カオスの“定義”

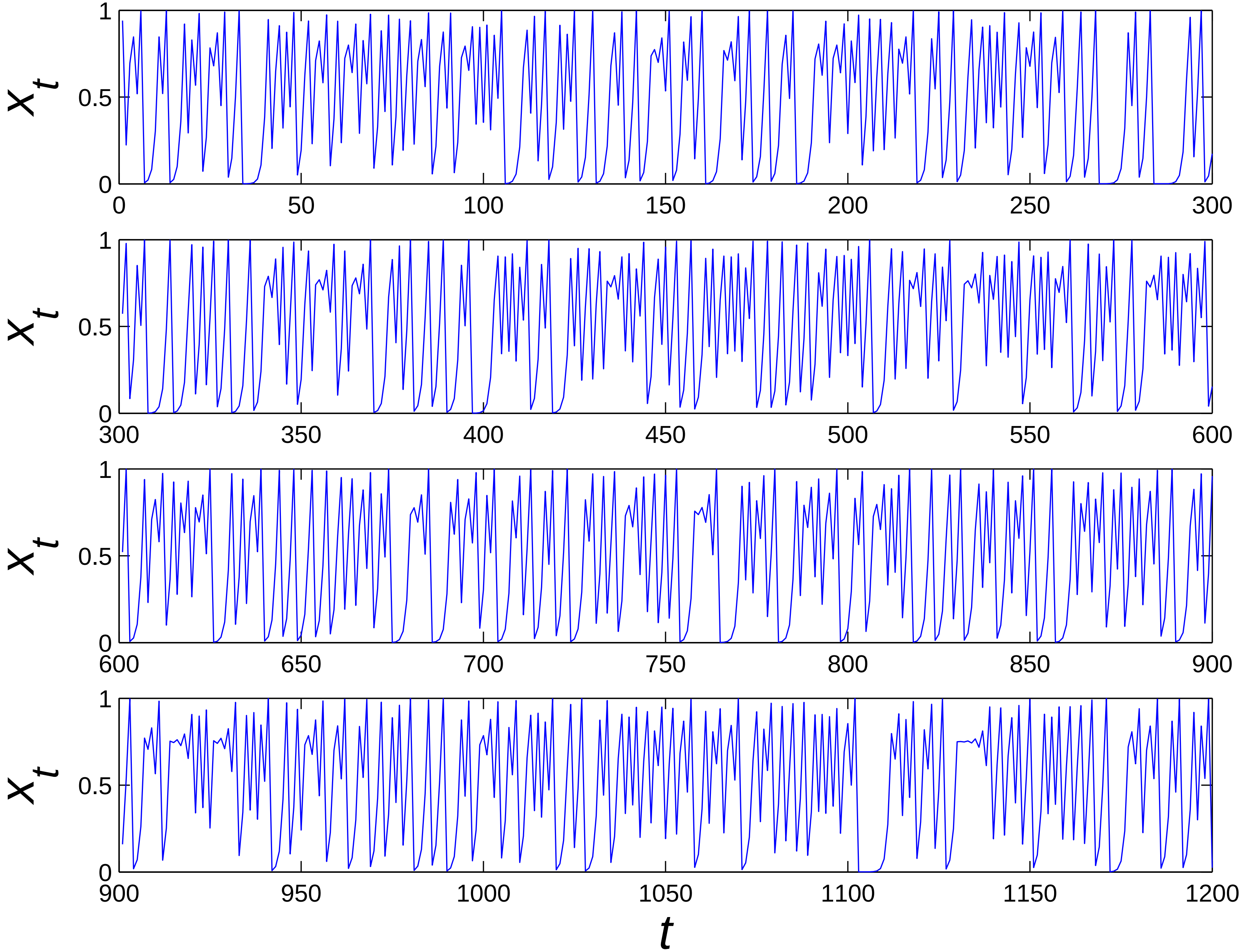
- ❏ Aperiodic

- ❏ Bounded

- ❏ Deterministic

- ❏ Sensitive Dependence on Initial Conditions

非周期性，有界性



x_t
1
0.5
0
0 50 100 150 200 250 300
300 350 400 450 500 550 600
600 650 700 750 800 850 900
900 950 1000 1050 1100 1150 1200
t

カオスの“定義”

- ❑ Aperiodic
  - – **同じ状態は二度と生じない**
  - ☞ **ただし，コンピュータシミュレーションがディジタル計算であることには注意する必要がある．**
- ❑ Bounded
  - – **写像を何回繰り返しても，有限な空間に存在している** ($\pm\infty$ **に発散しない**)**．**
- ❑ Deterministic
- ❑ Sensitive Dependence on Initial Conditions

決定論的

$$x_{t+1} = f(x_t) = 4x_t(1 - x_t)$$

- ❑ $t = 0$ での値 x_0 (初期値) から x_1 を決定できる
  確率的な要素は全く含まれていない
- ❑ $t = 1$ での値 x_1 から x_2 を決定できる
- ❑ この過程は，次々と繰り返される．つまり，

初期値が与えられると，未来永劫，全てが決定される ⟷ 「決定論に従う」

→ **確率的な法則も創り出すことができる!!**

確率的 (非決定論的) な法則とは?

- さいころ投げ，コイントス，etc

表表表表表表表表表表表表表表表表表表 ⋯
裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏裏 ⋯
表裏表裏表裏表裏表裏表裏表裏表裏表裏 ⋯
表裏裏表裏裏表裏裏表裏裏表裏裏表裏裏 ⋯
⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯
裏表裏表表表裏表表表裏裏裏表表表裏裏 ⋯
裏表裏裏裏表裏裏表表表表表裏裏裏表裏 ⋯
表裏表裏表裏表裏表表表表裏裏表裏裏表 ⋯

$\omega_0\ \omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4\ \omega_5\ \omega_6\ \cdots\ \omega_{t-1}\ \omega_t\ \omega_{t+1}\ \cdots\quad \cdots$

$$\omega_i \in \{\text{表}, \text{裏}\}$$

決定論的 → 確率的

ロジスティック写像 $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$ より得られる x_t $(t = 0, 1, 2, \ldots,)$ の系列に対し，

$0 \leq x_t \leq 0.5$	$\rightarrow$	表
$0.5 < x_t \leq 1$	$\rightarrow$	裏

という対応を考えると，コイントス (確率的) を繰り返した系列ができる．つまり，

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots$$

が与えられたら，

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \ldots$$

を作ることができる．

確率的 → 決定論的

驚くべきは，逆のことが成立する!!!

無限記号列

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \dots$$

を勝手に取ってくる．

すると，取ってきた無限記号列に対応する，ロジスティック写像から生み出された

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots$$

という系列が存在し，全ての t について $x_t \in \omega_t$ となるような初期値 x_0 をうまく取ることができる．

決定論的なのに確率的なものを作れる!

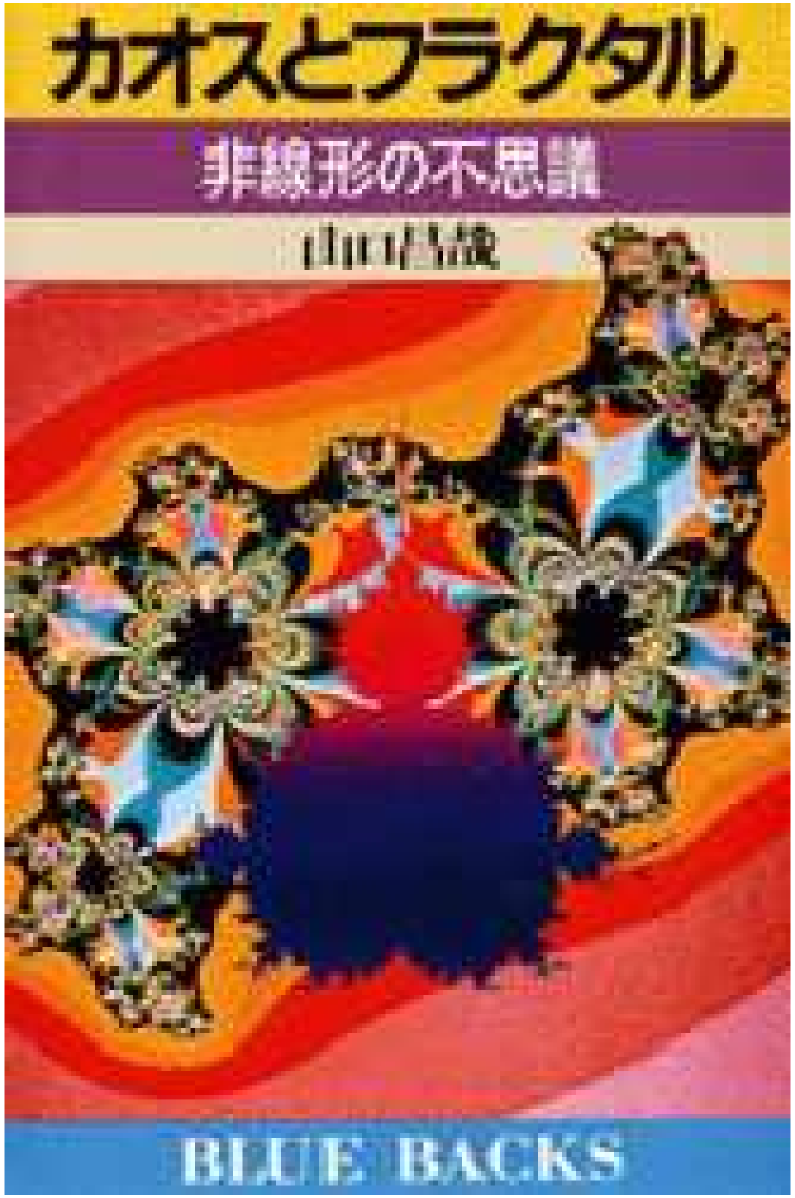
ロジスティック写像より得られる決定論的な系列

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots$$

コイントスより得られる確率的 (非決定論的) な系列

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \ldots$$

証明



山口 昌哉
「カオスとフラクタル
– 非線形の不思議 –」
講談社ブルーバックス，
1986．

証明は pp.36–44 に載っている．

フォン・ノイマンもカオスを知っていた!

403. S. M. Ulam and John von Neumann: *On combination of stochastic and deterministic processes*. Preliminary report.

A computational procedure for the study of various differential equations—ordinary or partial—is investigated. It consists of a statistical model of the corresponding physical problem and involves a process which is a combination of deterministic and stochastic processes (see Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 51-9-165). This procedure is analogous to the playing of a series of "solitaire" card games and is performed on a computing machine. It requires, among others, the use of "random" numbers with a given distribution. Various distributions of such numbers can, however, be obtained by deterministic processes. For example, starting with almost every x_1 (in the sense of Lebesgue measure) and *iterating* the function $f(x)=4x\cdot(1-x)$ one obtains a sequence of numbers on (0, 1) with a computable algebraic distribution. By playing suitable *games* with numbers "drawn" in this fashion, one can obtain various other distributions, either given explicitly or satisfying given differential or integral equations. (Received September 3, 1947.)

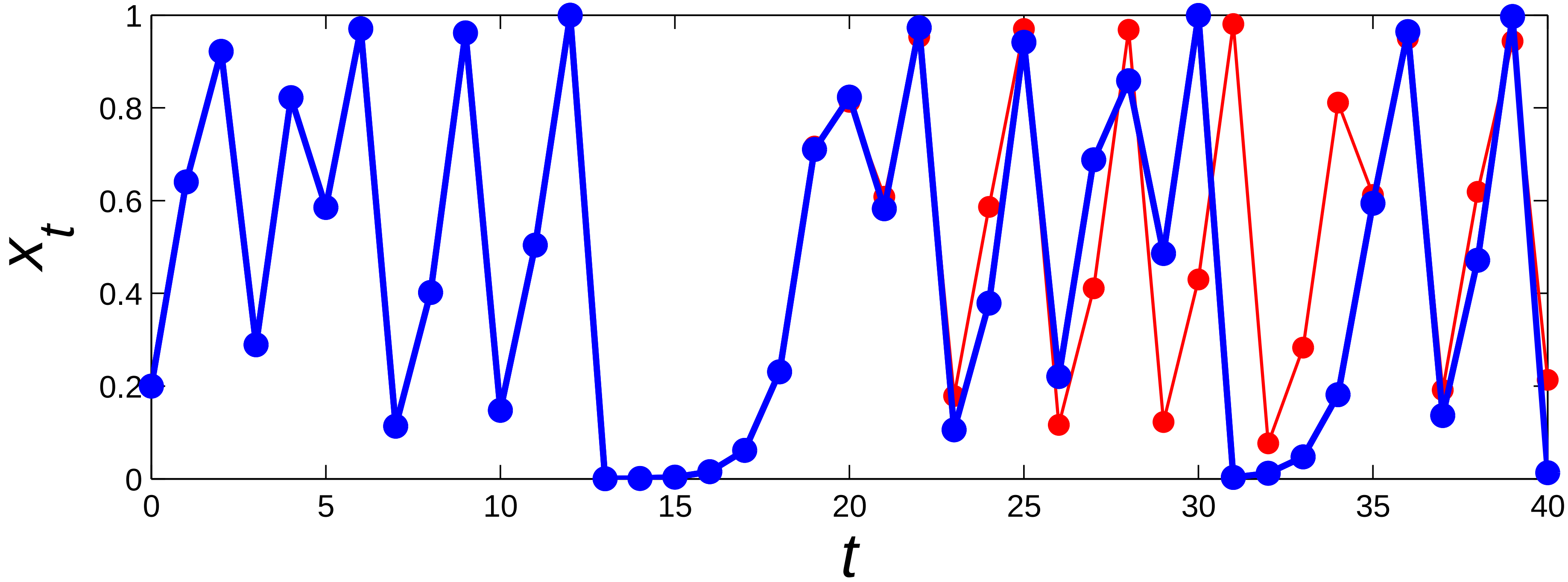
カオスの“定義”

- Aperiodic
  - 同じ状態は二度と生じない
  - ☞ ただし，コンピュータシミュレーションがディジタル計算であることには注意する必要がある．
- Bounded
  - 写像を何回繰り返しても，有限な空間に存在している (±∞ に発散しない)．
- Deterministic
  - 写像を繰り返えす法則は完全に決まっている．
  - ✌ 神はさいころを振るか．Does God play dice?
- Sensitive Dependence on Initial Conditions

初期値鋭敏依存性

ロジスティック写像 $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$

$$x(0) = \begin{cases} 0.1 \\ 0.1 + 10^{-8} \end{cases}$$



カオスの特徴

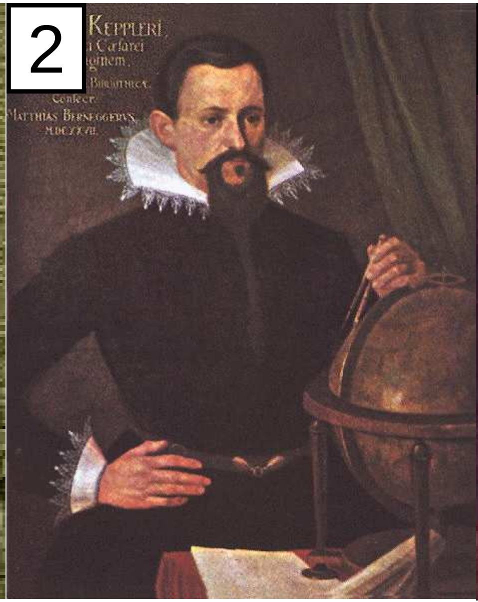
ロジスティック写像のような**決定論的非線形ダイナミクス**

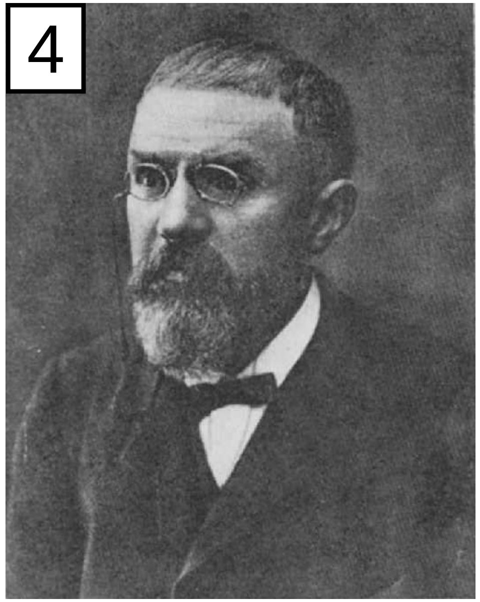
- ❑ ____________________
- ❑ ____________________
- ❑ ____________________

⟺

カオスの源流と発展

1

2

3

4


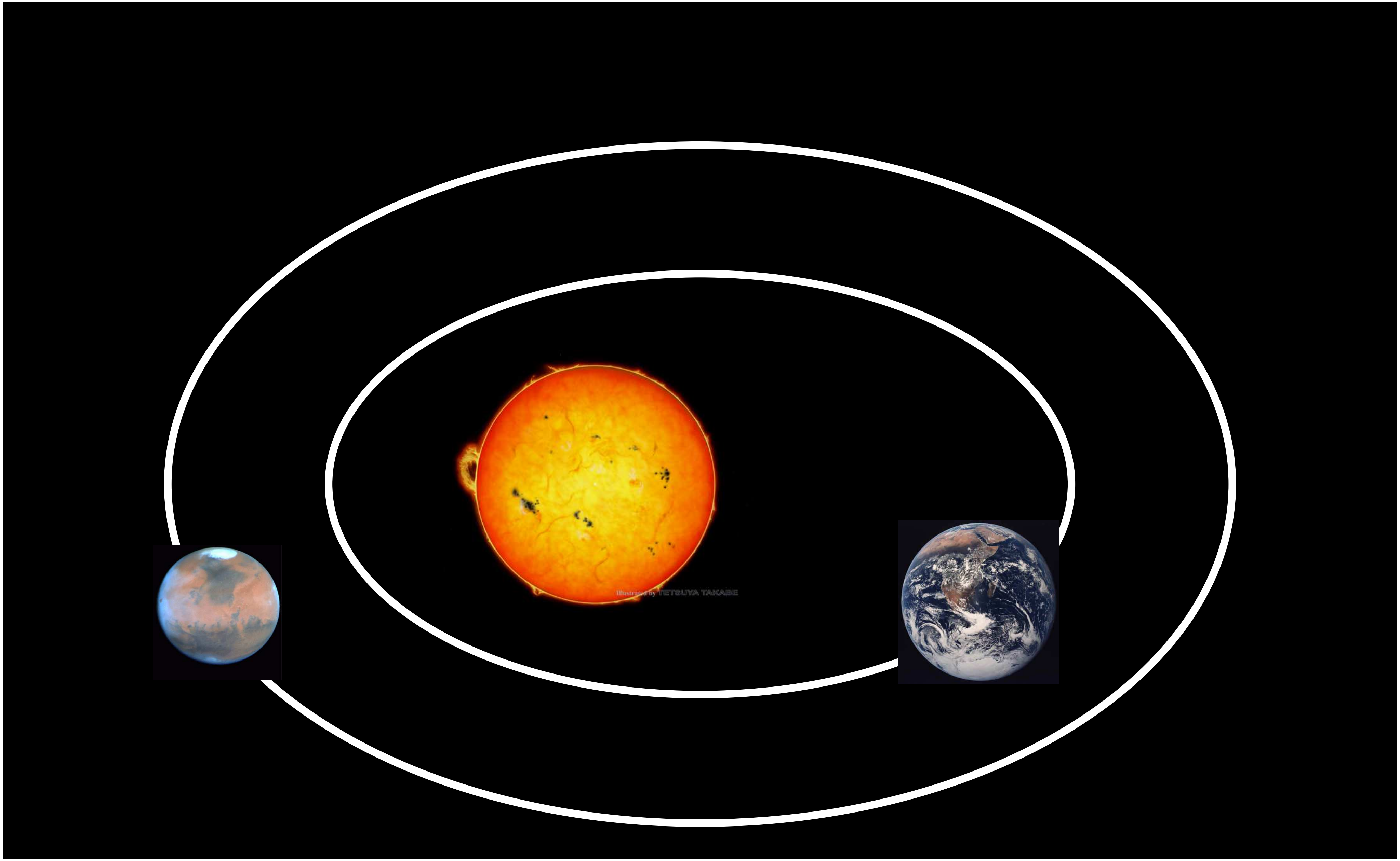
1

2

3

4

2体問題から ______ へ



20 世紀の三大発見

- ニュートン力学的世界観を打ち破る
  - 相対性理論 ——
  - 量子力学 ——
  - カオス ——
-

例: 単振り子から二重振り子へ
- 単振り子 (2 自由度) —- 解析的に求解可能，周期解
- 二重振り子 (4 自由度) —- 解析的に求解不可能，カオス解

カオスへ至るルート

実際に，ロジスティック写像

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

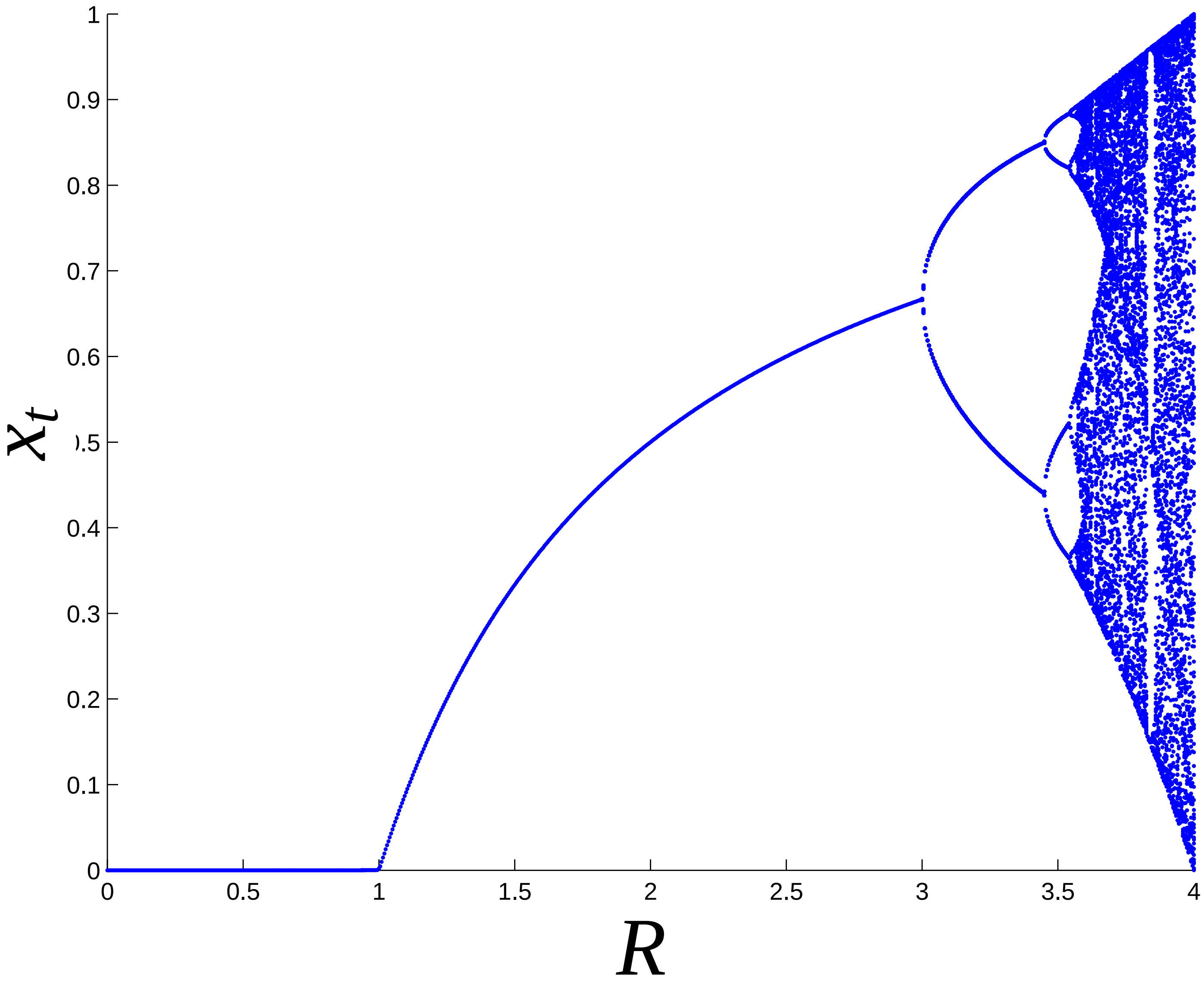
のパラメータ R **を徐々に変化させると，どのようなことが起きるのだろうか**?

- **実際に，**R **を少しずつ変えた場合に，初期値** x_0 **に対して，** $x_1, x_2, x_3, \ldots$ **がどうなるかを見てみよう．**

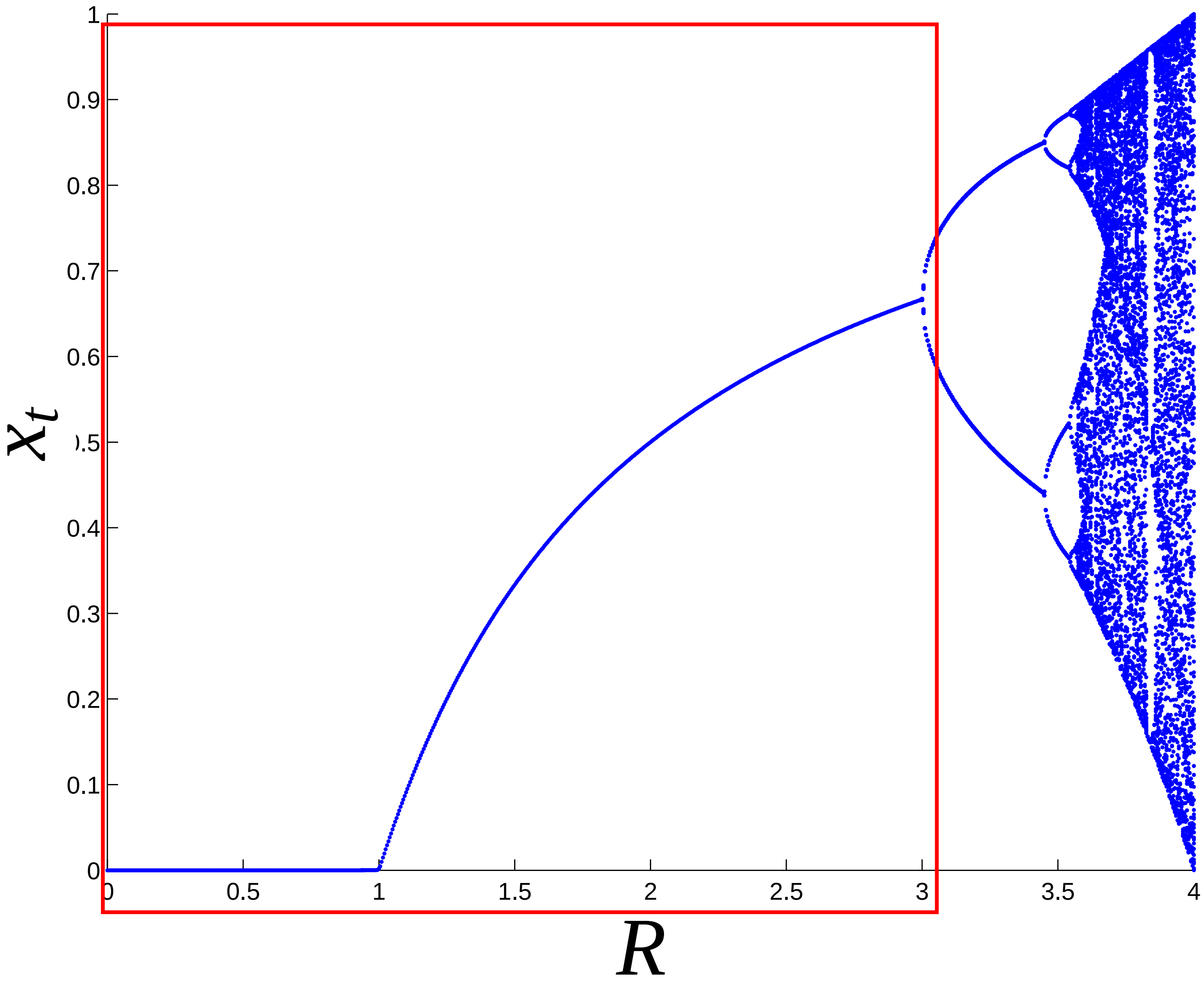
↓

- ________________________________ **＝** ____

ロジスティック写像の分岐図



$0 < R < 3$ の部分に注目してみよう



演習