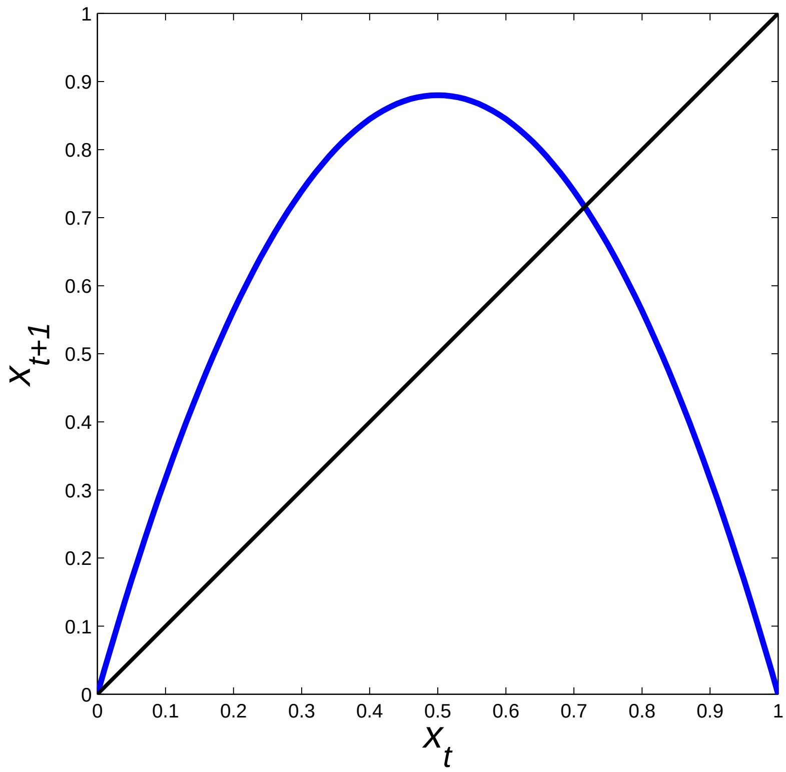
周期解とその安定性

- $x_{t+n} = x_t$
- $x_{t+j} \neq x_t,\ j = 1, 2, \cdots, n-1$

例: **ロジスティック写像の** 2 **周期点は**?

$$x_{t+2} \quad = \qquad\quad = f^2(x_t)$$

図式解法を用いると •••



因数分解にチャレンジ！

$$R^3 x^4 - 2R^3 x^3 + R^2(1+R)x^2 + (1-R^2)x = 0$$

周期解の安定性

$$x_{t+2} = f(f(x_t))$$

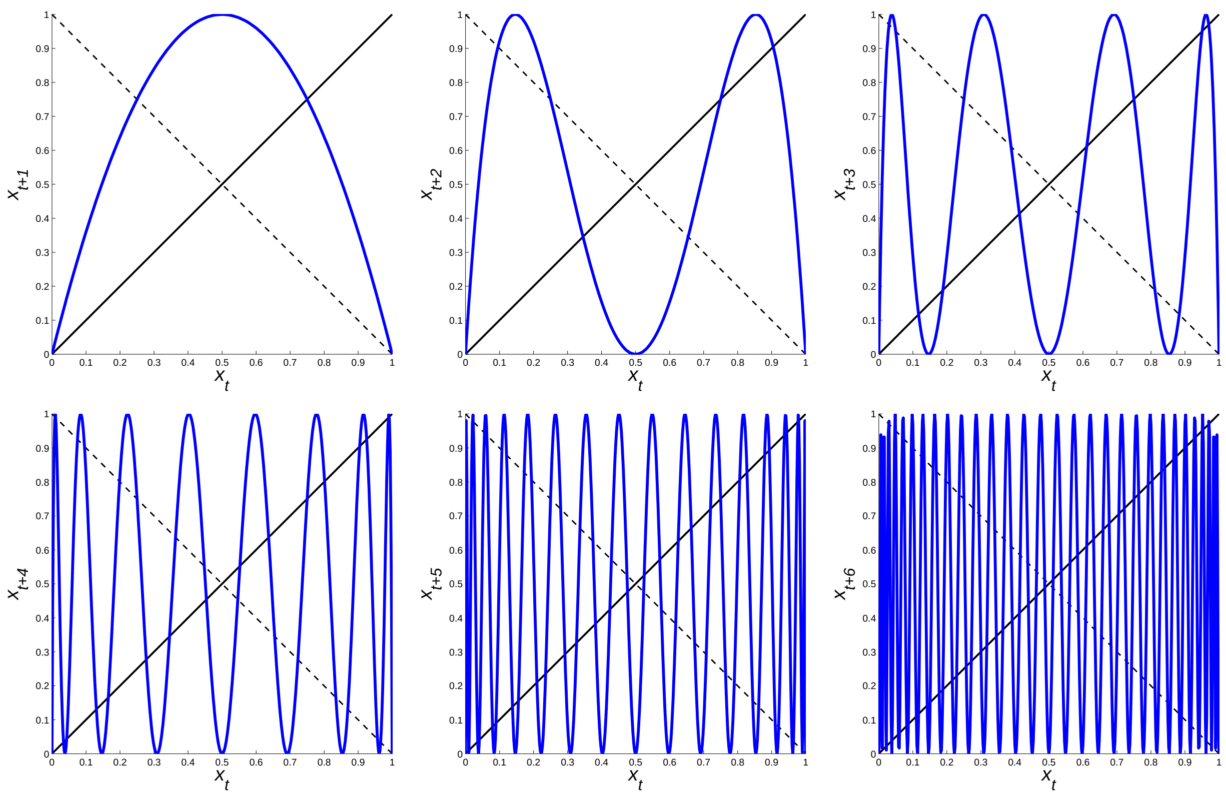
を満たす点を x^* とすると，

これまでをまとめると

- 1 次元写像 $x_{t+1} = f(x_t)$ に対して，
  - n 周期解を考えるならば，
    ________ について図式解法を用いて考えれば良い．
  - n 周期解の安定性を考えるならば，

    を考えれば良い．
  - 上記の m は，図式解法では，補助線と $f^{(n)}(x_t)$ との交点における ________________ である．
  - コンピュータ上でプログラムを作ることによる数値実験の場合に観測されたら，その固定点や周期解は ____ である．逆に，不安定なもの (固定点，周期解) は，コンピュータによる数値計算でも ________ ．

$R = 4$ のときに n 周期解を考える



$R = 4$ のときに n 周期解を考える

ロジスティック写像の場合，$R = 4$ において，
________________________ する．

↓

全ての n 周期解が不安定である
つまり，________________________

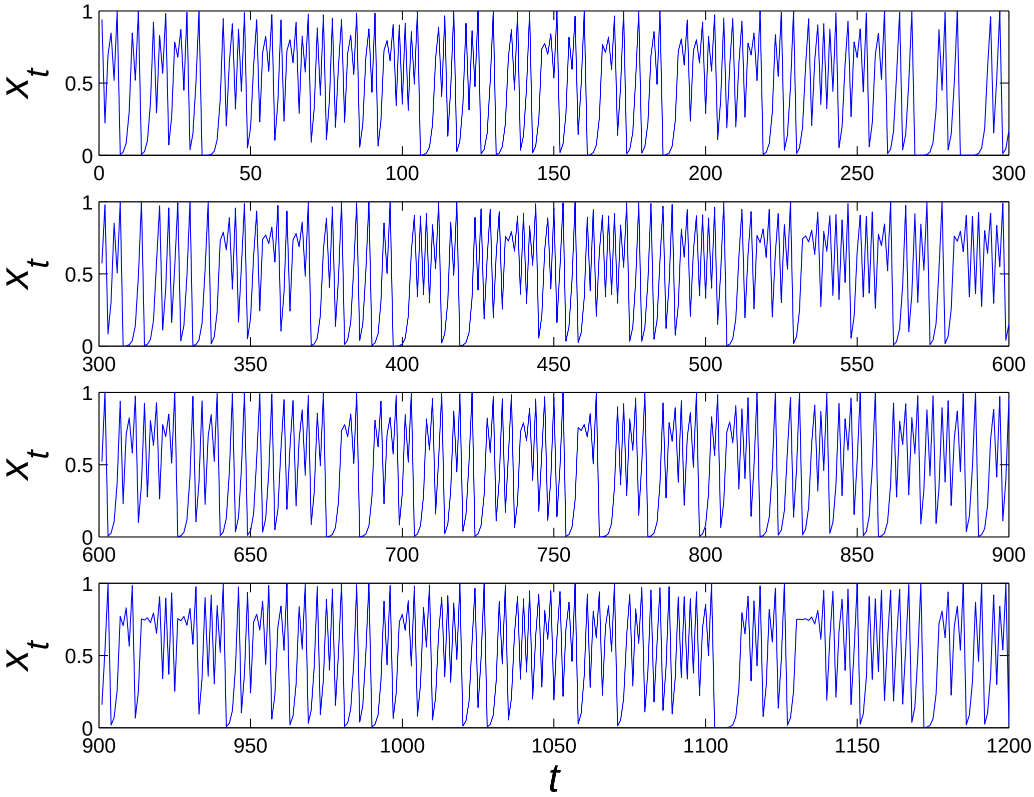
↓

これが __________ だ!

カオスの“定義”

- ❑ Aperiodic
- ❑ Bounded
- ❑ Deterministic
- ❑ Sensitive Dependence on Initial Conditions

非周期的，有界性



決定論的

$$\boxed{x_{t+1} = f(x_t) = 4x_t(1 - x_t)}$$

- $t = 0$ での値 x_0 (初期値) から x_1 を決定できる
  確率的な要素は全く含まれていない
- $t = 1$ での値 x_1 から x_2 を決定できる
- この過程は，次々と繰り返される．つまり，

初期値が与えられると，未来永劫，全てが決定される

↓

「決定論に従う」

決定論的なのに確率的なものを作れる!

$$x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$$

- $x_t(t = 0, 1, 2, \ldots,)$ の系列を，$0 \leq x_t \leq 0.5$ を表 (Face)，$0.5 < x_t \leq 1$ を裏 (Reverse) とすれば，コイントス (確率的) を繰り返した系列ができる．

$$\text{例}: \left\{ \begin{array}{ll} \text{FRRFFRRFFFFRFFR} & \ldots \\ \text{RFRFFFRFFFRRRFF} & \ldots \\ \text{FRRRFRRFFFFFFFF} & \ldots \\ \text{RRFRFRRRFRRFFFF} & \ldots \\ \text{FRFRFRFRFFFFRRF} & \ldots \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{任意の FR 系列に対応する初期値 } x_0 \text{ が } (0, 1) \text{ に存在する}}$$

フォン・ノイマンもカオスを知っていた!

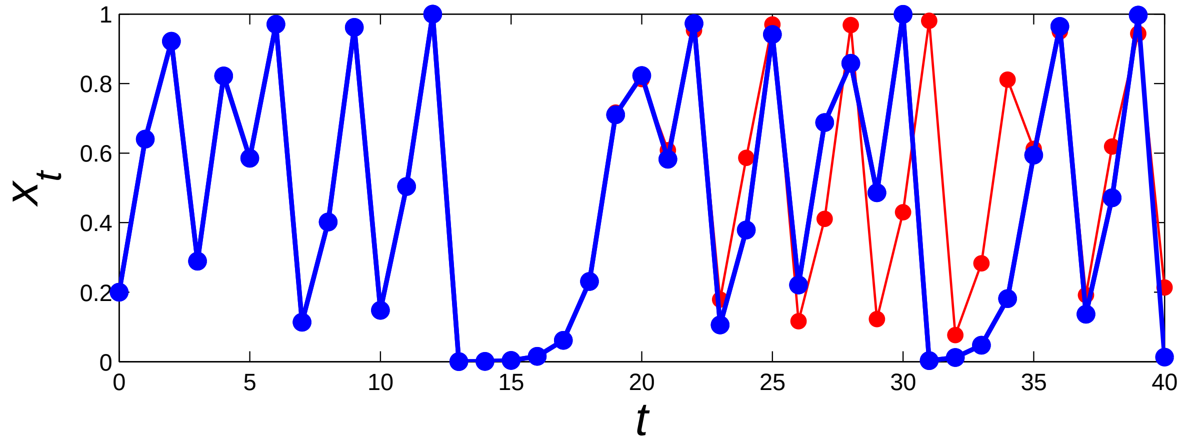
403. S. M. Ulam and John von Neumann: *On combination of stochastic and deterministic processes.* Preliminary report.

A computational procedure for the study of various differential equations—ordinary or partial—is investigated. It consists of a statistical model of the corresponding physical problem and involves a process which is a combination of deterministic and stochastic processes (see Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 51-9-165). This procedure is analogous to the playing of a series of "solitaire" card games and is performed on a computing machine. It requires, among others, the use of "random" numbers with a given distribution. Various distributions of such numbers can, however, be obtained by deterministic processes. For example, starting with almost every x_1 (in the sense of Lebesgue measure) and *iterating* the function $f(x) = 4x \cdot (1 - x)$ one obtains a sequence of numbers on (0, 1) with a computable algebraic distribution. By playing suitable *games* with numbers "drawn" in this fashion, one can obtain various other distributions, either given explicitly or satisfying given differential or integral equations. (Received September 3, 1947.)

初期値鋭敏依存性

ロジスティック写像 $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$

$$x(0) = \begin{cases} 0.1 \\ 0.1 + 10^{-8} \end{cases}$$



カオスの特徴

ロジスティック写像のような決定論的非線形ダイナミクス

⟺