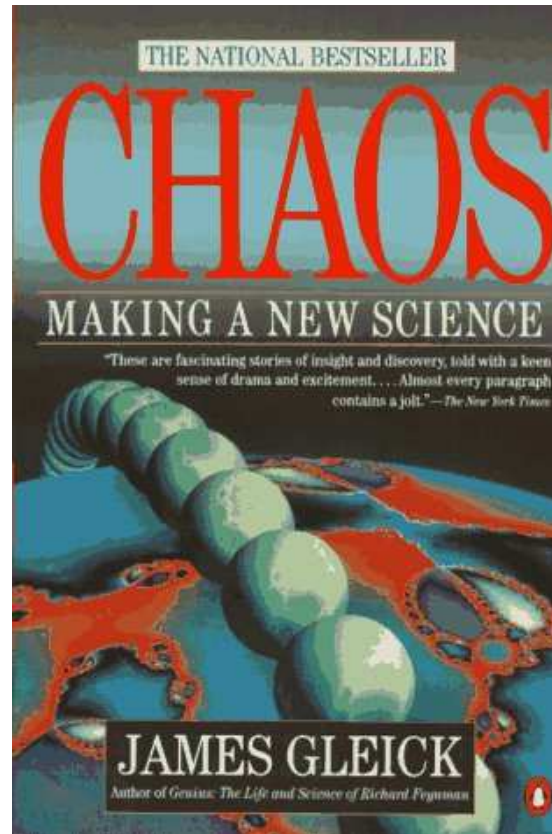


参考資料紹介

- James Gleick, “Chaos, Making a New Science,” Penguin Books, 1987; 大貫昌子訳，上田暁亮 監修: カオス 新しい科学をつくる，新潮文庫，



カオスへ至るルート

ロジスティック写像

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

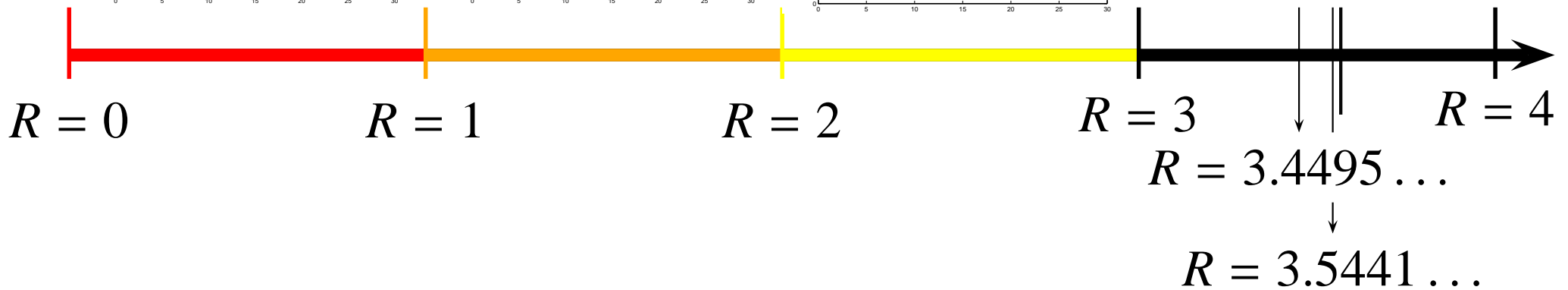
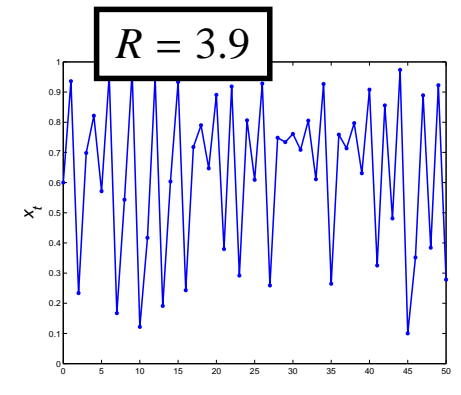
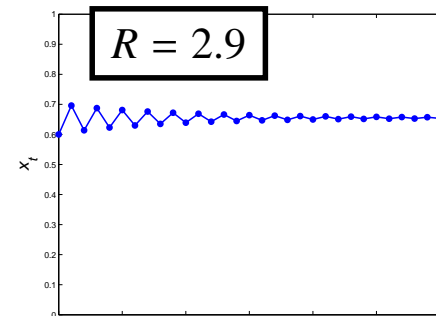
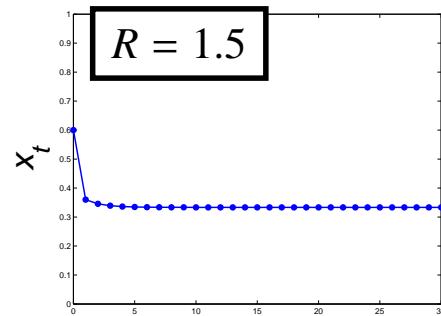
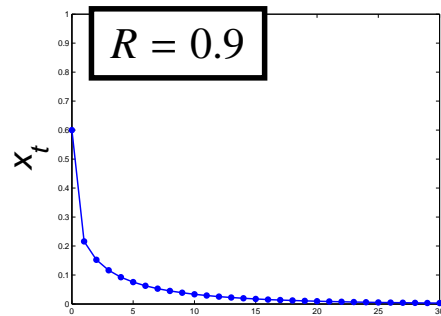
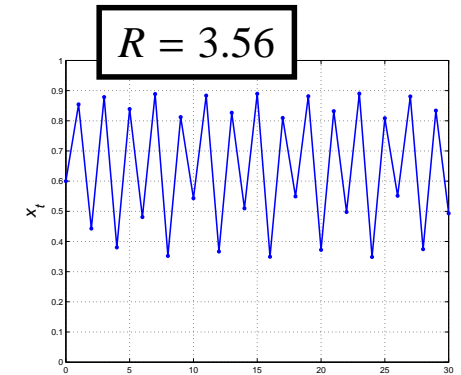
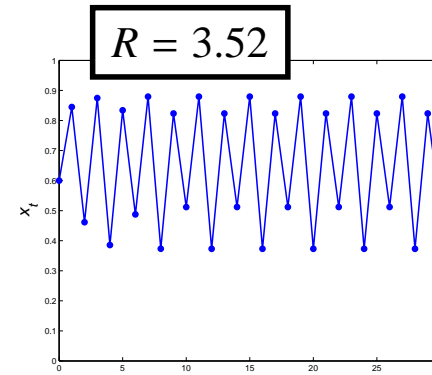
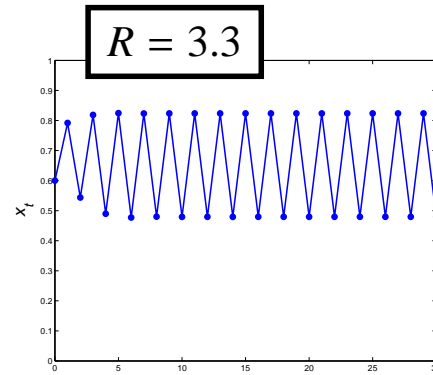
のパラメータ R を徐々に変化させると、どのようなことが起きるのだろうか？

- 実際に、 R を少しずつ変えた場合に、初期値 x_0 に対して、 x_1, x_2, x_3, \dots がどうなるかを見てみよう。



_____ = _____

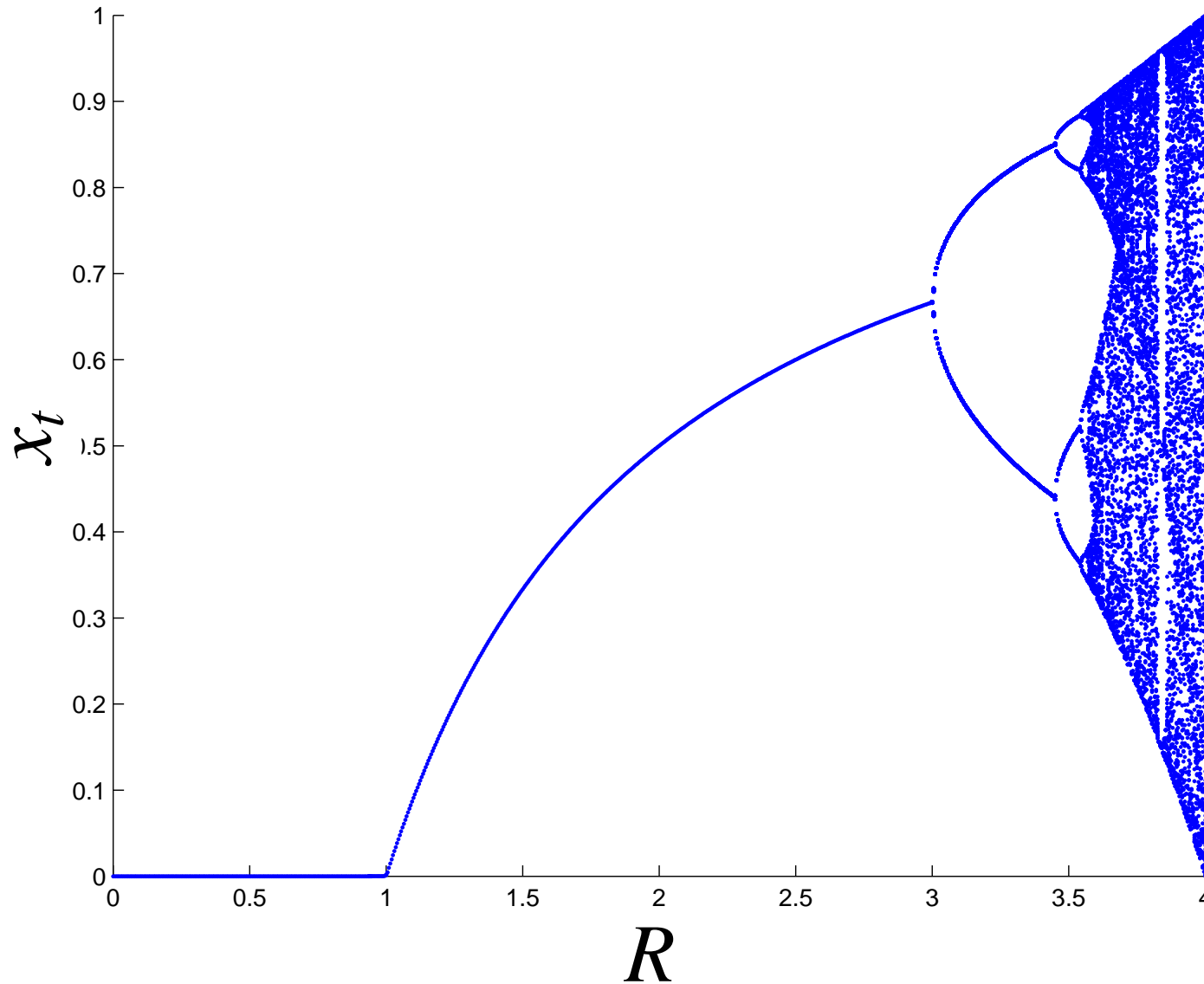
分岐 (bifurcation)



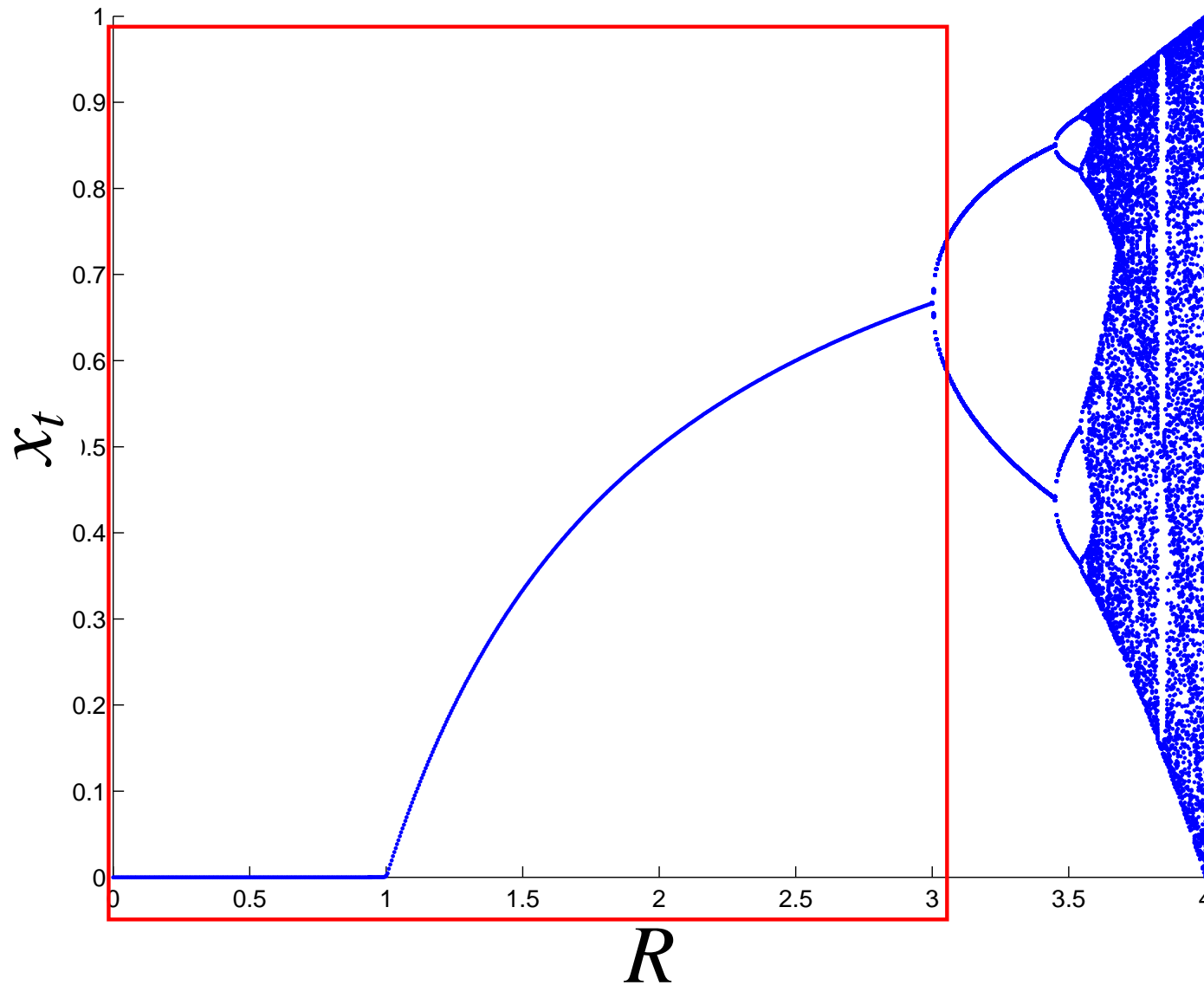
分岐図とは？

- (例えばロジスティック写像 $x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$ の場合)
パラメータ R が変化したときに, x_t の振る舞い **が** 変化する現象 **が** _____ である .
- パラメータ R が変化することにより, 横軸 t , 縦軸 x_t という時系列をプロットしてもよいが, もう少し分かりやすい表現方法はないだろうか?
- そこで, _____ の様子をまとめて表現したものとして _____ (_____) がよく用いられる .
- パラメータ R を変化させ, その R の値に対して, その都度 x_t を縦軸にプロットしていけば, _____ を得る .

ロジスティック写像の分岐図

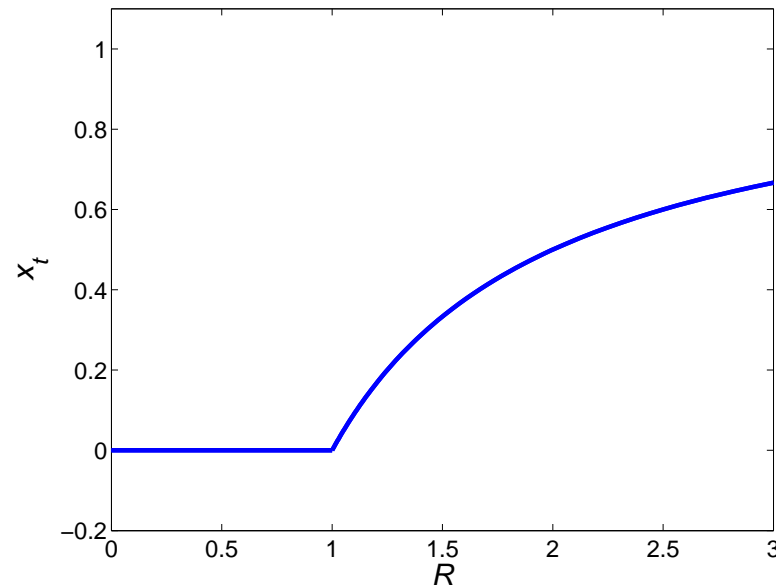


$0 < R < 3$ の部分に注目してみよう



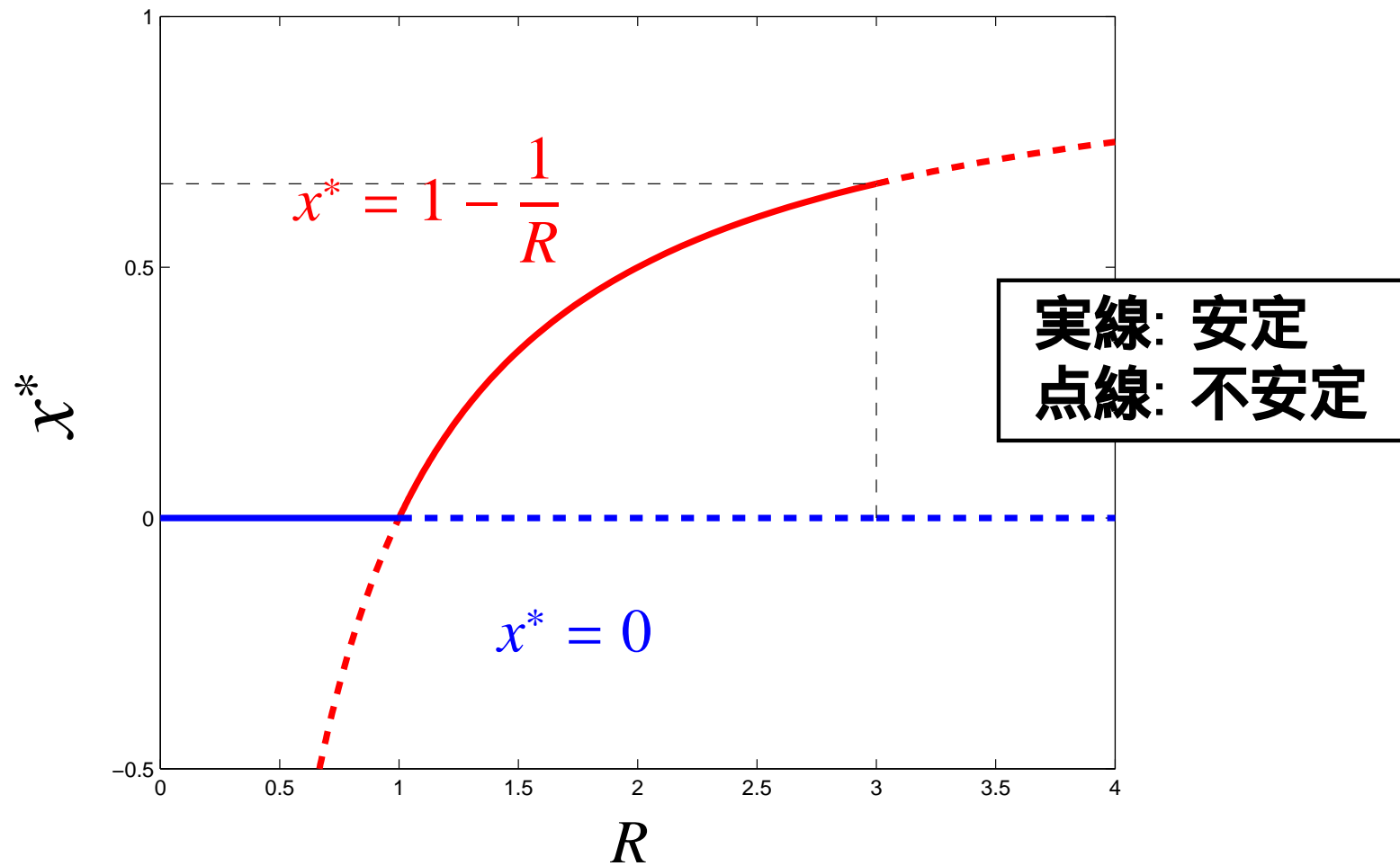
宿題

$0 \leq R \leq 3$ におけるロジスティック写像の分岐図は，なぜ下ののような形になるのかを説明しなさい．

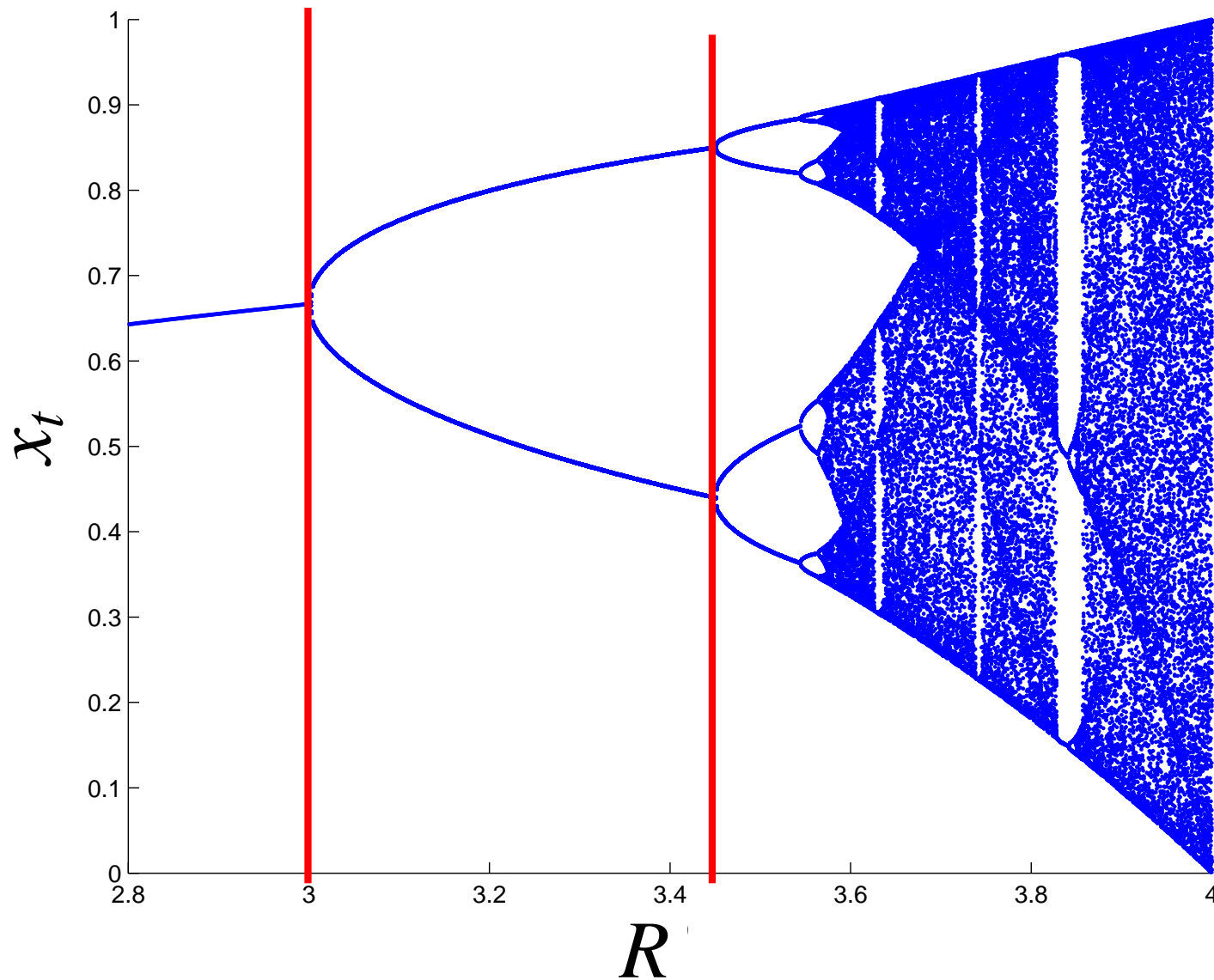


- ❑ 今日の講義開始時に．A4 用紙 1 枚 (表裏使用可) で提出してもらいました．
- ❑ 必ず，自分でやったはず．

$R = 1$ での分岐



$R > 2.8$ 以降を拡大



$R = 3$ では何がおきているか?

□ $x^* = 1 - \frac{1}{R} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であるから,

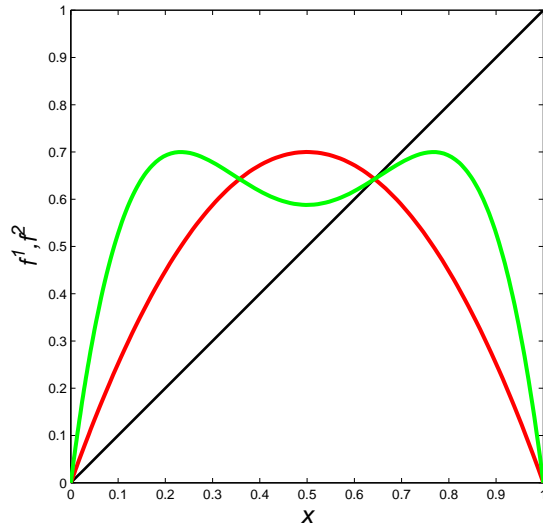
$$\left. \frac{df(x_t)}{dx_t} \right|_{x^*} = R - 2Rx^* = 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = -1$$

つまり $R = 3$ では $\frac{df(x_t)}{dx_t} = -1$ となり _____ する .

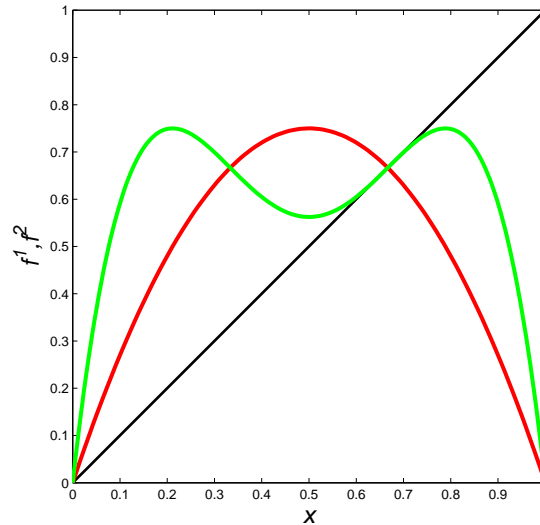
□ 分岐図をみると, $R > 3$ では2周期解が現れている

⇒ $f(x_t)$ と $f^2(x_t)$ のグラフを描いてみよう [matlab デモ]

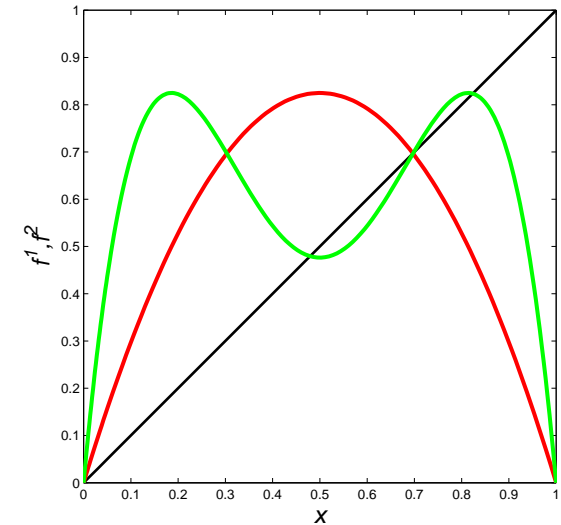
ロジスティック写像 $R = 3$ 付近



$R = 2.8$



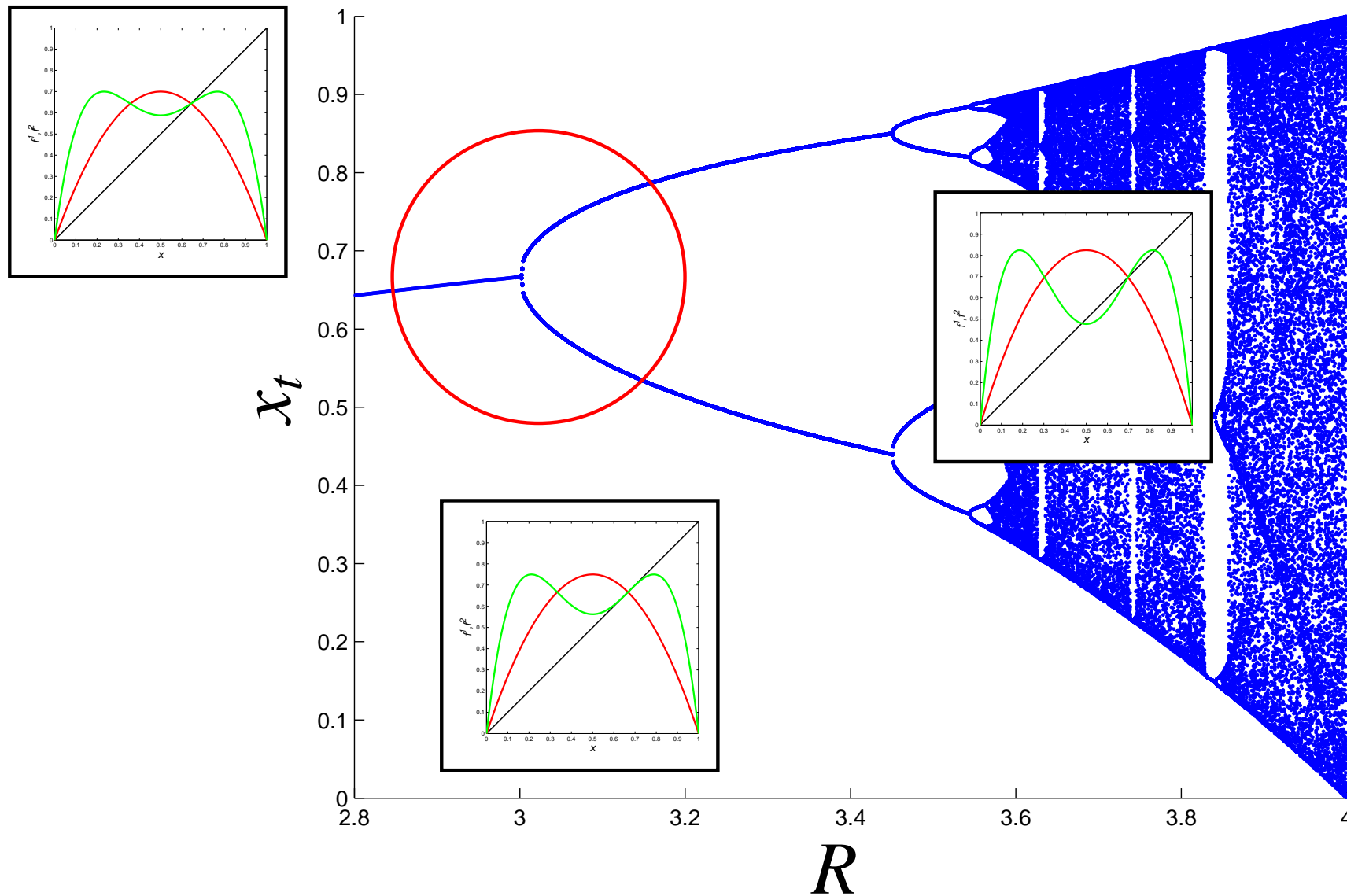
$R = 3.0$



$R = 3.3$

- $R < 3$ では固定点 $x^* = 1 - 1/R$ は安定
- $R = 3$ では f^2 が $x^* = 2/3$ において接している
- $R > 3$ では f^2 と 45 度の直線が 4 箇所 (不動点 $x^* = 0, 1 - 1/R$ と 2 周期解) で交わる . 傾きは?

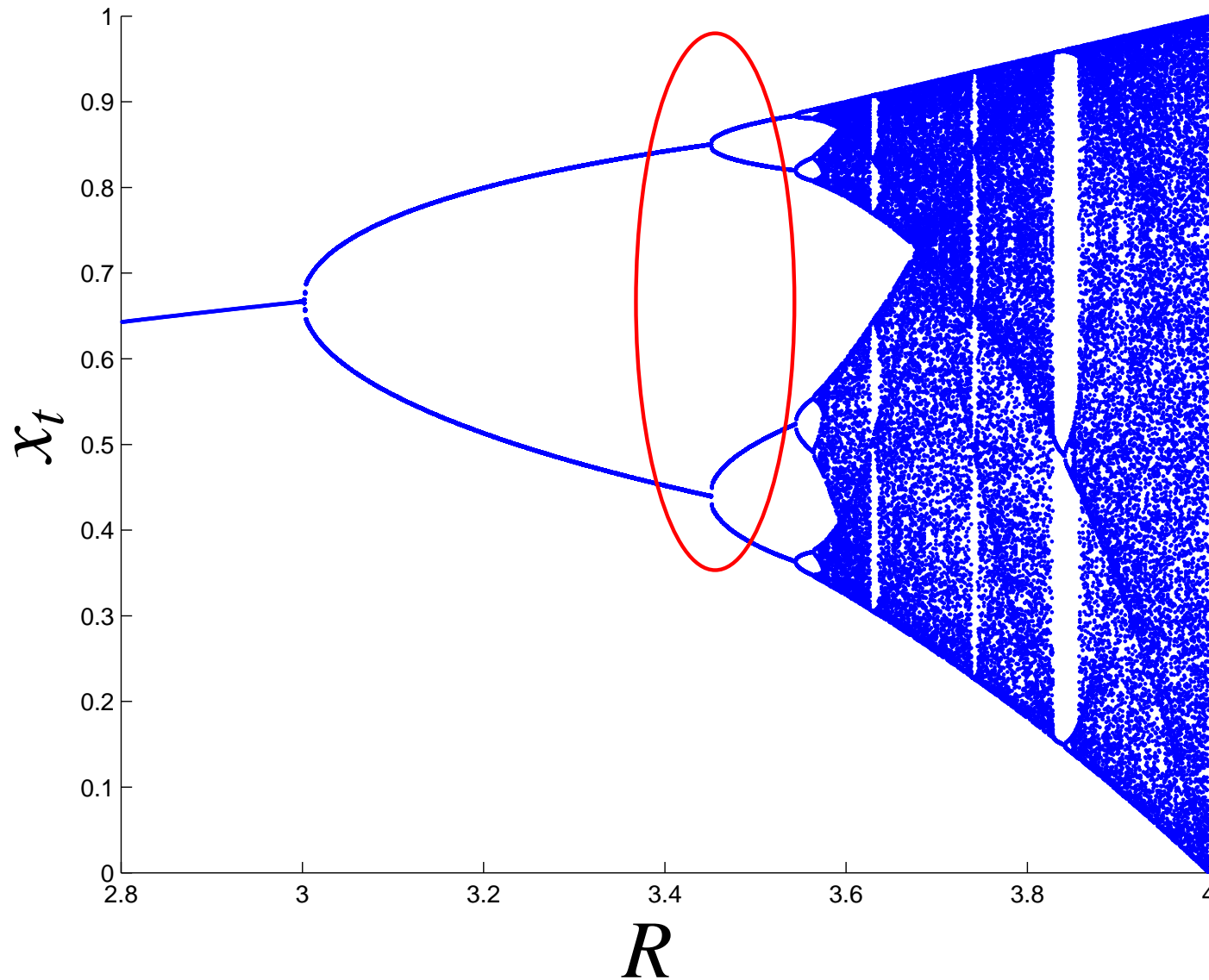
$R = 3$ では周期1 (固定点) \Rightarrow 周期2



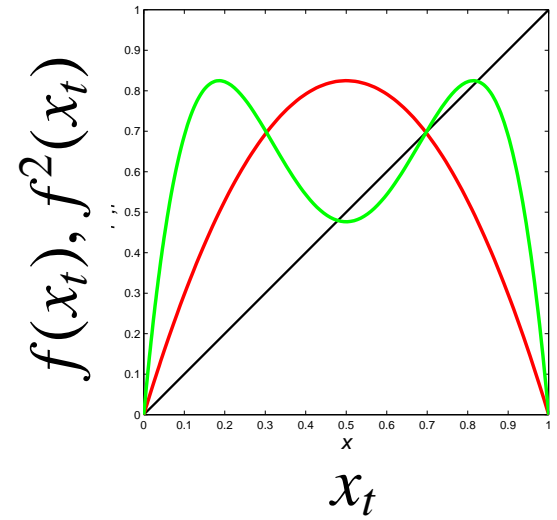
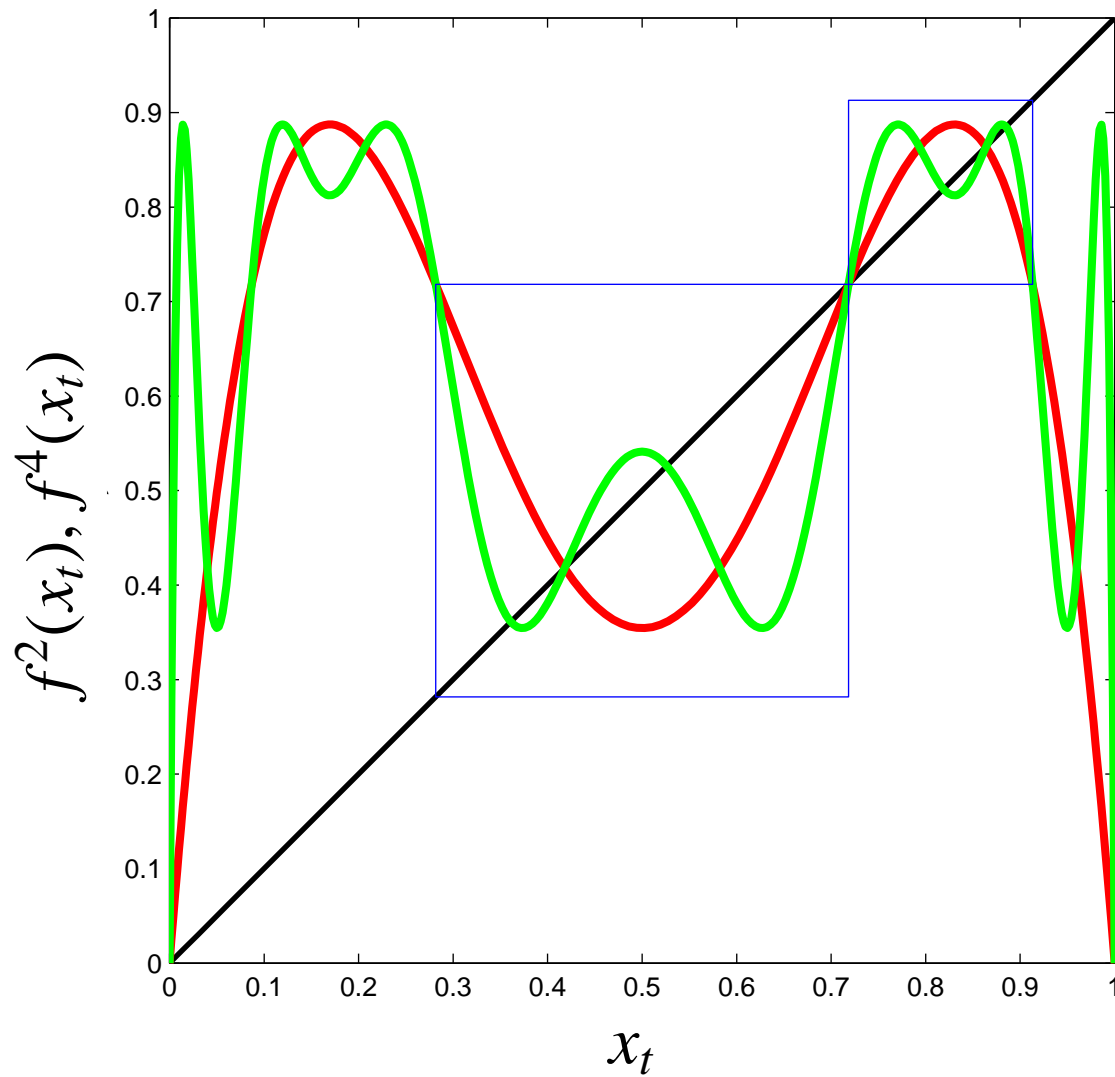
まとめると ...

- $R < 3$ では
 - 固定点は _____
 - 2 周期点は _____
- $R = 3$ では ,
 - 固定点は _____ .
 - 実際 _____ である .**
 - x^* において f^2 は補助線に _____ .
- $R > 3$ では ,
 - 固定点は _____
 - 不安定化した固定点の回りに , _____ **が出現**

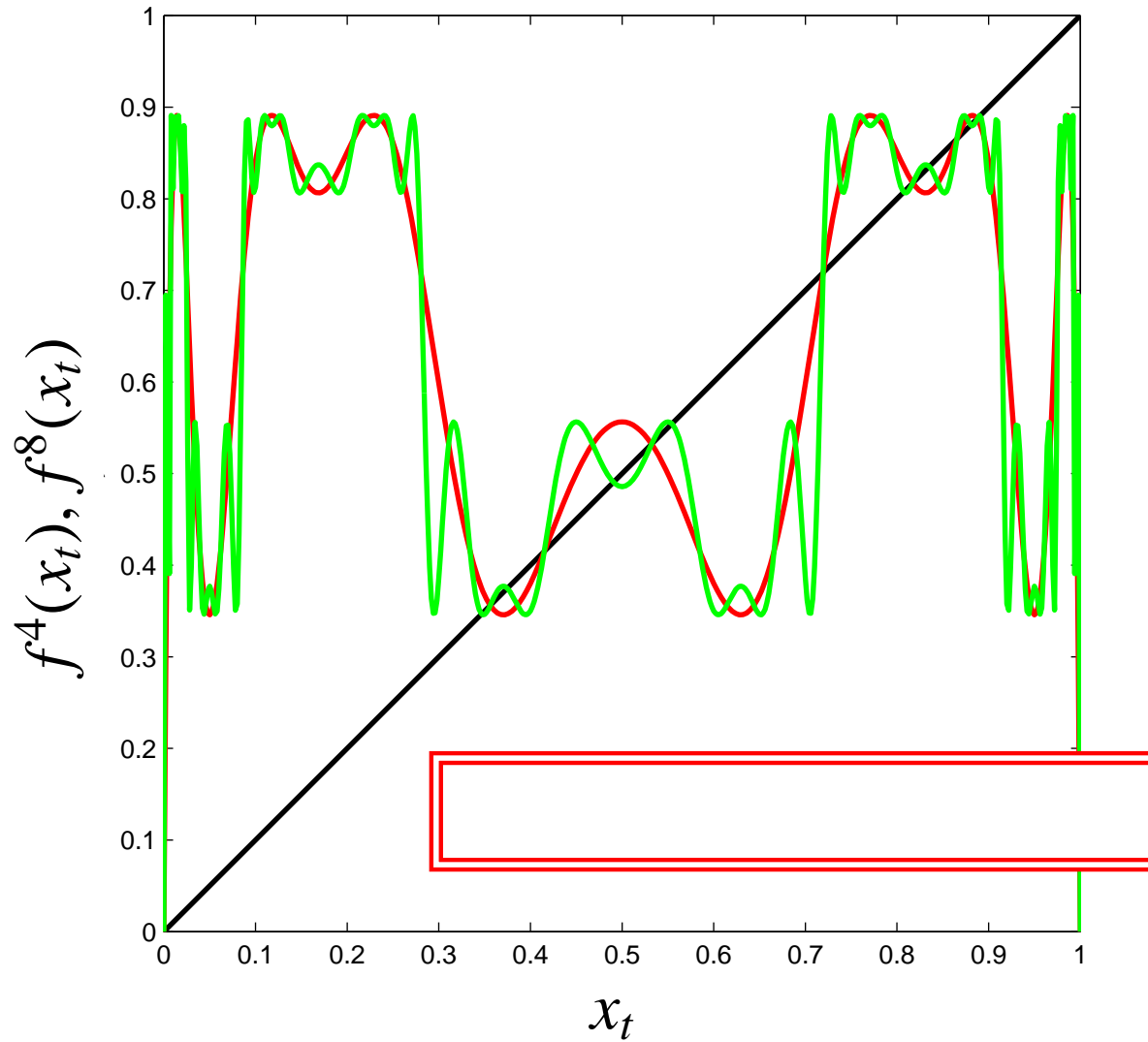
では、さらに R を大きくしていくと?



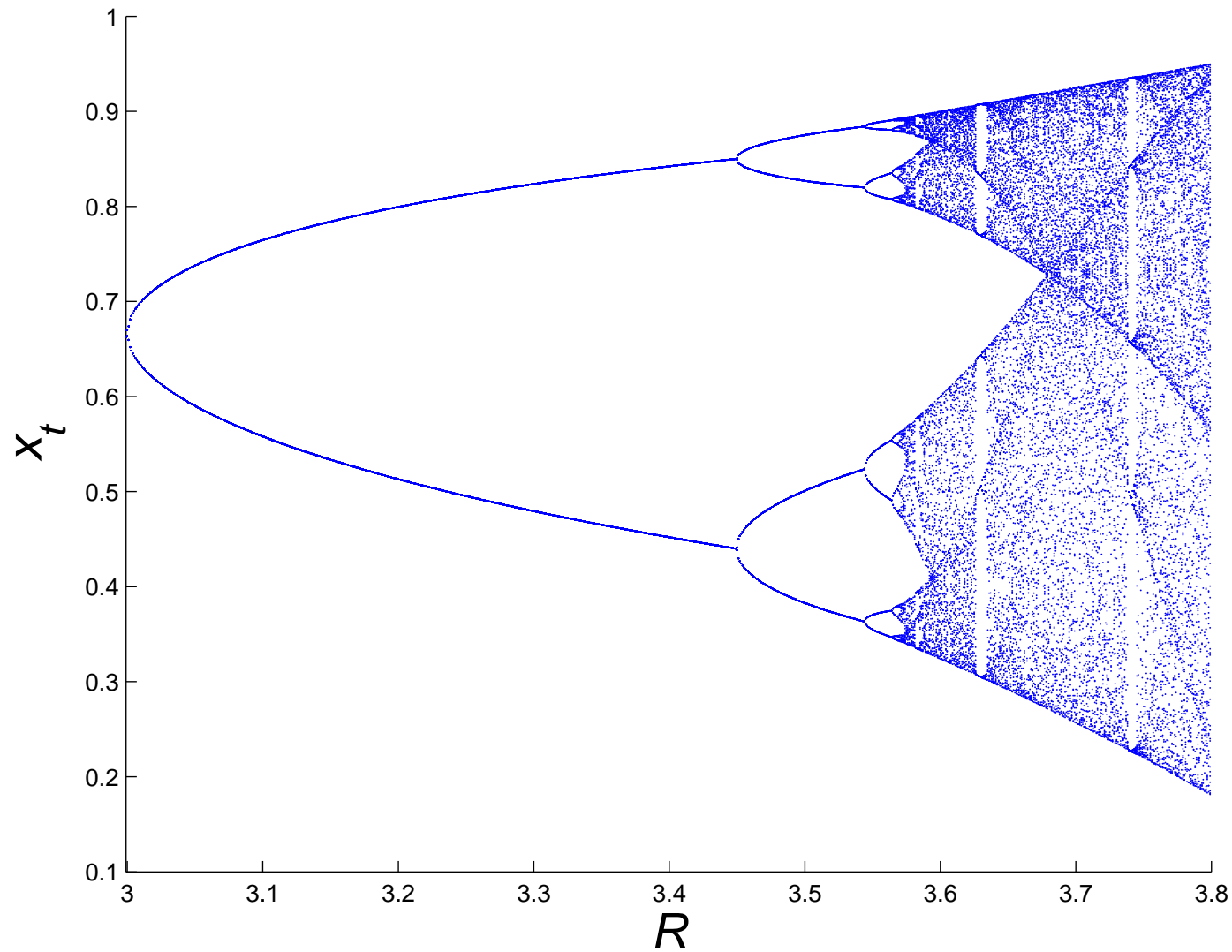
2周期解から4周期解へ



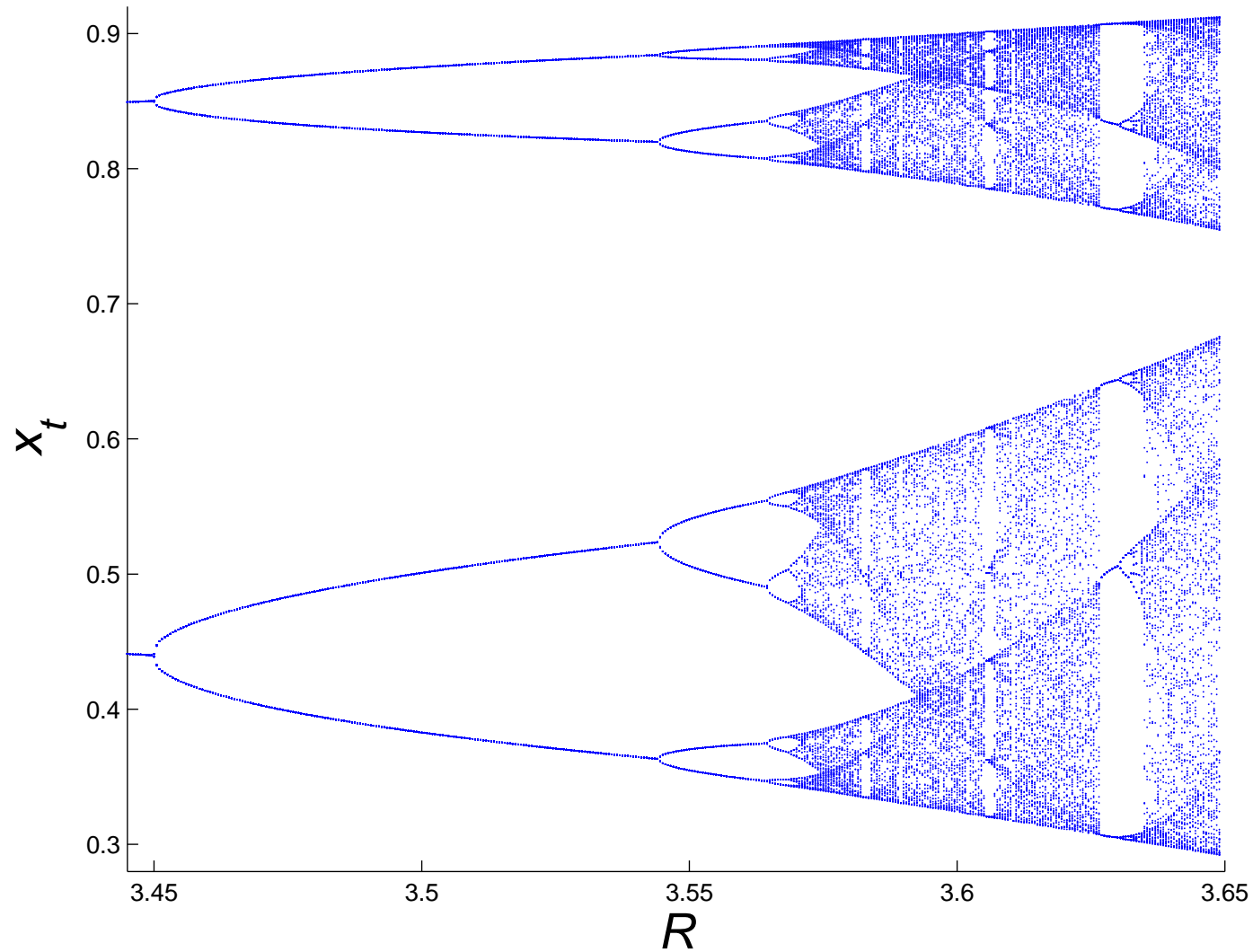
4周期解から8周期解へ



Period Doubling Bifurcation



Period Doubling Bifurcation



演習

- 固定点 (周期 1) から周期 2 へと分岐する点は, $R = 3$ であった.
- 周期 2 から周期 4 へと分岐する R の値を求めなさい.