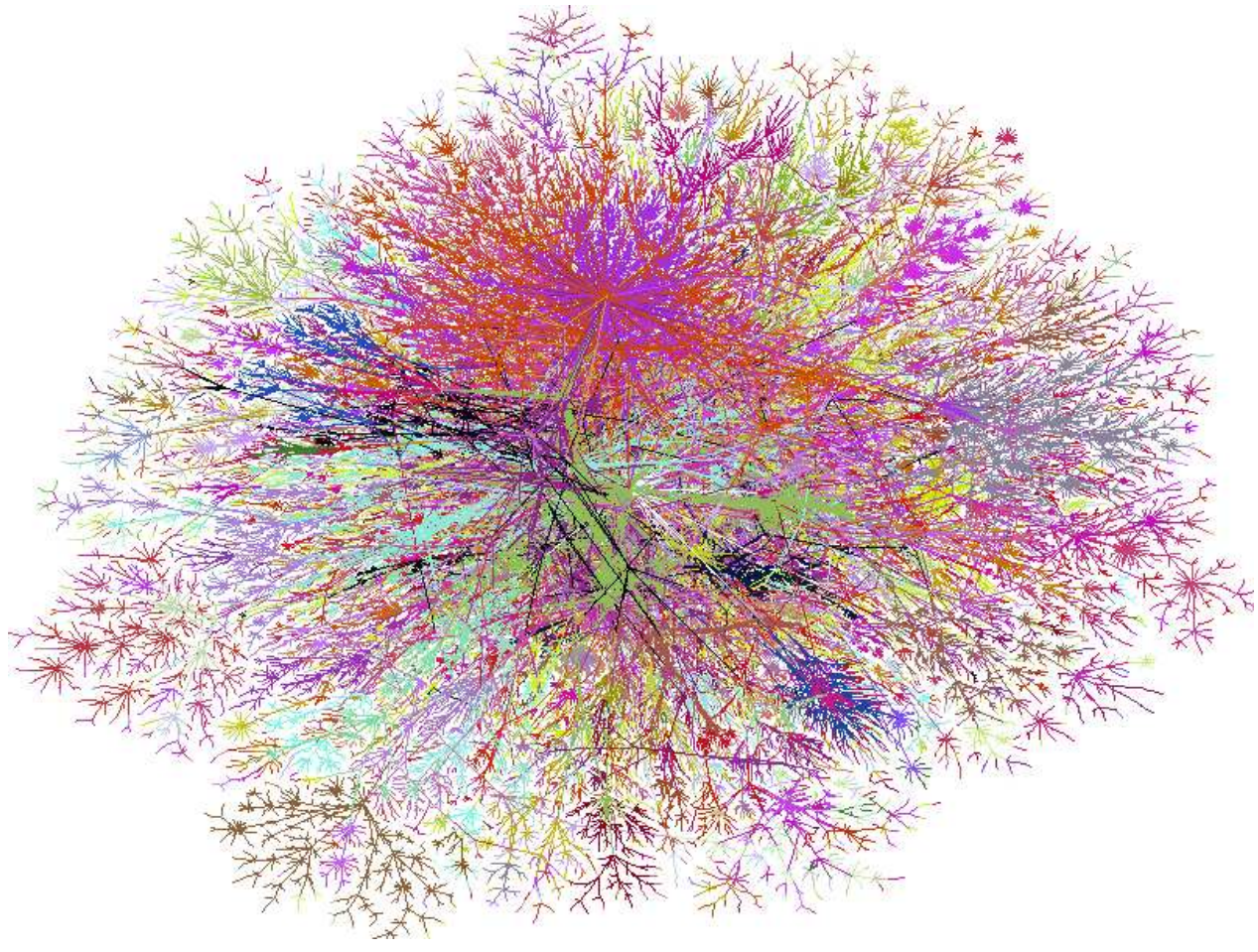




$$P(k) \sim k^{-\gamma}$$

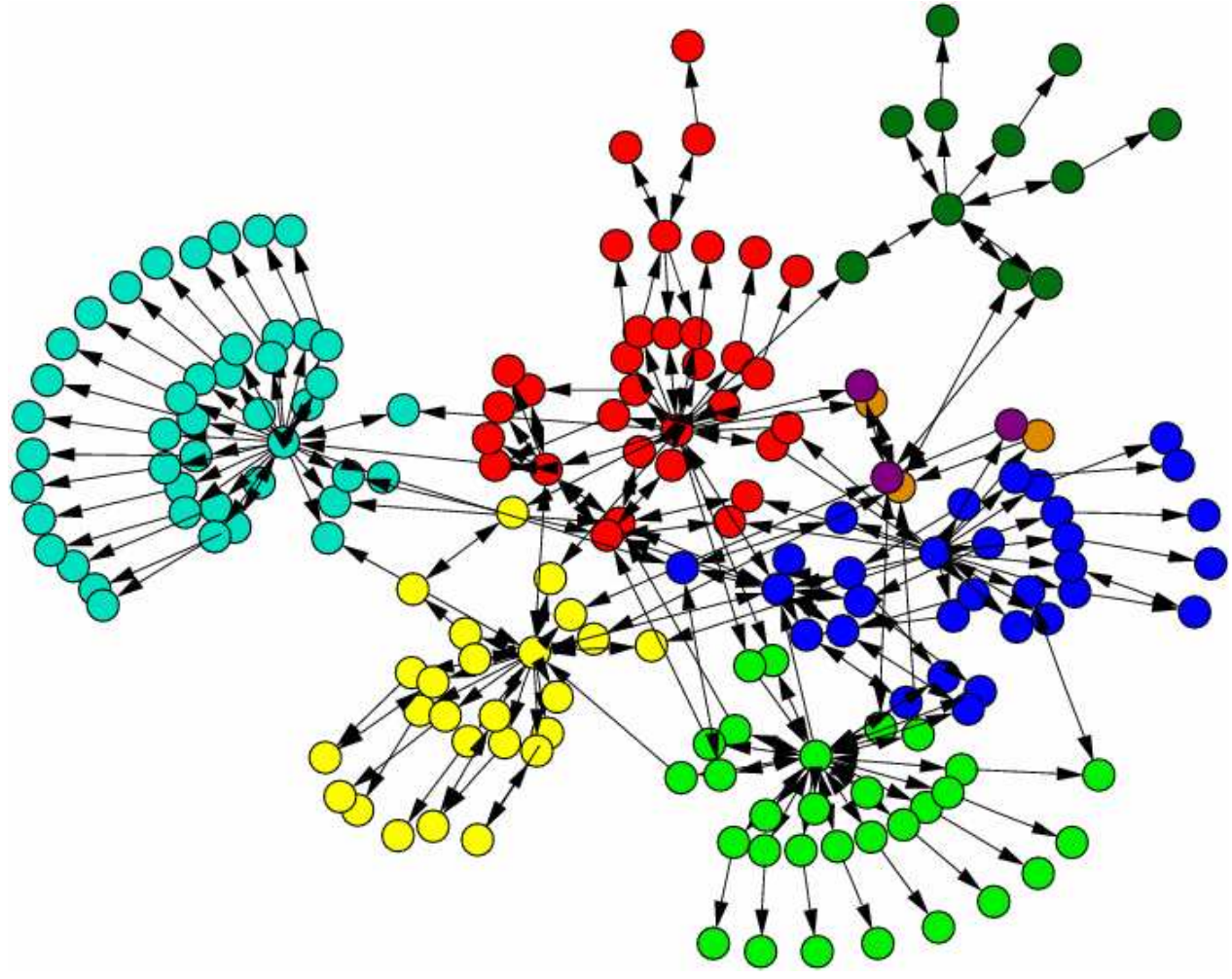
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



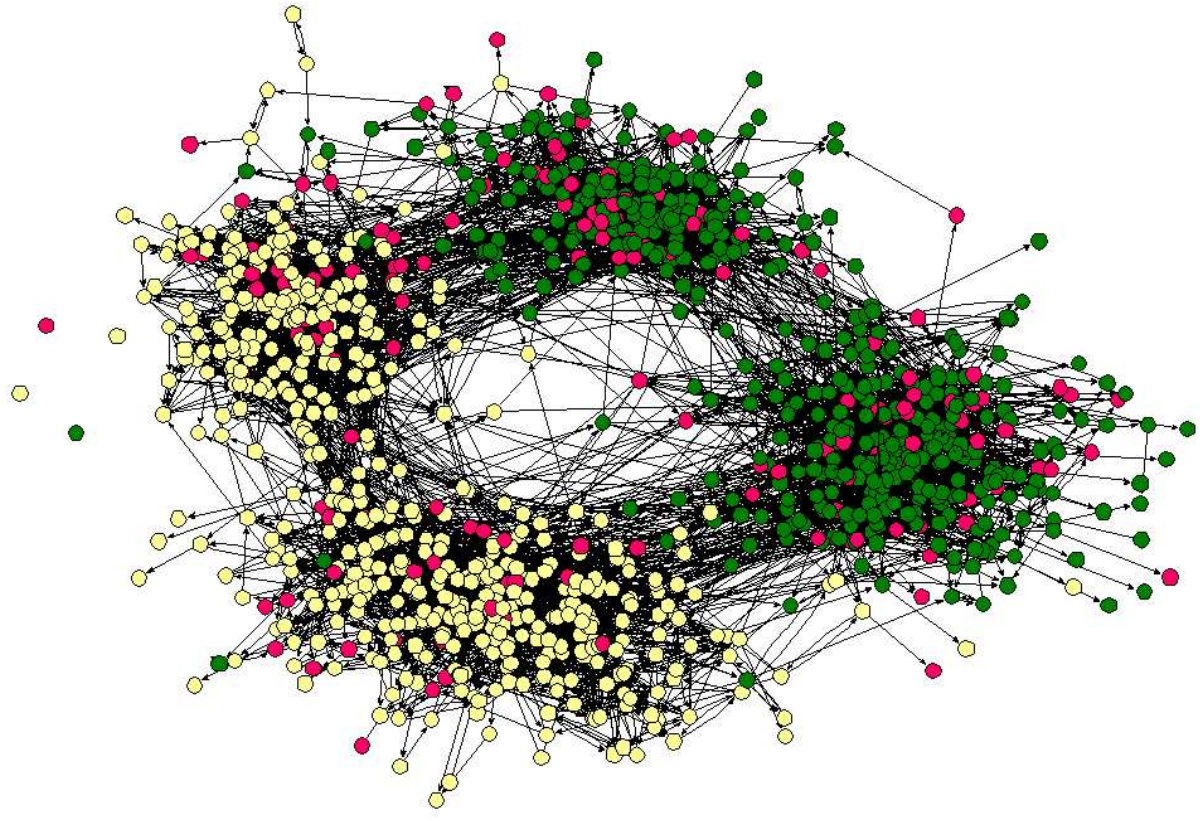
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



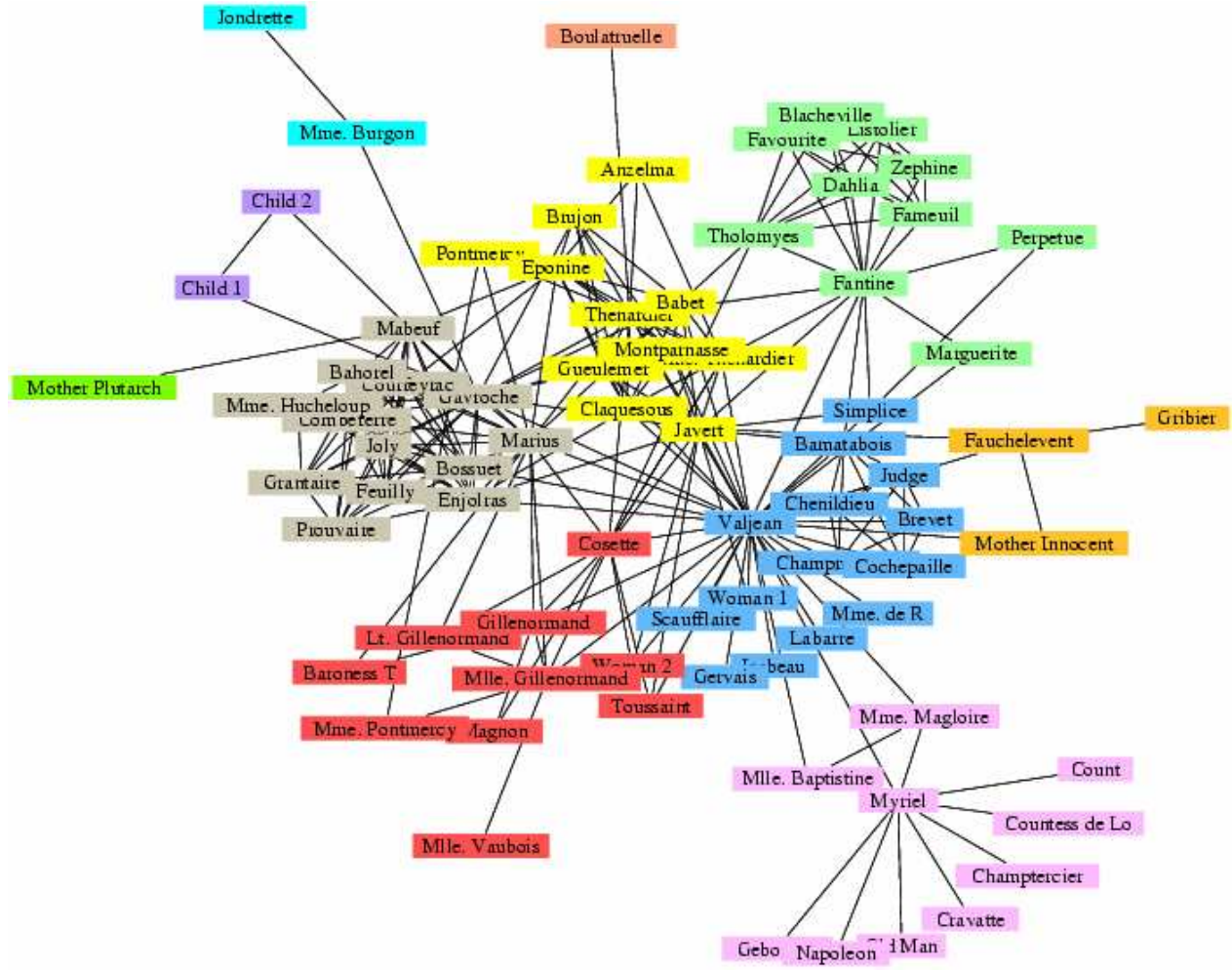
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



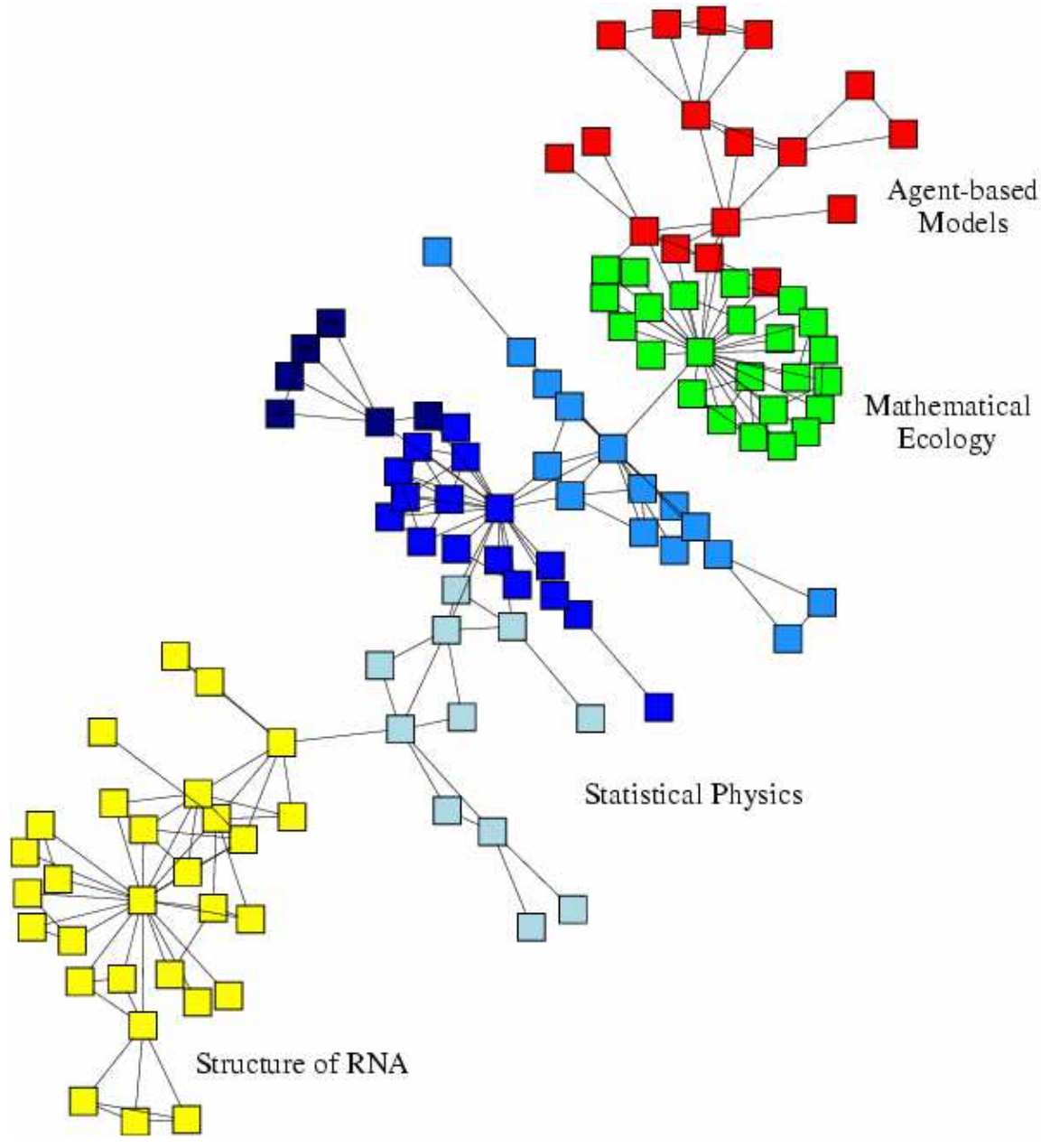
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



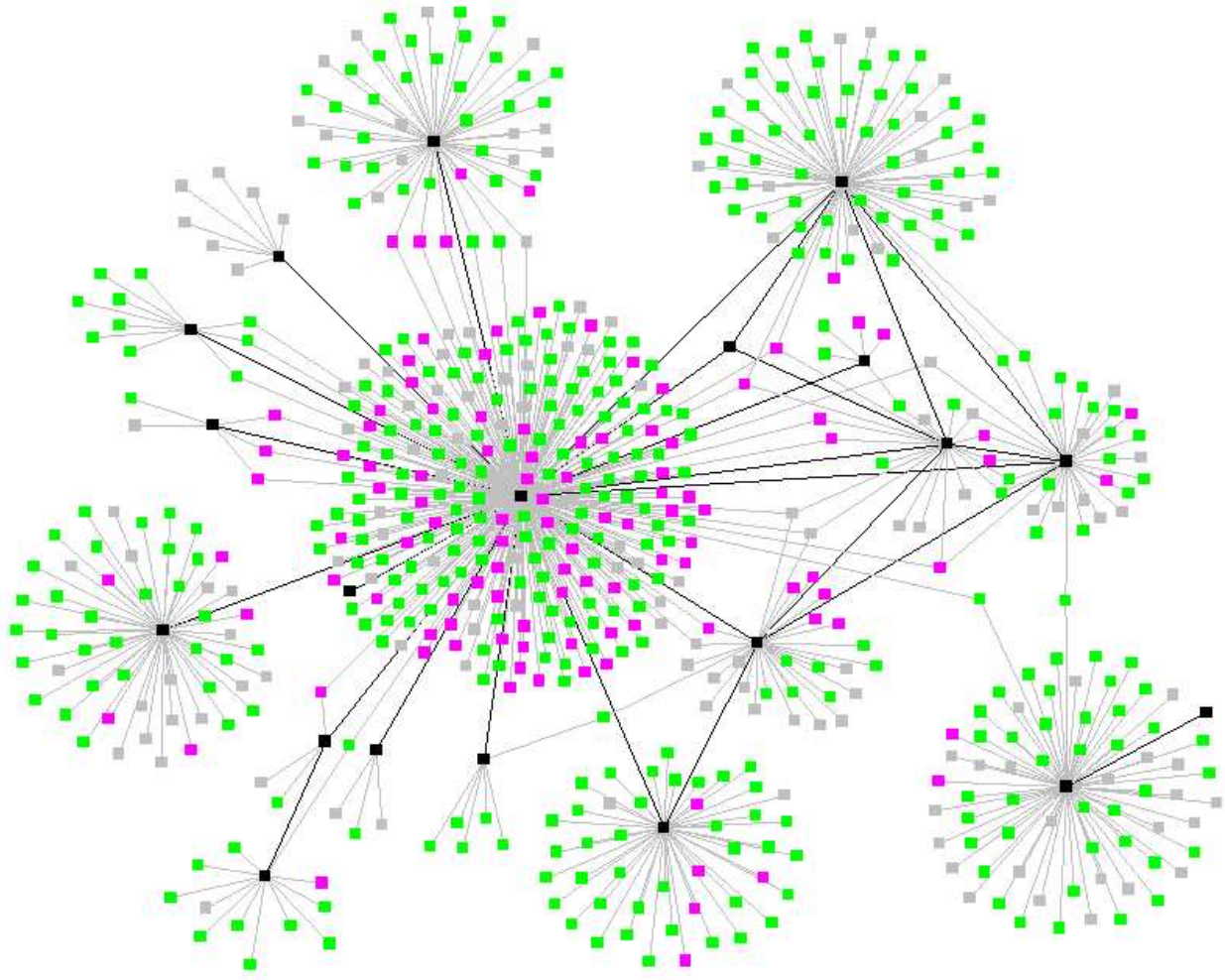
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



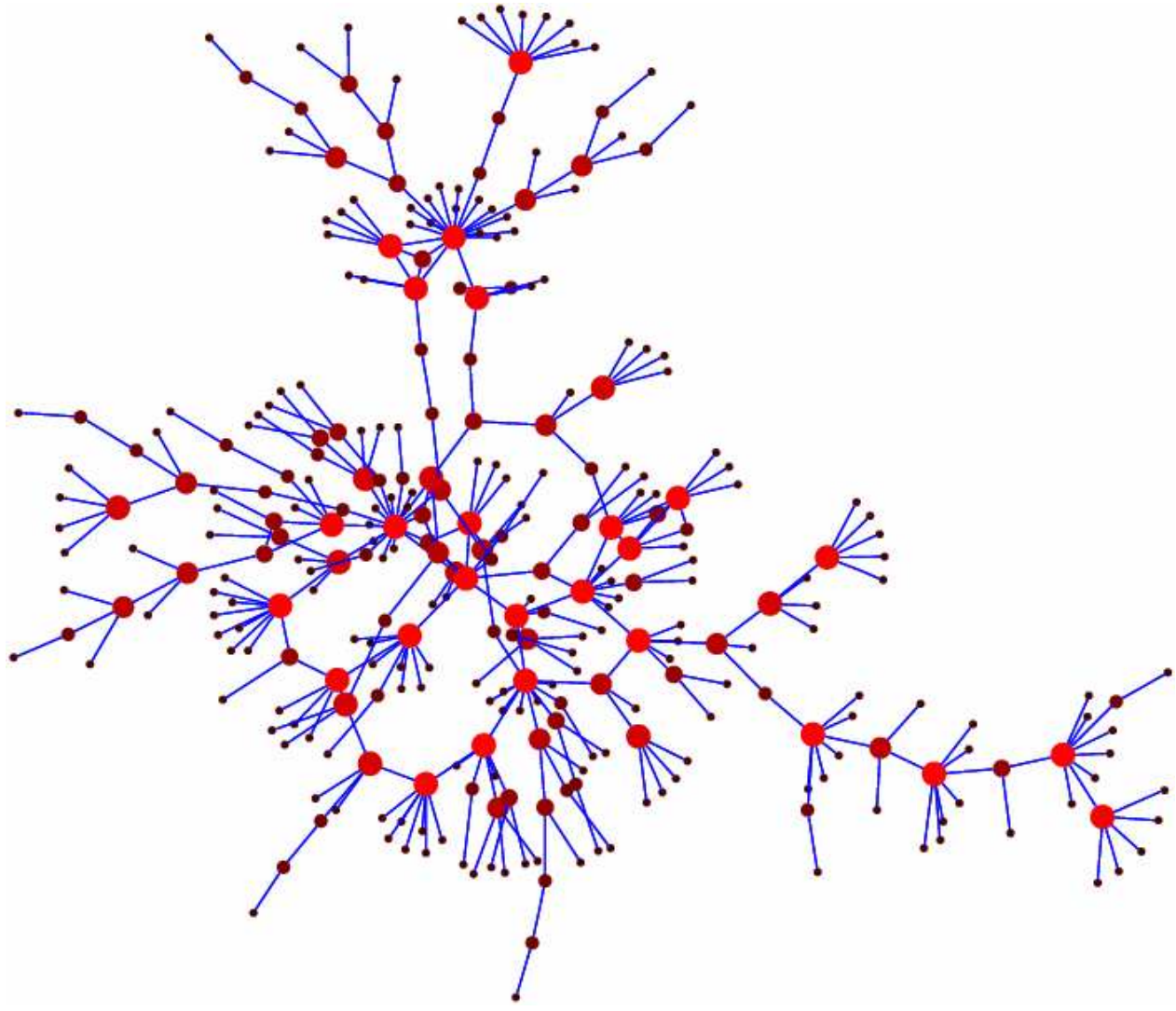
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



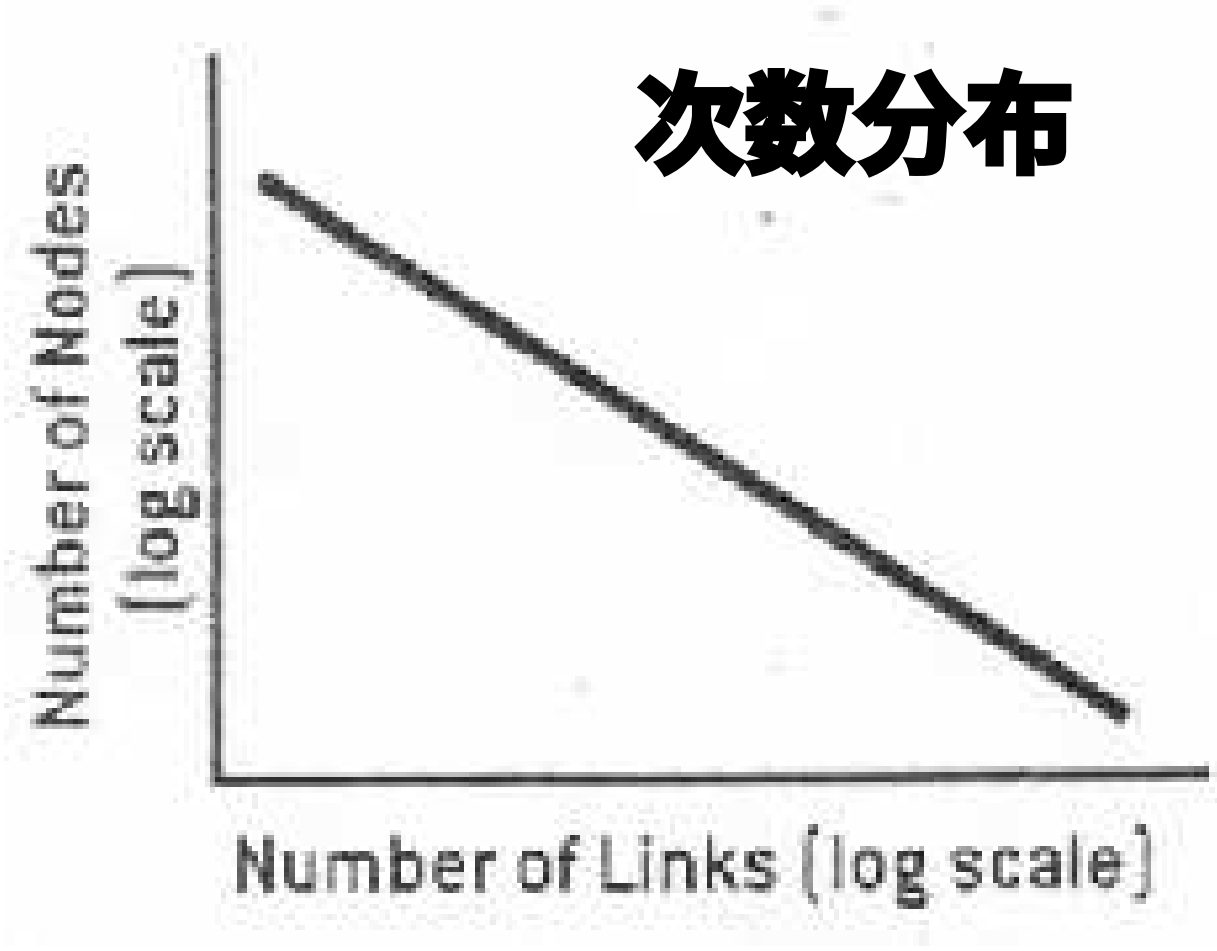
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



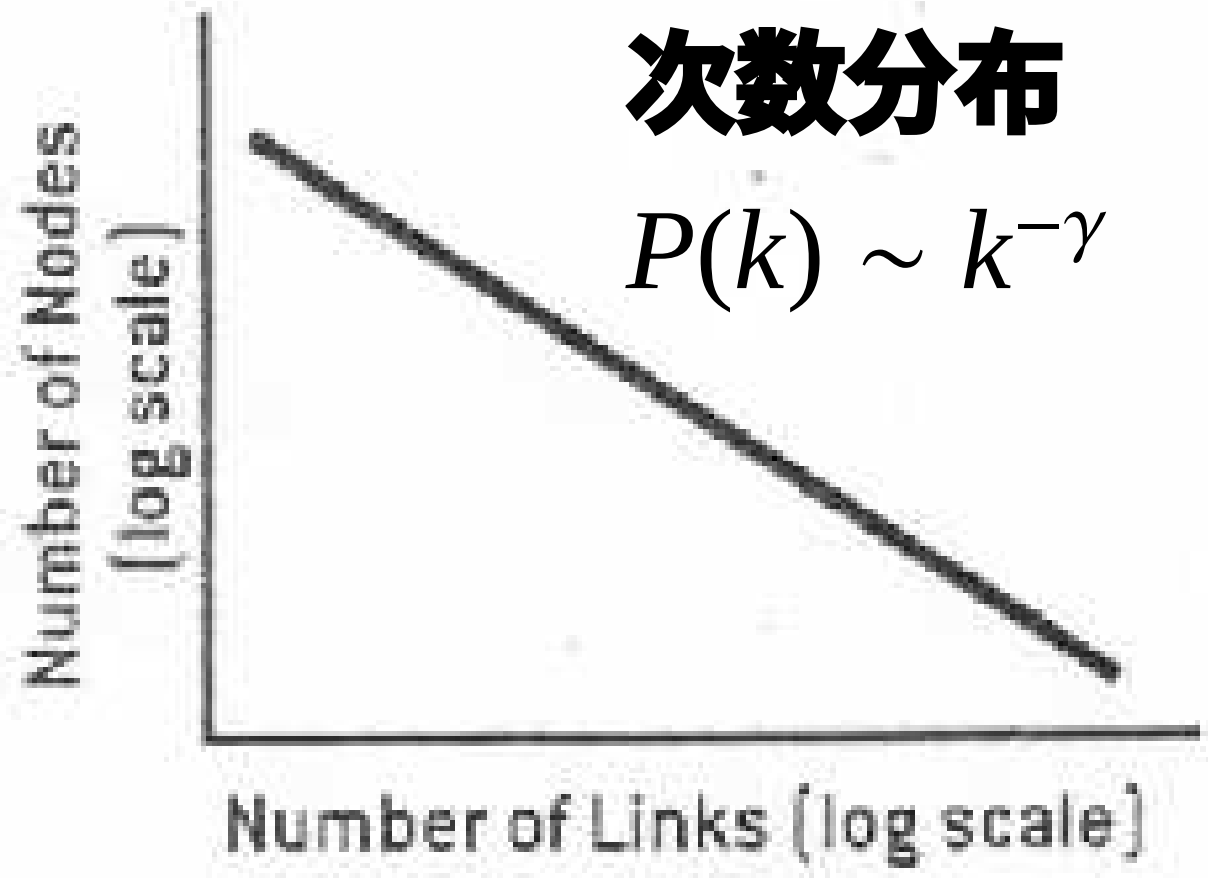
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



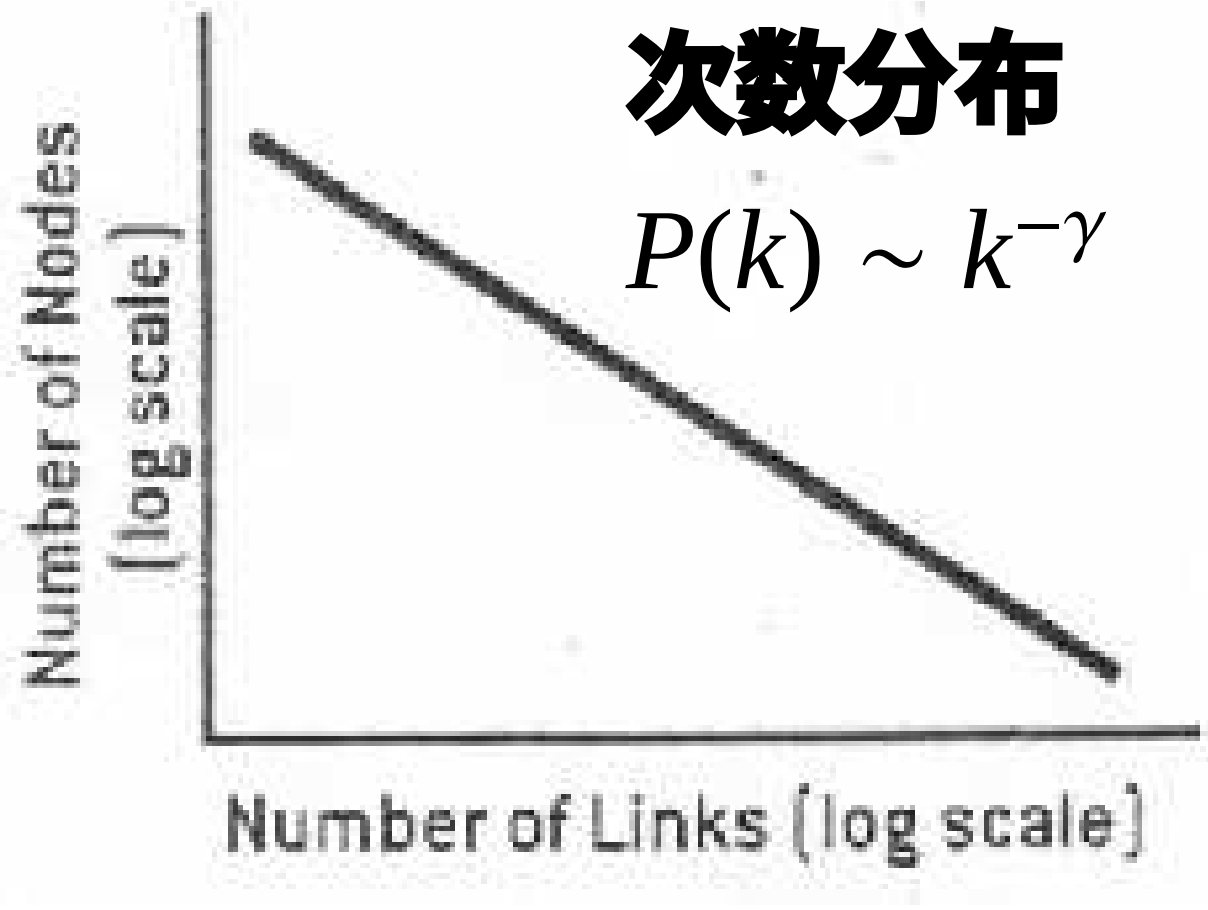
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉

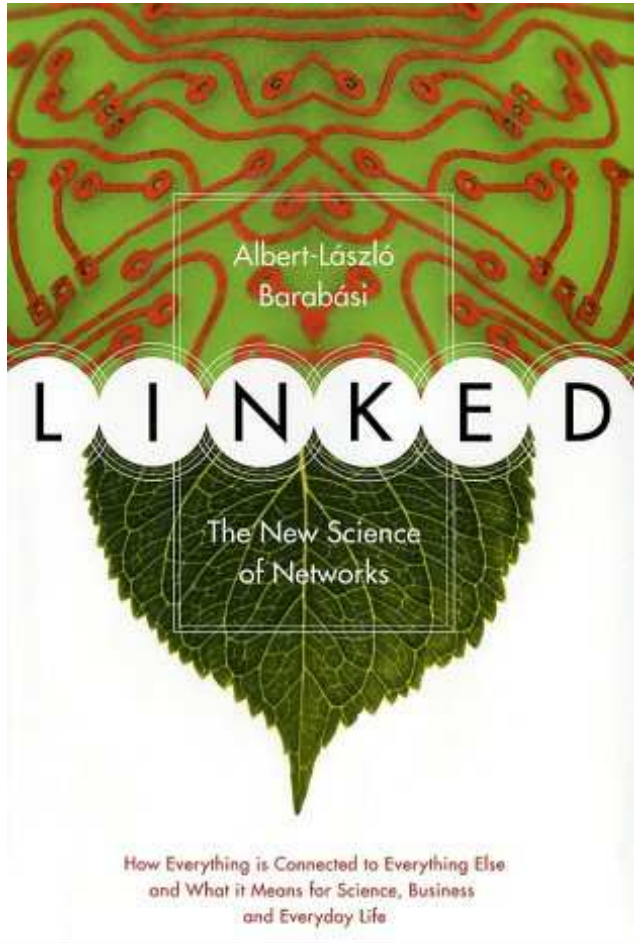


スケールフリーネットワーク

現実問題との関わり …

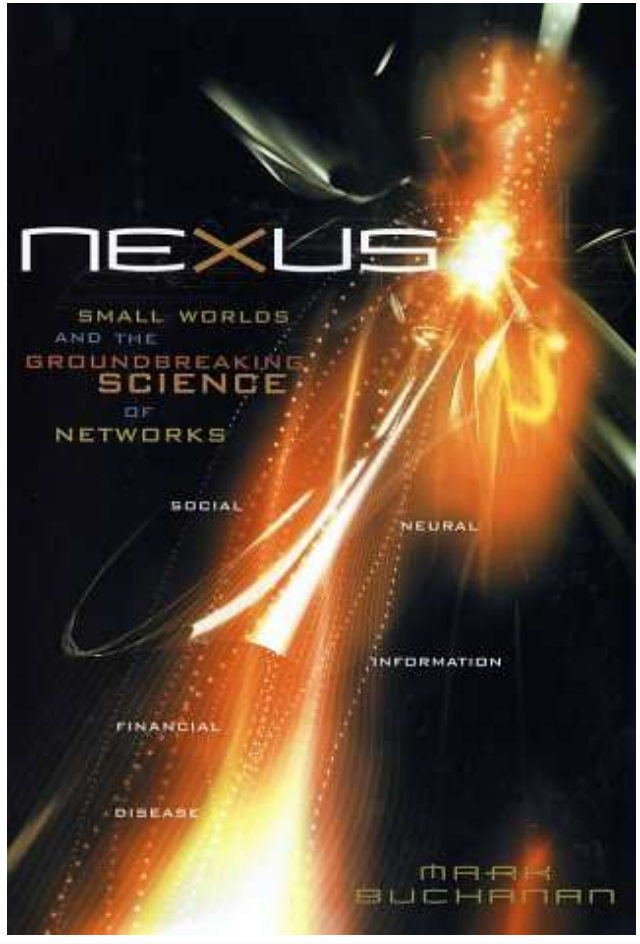
- なぜインターネットはルータの故障に対して頑健なのか?
  一日平均約百台のルータが故障している.
- なぜ金持ちはますます金持ちになるのか？
  80 対 20 の法則 (パレートの法則)
- 金持ちがますます成功する社会で,
  新参者はどうすれば生き残れるのか?
- なぜマイクロソフトは一人勝ちしたのか？
- 有限な予算で病気の感染拡大を防ぐにはどうすべきか？
- ブラックアウトを防ぐ手立てはあるのか？

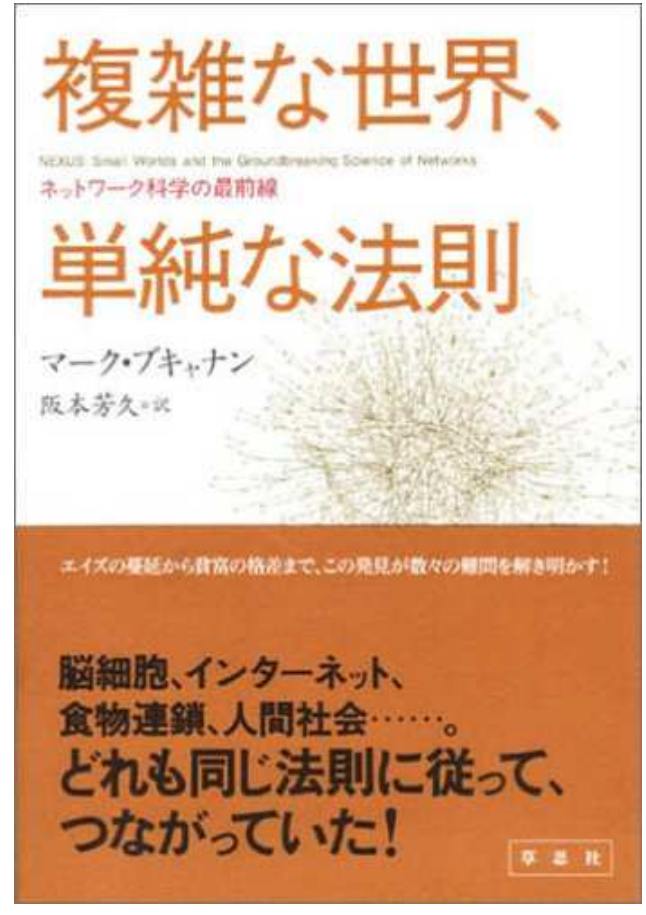
書籍紹介



アルバート＝ラズロ・バラバシ 著，青木薫 訳:
新ネットワーク思考~ 世界のしくみを読み解く~ ，NHK **出版，**
2002**.**

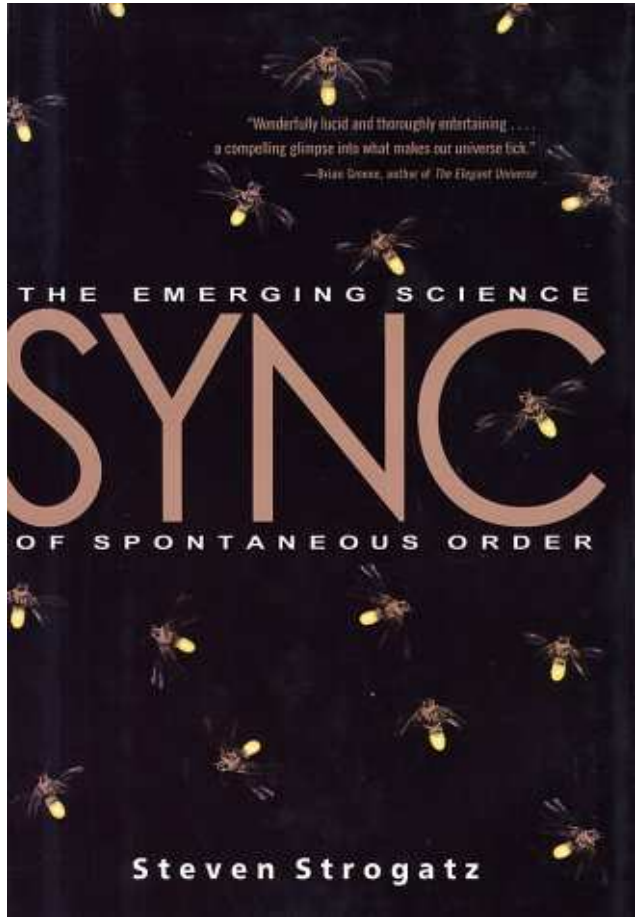
書籍紹介





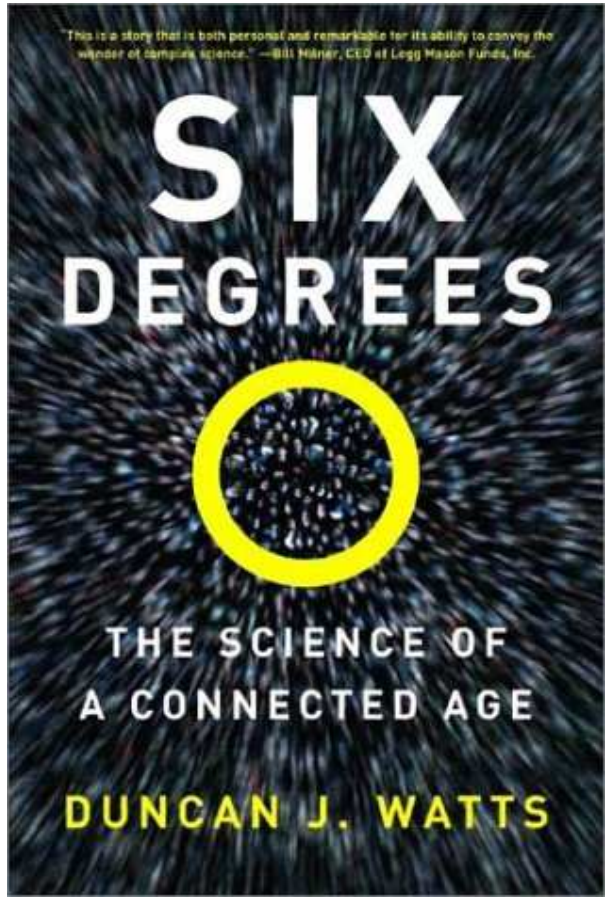
マーク・ブキャナン 著，阪本芳久 訳:
複雑な世界，単純な法則，–ネットワーク科学の最前線–，草思社，
2005．

書籍紹介



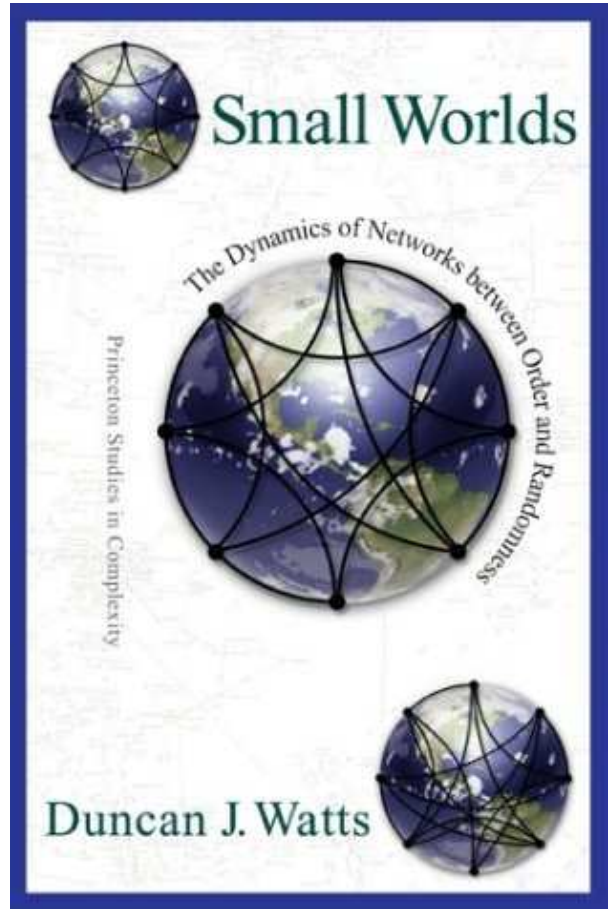
スティーブン・ストロガッツ 著，蔵本由紀 監修，長尾 力 訳:
シンク
SYNC，–**なぜ自然はシンクロしたがるのか**–，**早川書房**，2005.

書籍紹介



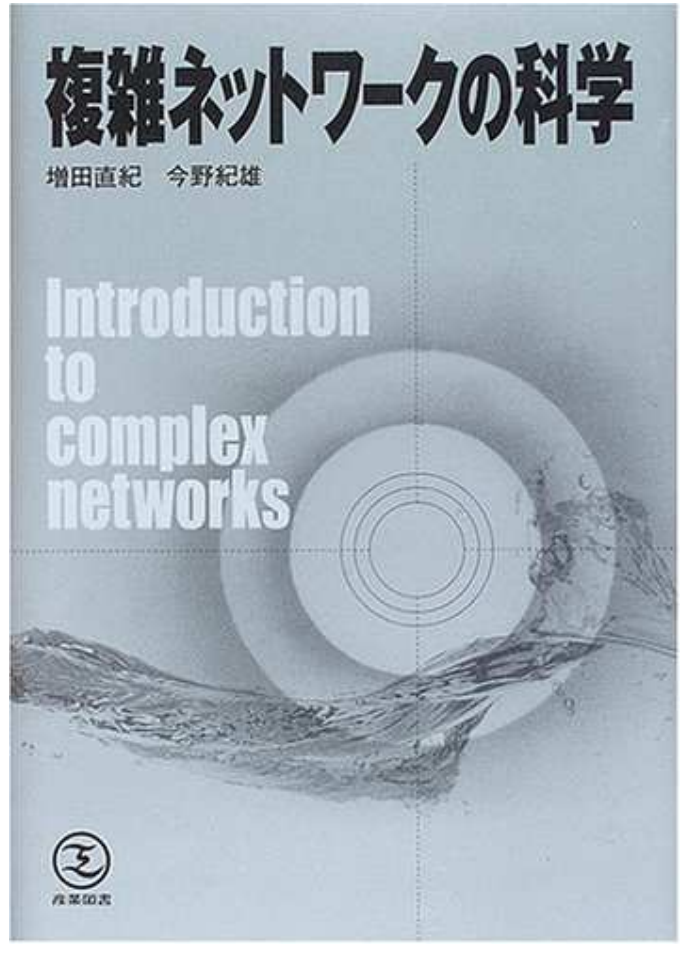
Duncan J. Watts, Six Degrees, The Science of a Connected Age, W. W. Norton & Company, 2003.

書籍紹介



Duncan J. Watts, Small Worlds, The Dynamics of Networks between Order and Randomness, Princeton University Press, 1999.

書籍紹介



増田 直紀，今野 紀雄 著:
複雑ネットワークの科学，産業図書，2005**.**

課題

1. ケーニヒスベルグの橋の問題には解が存在しないことを証明しなさい．
2. ケビン・ベーコン・ゲームを試し，その結果を報告しなさい．
3. あなたが考える複雑ネットワークの例をあげなさい．但し，講義中に紹介した例は除く．

注意

- 大学生らしい文章を書くこと．
- 自分でやること．