非線形システム概論 2005

フラクタルとは

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338–8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

↓

一部分を拡大すると，
自分自身と同じ構造が現れる

雲の写真の拡大

植物

植物

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

↓

一部分を拡大すると，
自分自身と同じ構造が現れる

↓

フラクタル (自己相似) とは

- 図形 (集合) の一部分を拡大すると，その図形と同じ構造が現れる
- 語源
  - Fractal – Benoit Mandelbrot, 1975
  - frangere → fractus ラテン語
- ニュートン的図形観とは異なる
  - 複雑な図形であっても，____________________ が現れる

⟹ ____________________

今日考えること

- フラクタルとは何か？その性質は？
  - ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ が現れる．
  - ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ と言っても良い．
- 具体的にはどのようなものがあるのか？
  - ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
  - ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
  - ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
  - ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
- フラクタルな図形を特徴づけるには？そのための尺度は？
  - ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
- カオスとフラクタルは関係があるか？
  - ＿＿＿＿＿＿＿ ⇒ $\boxed{}$

フラクタル図形の例

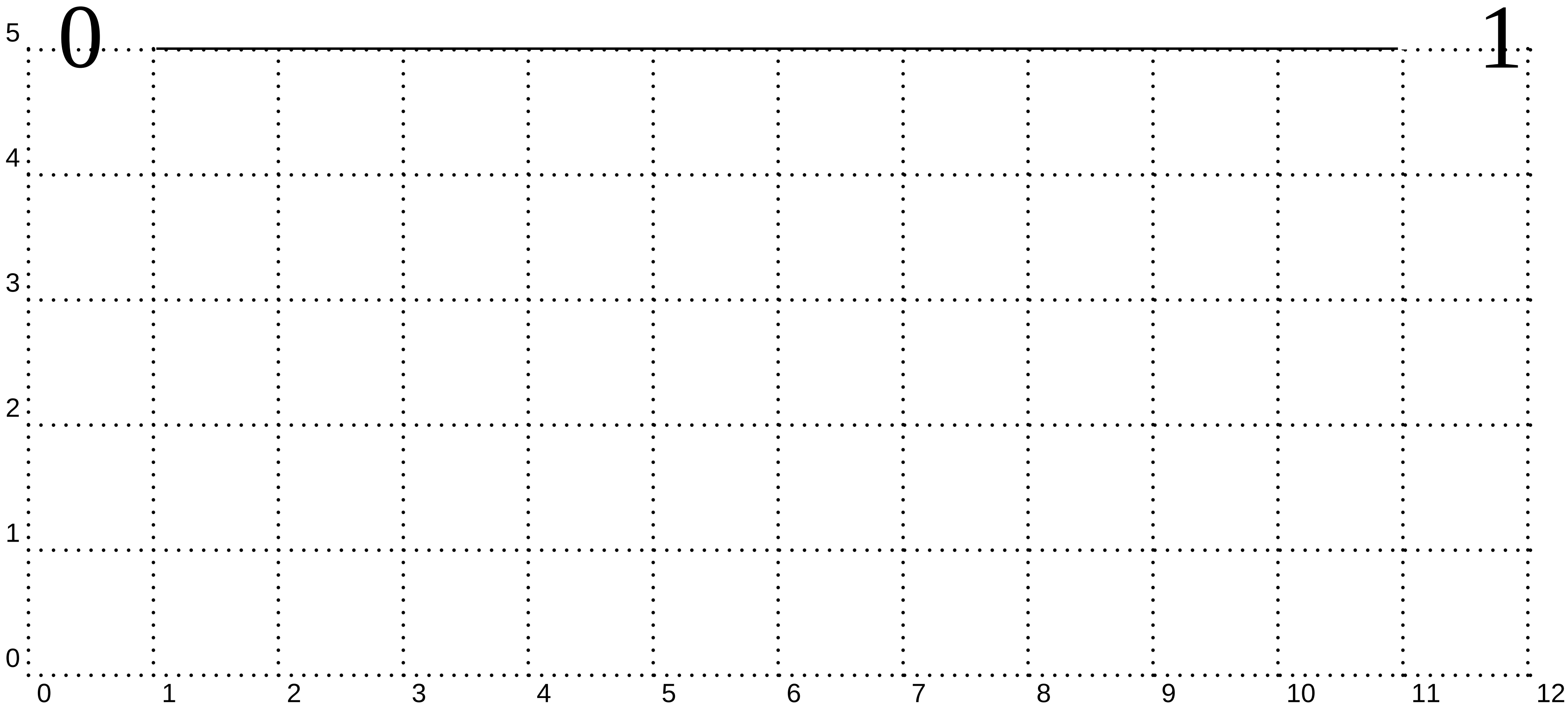
- カントール集合 (Cantor set)
- コッホ曲線 (von Koch curve)
- シェルピンスキーのギャスケット (Sierpiński gasket)
- メンジャースポンジ (Menger Sponge)

以下を考えてみよう

- これらの図形は，どのように作られるか?
  - 元になる図形対して，ある処理を ________ 適用する．
    ☞ ある処理＝ ______________________________
    ⟹ ______ と ____ に着目！
  - プログラミング的な言葉を使えば，
    ____________________ 処理を用いるということ．

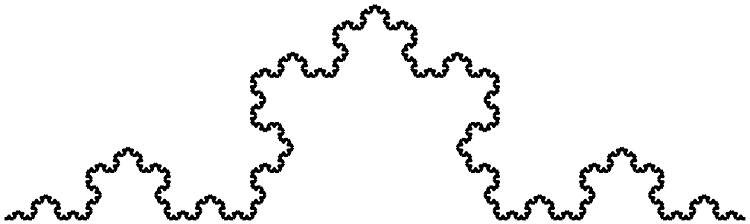
カントール集合

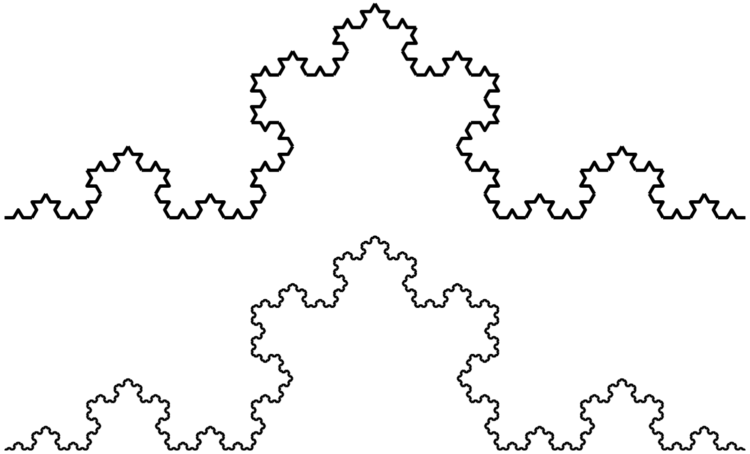
- 長さ 1 の線分 から始める．
-
-



コッホ曲線

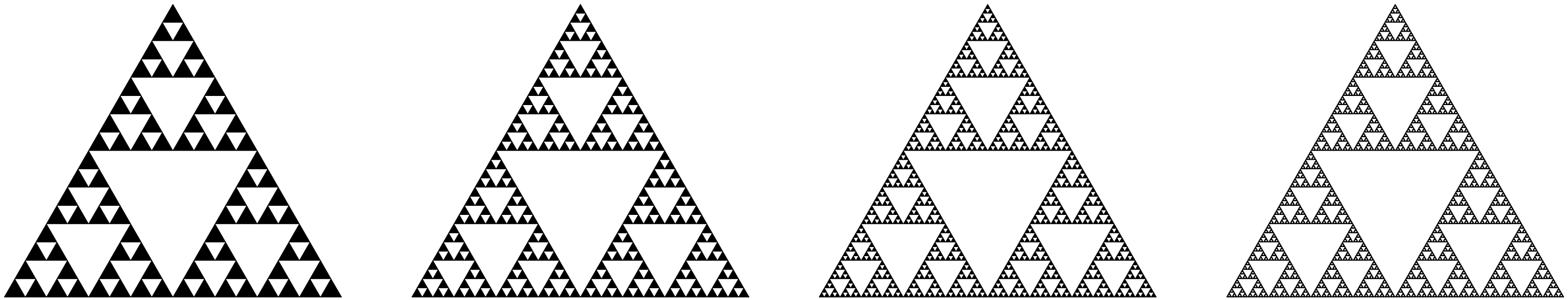
- **長さ** 1 **の線分の中央** [1/3, 2/3] **を山にした帽子形 から始める.**
-
-





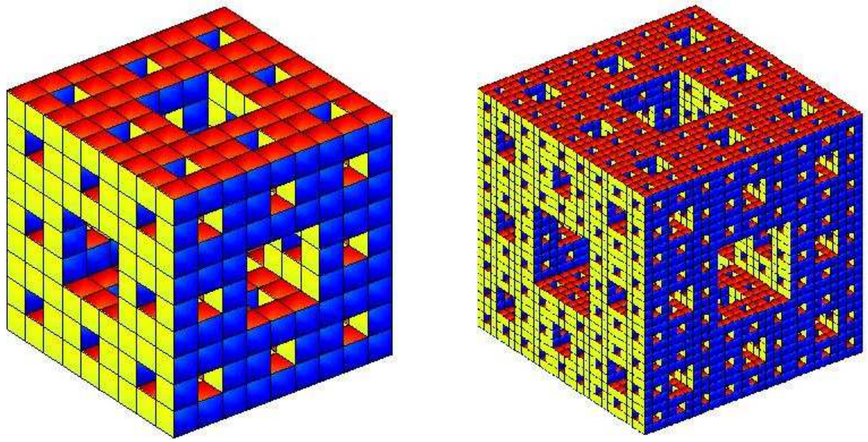
シェルピンスキーのギャスケット

- 正三角形から始める．
- ________________________________
- ______________



メンジャースポンジ

- 立方体 から始める．
- ____
- ____________________



フラクタル図形の「複雑さ」を測ろう

$\boxed{\text{演習}}$ カントール集合の長さを求めなさい．

初項 a 公比 r の等比数列の和

カントール集合の長さは?

操作を無限回繰り返すと，取り除かれる長さは，

初項　，公比　の等比数列の和の極限

つまり，カントール集合の長さは，＿＿＿＿＿＿

カントール集合の長さ

カントール集合の長さが ____

↓

カントール集合は ______________________

↓

直観に反する奇妙な結果...

なぜなら，

- ❑ カントール集合を作るときには，______________________ のではなく，______________________
- ❑ これは，______________________

⟹ それでは，カントール集合の ______ は？

カントール集合上の点の数 (濃度) は?

- $[0, 1]$ 区間の実数を 3 進法で表現してみよう $\cdots$

$$0.z_1 z_2 z_3 z_4 \cdots, \text{ 但し } z_i = \{0, 1, 2\}$$

10 進法で整数を表現する

- 10 進法とは?
  整数を 0 ∼ 9 の 10 種類の自然数で表す表現法．

  例 : 0, 2, 4, 7, 32, 128, 2012. . .

- 128 という整数は，100 が 1 個，10 が 2 個，1 が 8 個．

$$
\begin{aligned}
128 &= 100 \times 1 + 10 \times 2 + 1 \times 8 \\
&= 10^2 \times 1 + 10^1 \times 2 + 1 \times 8 \\
&= 10^2 \times 1 + 10^1 \times 2 + 10^0 \times 8
\end{aligned}
$$

10^0 の位

10^1 の位

10^2 の位

2進法で整数を表現する

❑ 2進法とは，どのような表現法か?

整数を $\boxed{\text{2種類の自然数}}$ で表す表現法．

0, 1

例：0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, . . .

❑ 例えば，2進法での $111_{(2)}$ という整数は，

$$111_{(2)} = 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$$

と考えることになる．

2進法での整数の表現

- 2進法での $111_{(2)}$ という整数は，

$$111_{(2)} = 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$$

2^2 の位

2^1 の位

2^0 の位

- つまり，2進法での $111_{(2)}$ は，

$2^2 = 4$ が1個，$2^1 = 2$ が1個，$2^0 = 1$ が1個

ということ．

2進法と10進法の関係

- 2進法での $111_{(2)}$ という整数は，

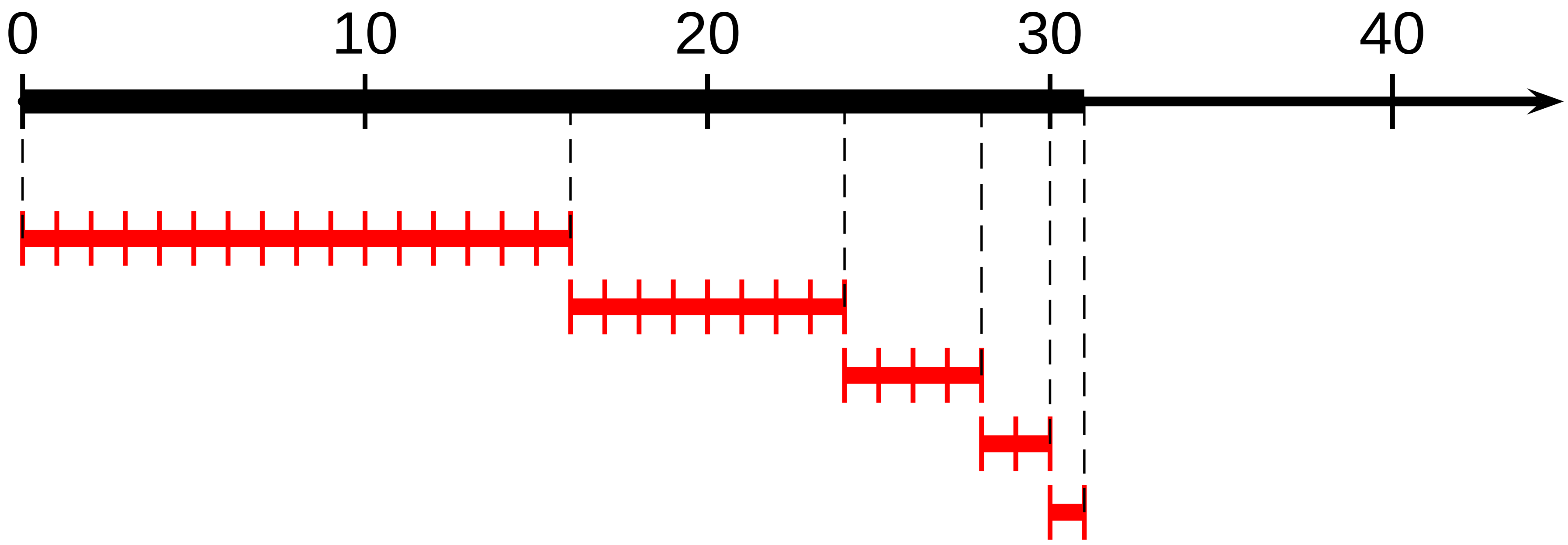
$$111_{(2)} = 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 7$$

- 逆に

$$\begin{aligned}
31_{(10)} &= 16 + 8 + 4 + 2 \\
&= 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 \\
&= 11111_{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
60_{(10)} &= 32 + 16 + 8 + 4 \\
&= 2^5 \times 1 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0 \\
&= 111100_{(2)}
\end{aligned}$$

10進法から2進法へ



16 + 8 + 4 + 2+1 = 31

10進法，2進法

- 10 進法では，ある整数 Z は，

$$\begin{aligned} Z &= \ldots D_4 D_3 D_2 D_1 D_0 \\ &= \ldots + 10^4 D_4 + 10^3 D_3 + 10^2 D_2 + 10^1 D_1 + 10^0 D_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 10^i D_i \quad (D_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \end{aligned}$$

- 2 進法では，ある整数 Z は，

$$\begin{aligned} Z &= \ldots B_4 B_3 B_2 B_1 B_0 \\ &= \ldots + 2^4 B_4 + 2^3 B_3 + 2^2 B_2 + 2^1 B_1 + 2^0 B_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i B_i \quad (B_i = 0, 1) \end{aligned}$$

それでは，3 進法は?

- 整数を $\boxed{3\text{ 種類の自然数}}$ (0,1,2) で表す表現法．

  例 : 0, 1, 120, 211, 222 . . .

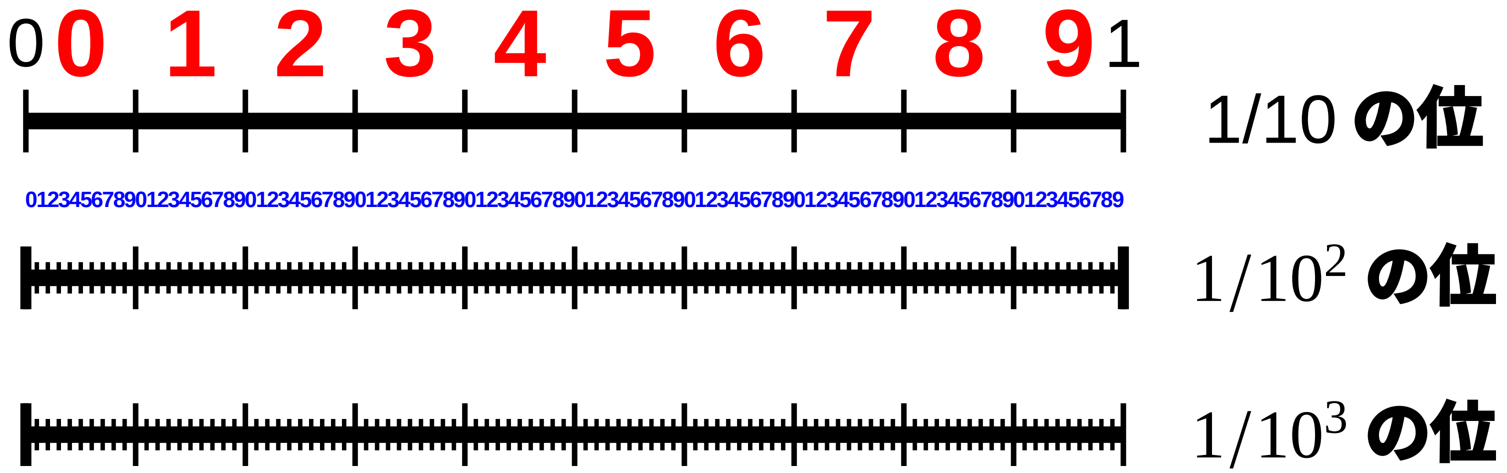
- 例えば，3 進法において，$122_{(3)}$ は，

$$122_{(3)} = 3^2 \times 1 + 3^1 \times 2 + 3^0 \times 2 = 17$$

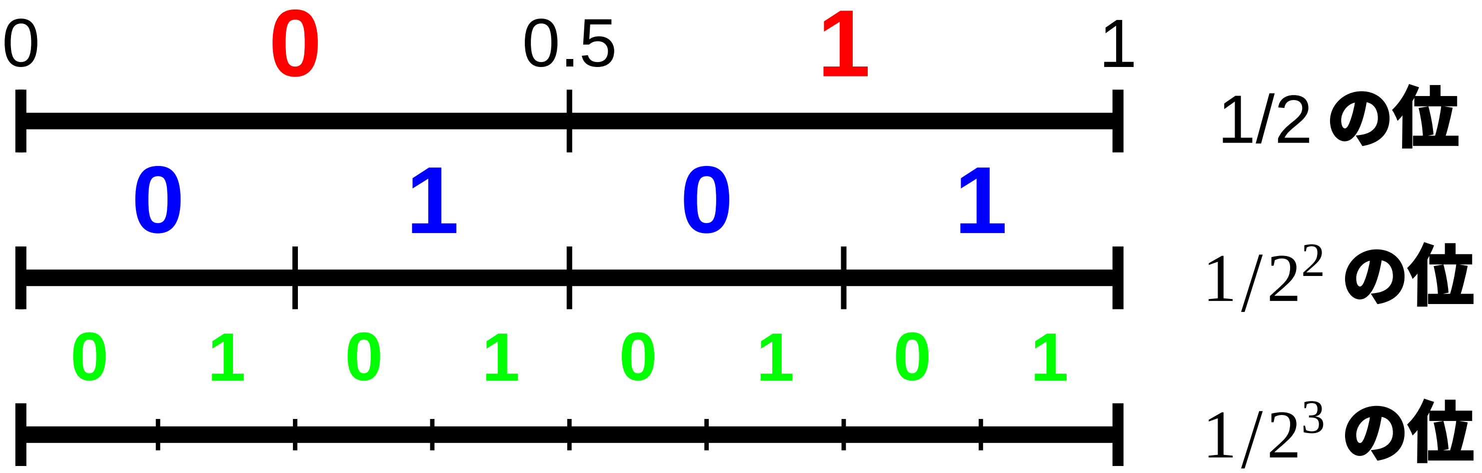
- 一般的に 3 進法において，ある整数 Z は，

$$\begin{aligned} Z &= \ldots T_4 T_3 T_2 T_1 T_0 \\ &= \ldots + 3^4 T_4 + 3^3 T_3 + 3^2 T_2 + 3^1 T_1 + 3^0 T_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 3^i T_i \quad (T_i = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

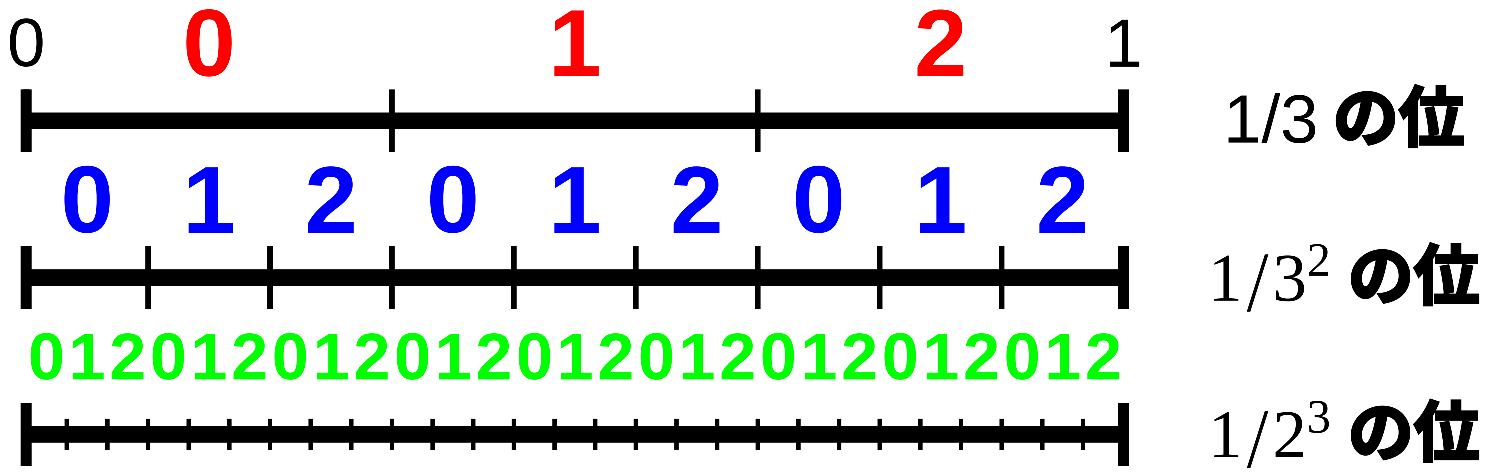
区間 $[0, 1]$ における実数の 10 進法表現



区間 $[0, 1]$ における実数の 2 進法表現



区間 $[0, 1]$ における実数の 3 進法表現



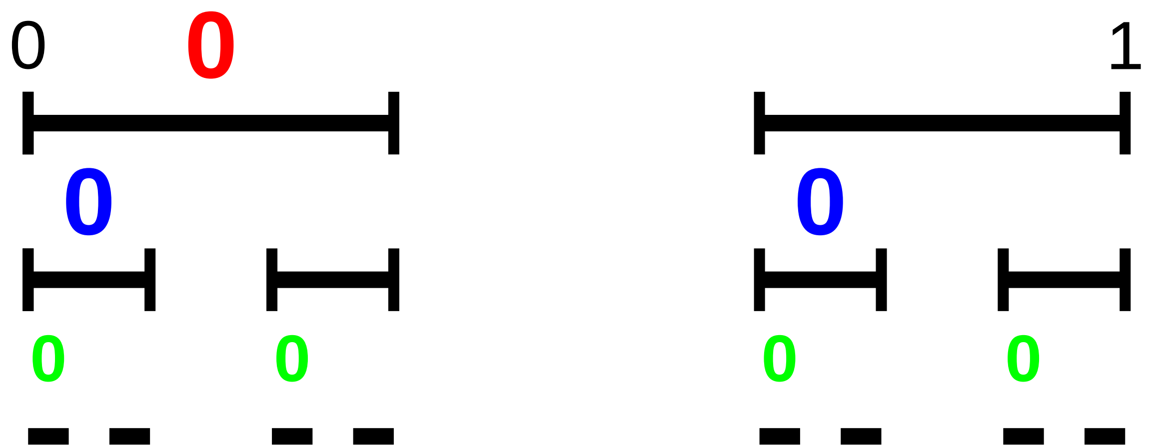
カントール集合上の点の数 (濃度) は?

- $[0,1]$ 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1z_2z_3z_4\cdots,$$ 但し ＿＿＿＿＿

- カントール集合では中央部分が無いので，
$z_i = 1$ という値はとらず，z_i は ＿＿＿＿＿ である．

- $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えると ＿＿＿＿ となる．



カントール集合上の点の数 (濃度) は?

- ❏ $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えると ________ となる．
- ❏ $[0, 1]$ 区間上の実数の 2 進法表現と ____________ がつく．

カントール集合上の点の数は，____________________________ ，
つまり カントール集合上にもビッシリ点が存在する

↓

$L_n \to 0$ という結果と ______________ •••

それでは，ここで演習

- カントール集合の長さを測ると _ であるのに，点の数を数えると ______ という矛盾した結果となった．
- シェルピンスキーのギャスケットについて，
  1. ____
  2. ____

  を求めることにより，同様な矛盾が起きることを示しなさい．
- メンジャースポンジについて，
  1. ______
  2. ____

  を求めることにより，同様な矛盾が起きることを示しなさい．