

点と線分とカントール集合と...

	濃度 (点の数)	長さ	面積	体積
点	N (有限値)	0	0	0
カントール集合	—	—	—	—
線分	∞	L	0	0

□ 点

- 濃度を測れば _____ する .
- 長さを測れば _ になる .

□ 線分

- 濃度を測れば _____ する .
- 長さを測れば _____ する .
- 面積を測れば _____ する .

□ カントール集合は?

前回の演習 (+ α) の結果は?

- カントール集合の長さを測ると $_$ であるのに ,
点の数を数えると $______$ という おかしな結果となった .
- シェルピンスキーのギャスケットについて ,
 1. $______ \rightarrow ______$
 2. $______ \rightarrow ______$を求めなさい .
- メンジャースポンジについて ,
 1. $______ \rightarrow ______$
 2. $______ \rightarrow ______$を求めなさい .
- コッホ曲線について ,
 1. $______ \rightarrow ______$
 2. $______ \rightarrow ______$を求めなさい .

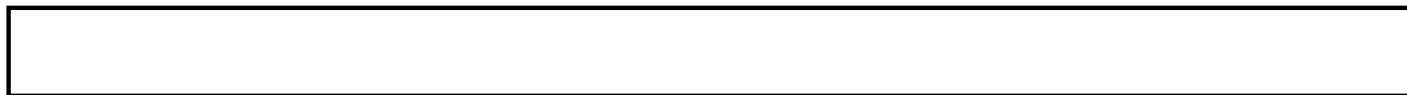
点，線分，正方形，立方体

	次元	濃度	長さ	面積	体積
(個数 N の) 点					
(長さ L の) 線分					
(面積 S の) 正方形					
(体積 V の) 立方体					

- 濃度は _____ を測るための尺度
- 長さは _____ を測るための尺度
- 面積は _____ を測るための尺度
- 体積は _____ を測るための尺度
- ☞ 各図形の次元にあっている尺度で測ると， _____ している．
- ☞ 各図形の次元にあっていない尺度で測ると， _____ になるか _____ している．

点，線分，正方形，立方体とフラクタル

	次元	濃度 (0次元での尺度)	長さ (1次元での尺度)	面積 (2次元での尺度)	体積 (3次元での尺度)
点	0	N	0	0	0
カントール集合					
線分	1	∞	L	0	0
コッホ曲線					
ギャスケット					
正方形	2	∞	∞	S	0
スポンジ					
立方体	3	∞	∞	∞	V



フラクタル図形を特徴付けるには？

- ❑ 濃度・長さ・面積・体積などの尺度では，うまく測れない．
- ❑ いや，むしろ，濃度・長さ・面積・体積よりも，自然な尺度がありそうだ．



- ❑ とすると，その「自然な尺度」を用いて，フラクタル図形の特徴を数値化することは出来ないだろうか？

— _____ \Rightarrow _____

— _____ \Rightarrow _____

次元とは? –直観的には–

線は _ 次元, 面は _ 次元, 立体は _ 次元



「 ____ 」という方法で確かめてみよう

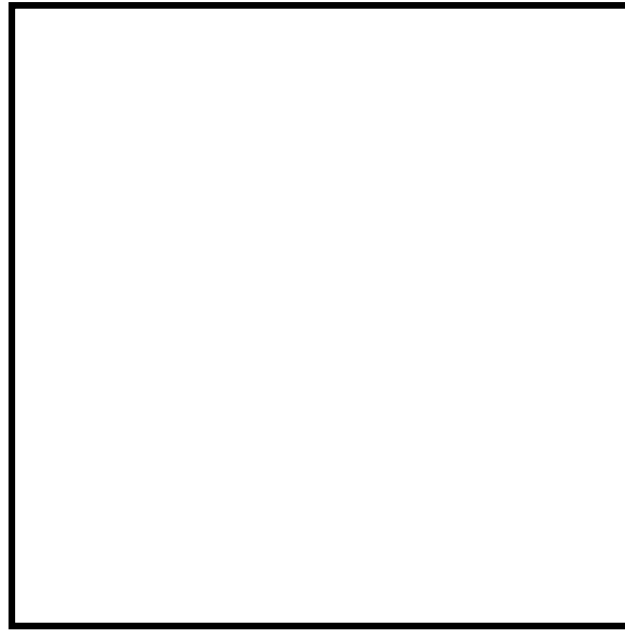
線分を被覆する



被覆に必要な小線分 (縮小比 r) の数 =

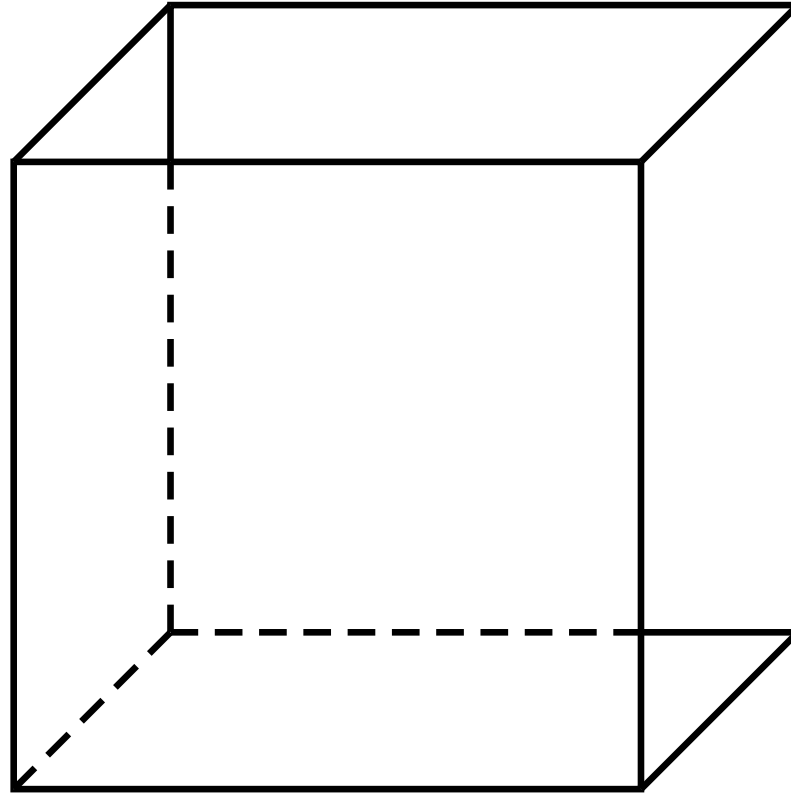
但し, $\frac{1}{r}$ に被覆する.

正方形を被覆する



被覆に必要な小正方形 (縮小比) の数 =

立方体を被覆する



被覆に必要な小立方体 (縮小比 $\frac{1}{n}$) の数 = n^3

被覆により次元を測る

	縮小比	個数
線分	$1/2$	
正方形	$1/2$	
立方体	$1/2$	
一般化		

被覆による次元の定義

- ある図形を, _____ で,
元の図形を _____ により,

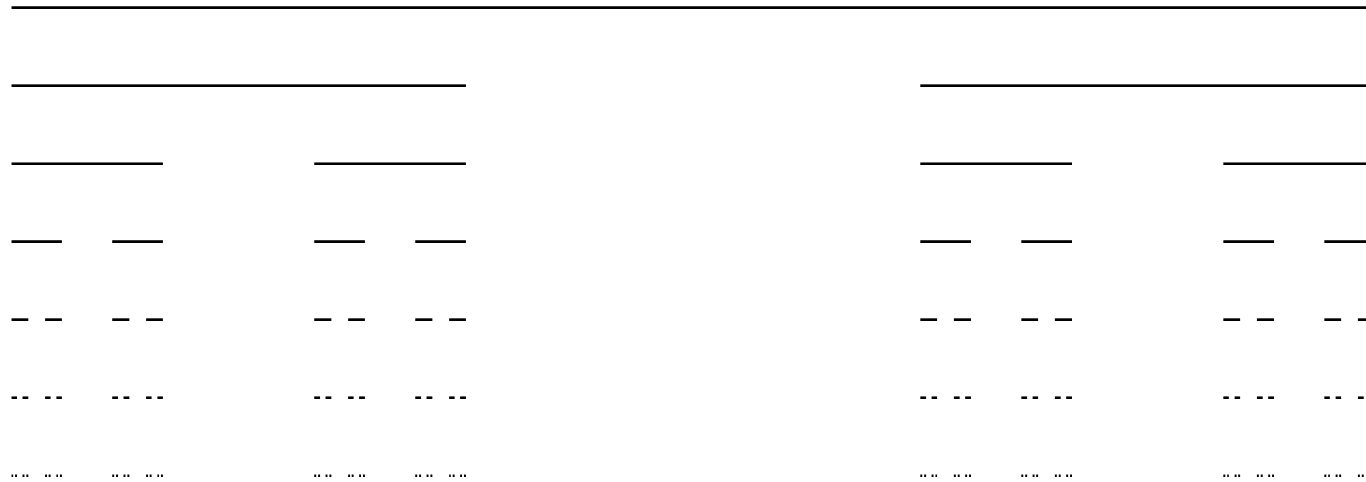
と定義する。すなわち,



- この次元の定義を用いて, カントール集合の次元を測るとどうなるだろうか?

カントール集合のフラクタル次元

- カントール集合の次元 D_C を求めなさい。



$\frac{1}{\epsilon} =$, $N(\epsilon) =$ **なので** ,



非整数次元の意味

	D	濃度	長さ	面積	体積
点	0	N	0	0	0
線分	1	∞	L	0	0
正方形	2	∞	∞	S	0
立方体	3	∞	∞	∞	V

1. 各図形の次元に対応した尺度 $\rightarrow N, L, V, S$ に収束
2. それ以外は 0 あるいは ∞ に発散

$\underline{\hspace{10em}} = \underline{\hspace{10em}}$

カントール集合の複雑さ

	D	濃度	自然な尺度	長さ	面積	体積
点	0	N		0	0	0
カントール集合	0.6309...	∞		0	0	0
線分	1	∞		L	0	0
正方形	2	∞		∞	S	0
立方体	3	∞		∞	∞	V

- カントール集合にとって 0 にも ∞ にもならない,
_____ が存在する .
- その尺度の大きさが _____ 次元
- 複雑さが _____
- 自然な尺度 = _____

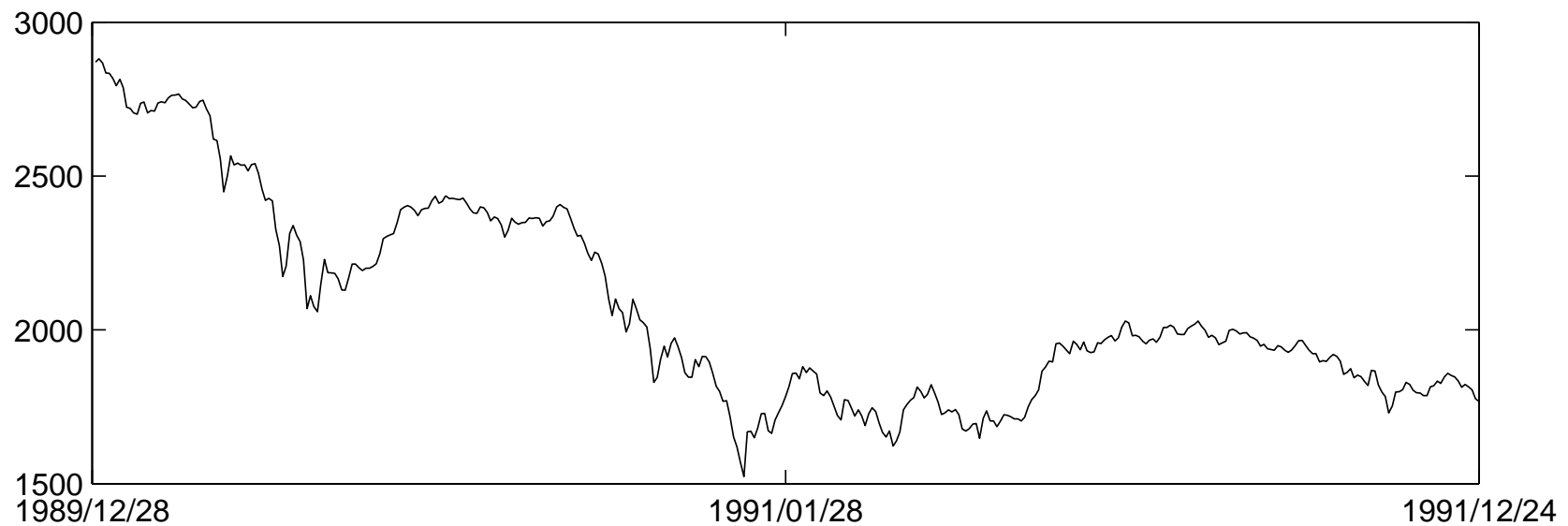
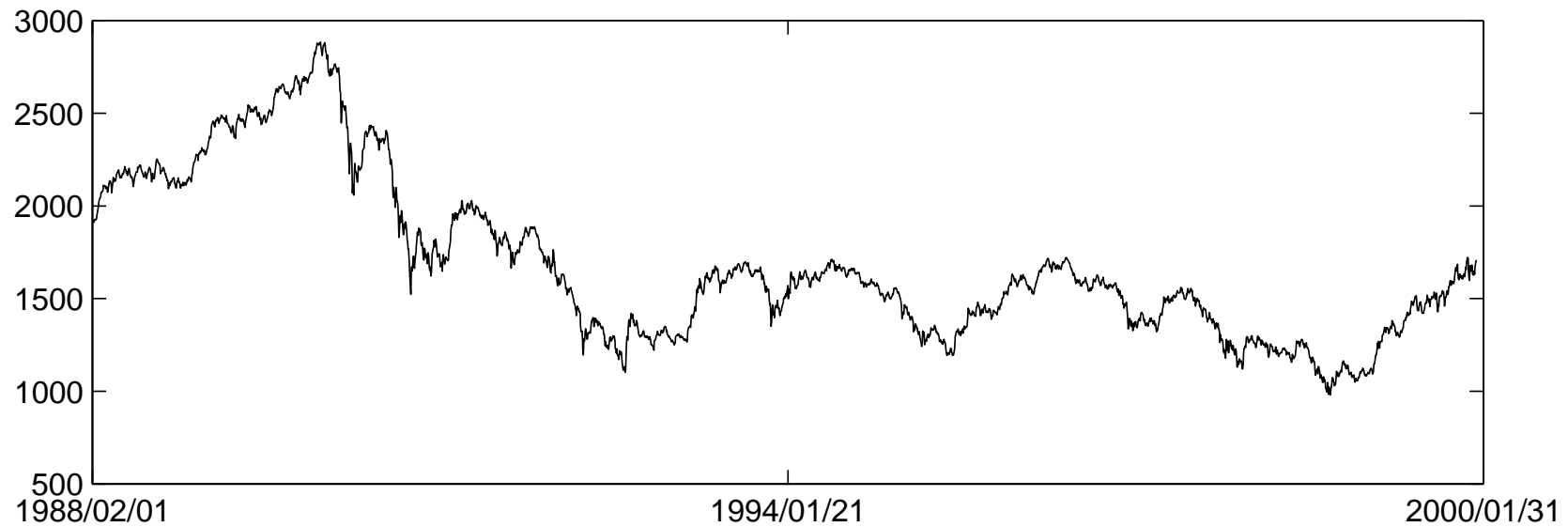
演習

- ❑ コッホ曲線のフラクタル次元を求めなさい。
- ❑ シェルピンスキーのギャスケットのフラクタル次元を求めなさい
- ❑ メンガースポンジのフラクタル次元を求めなさい。

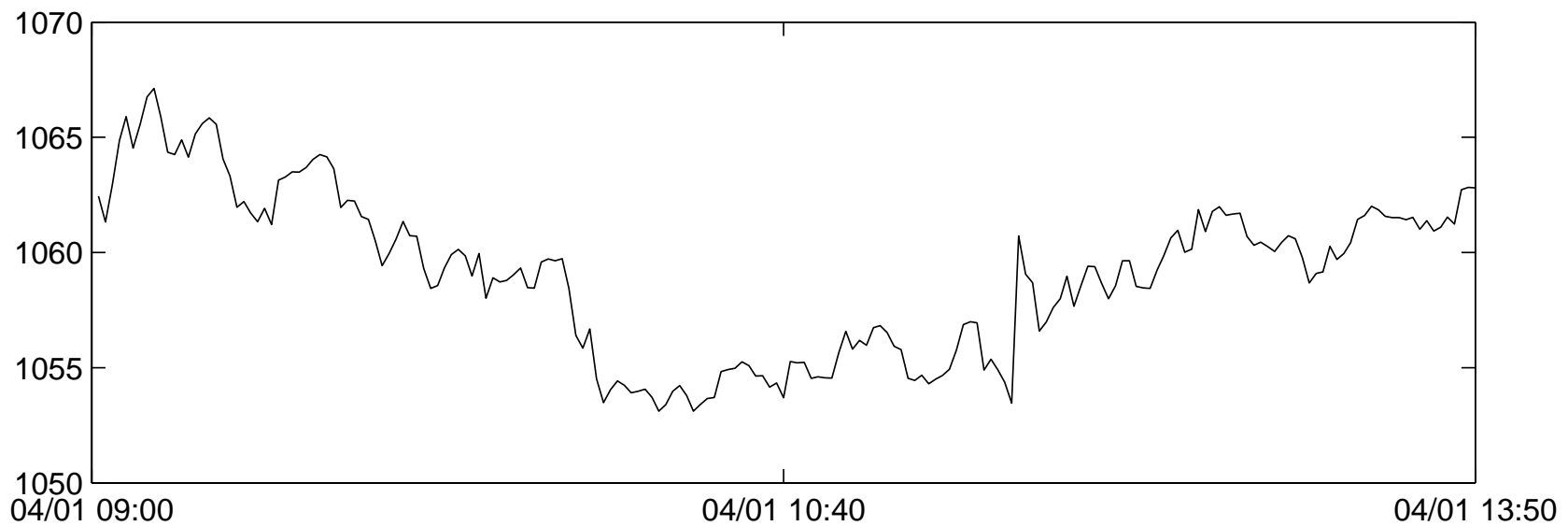
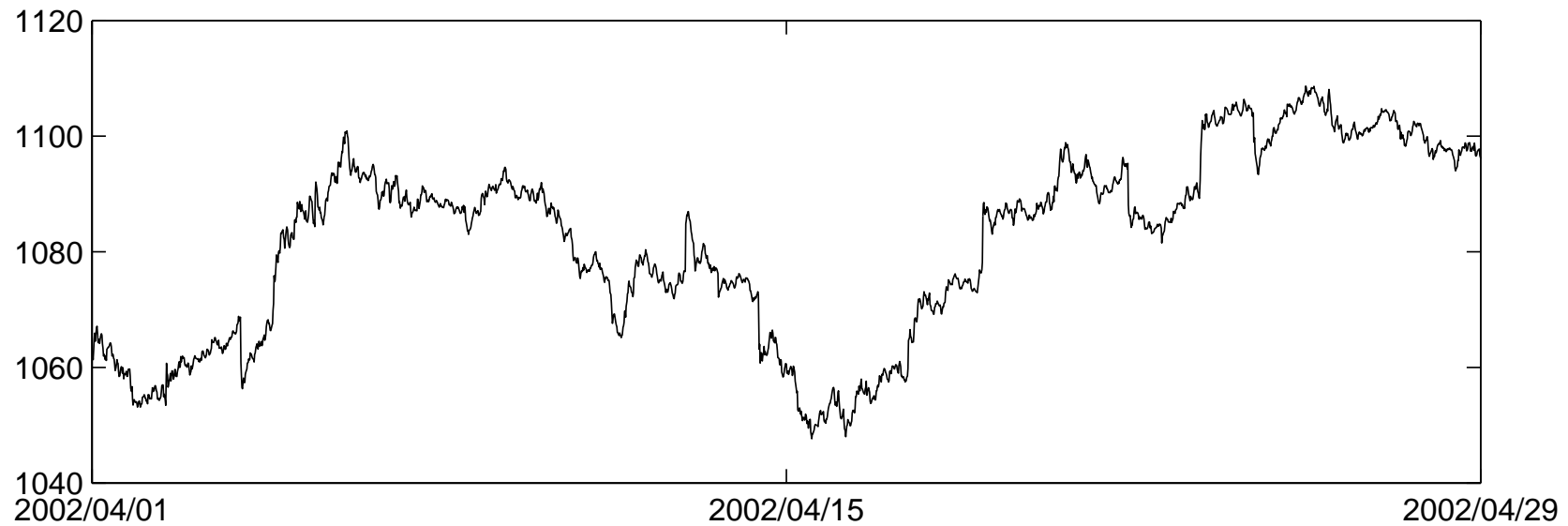
フラクタルの応用

1. 経済指標の解析
2. 通信路, パケットトラフィック
3. コンピュータ・グラフィックス (CG)
4. 画像処理, 映画・ゲームへの応用
5. 画像符号化 (情報圧縮)
6. フォトニク・フラクタル

経済指標 (TOPIX) のフラクタル性



経済指標 (TOPIX) のフラクタル性



フラクタルを用いたCG

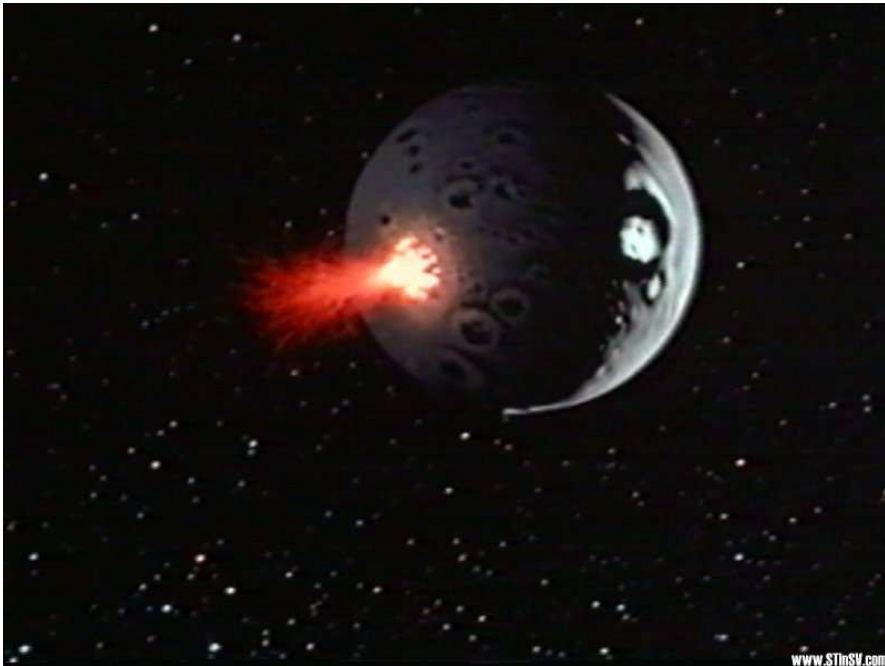


B. Mandelbrot: "Fractal Geometry of Nature," Academic Press.

フラクタルを用いたCG



Star Trek II – The Wrath of Kahn – (1982)



参考: <http://www.startrek.com/>

符号化とは？

- 例えば，横に 256 画素，縦に 256 画素のデジタル画像
- 各画素の濃淡は 8 ビット = ____ 階調 で表わされている．
- 画像全体で考えると，

- もし，一画素あたりのビット数が減らしたら … _____
- 画像の符号化とは，画像の _____ ，
_____ なるように変換すること．

- _____
- _____
- _____
- _____

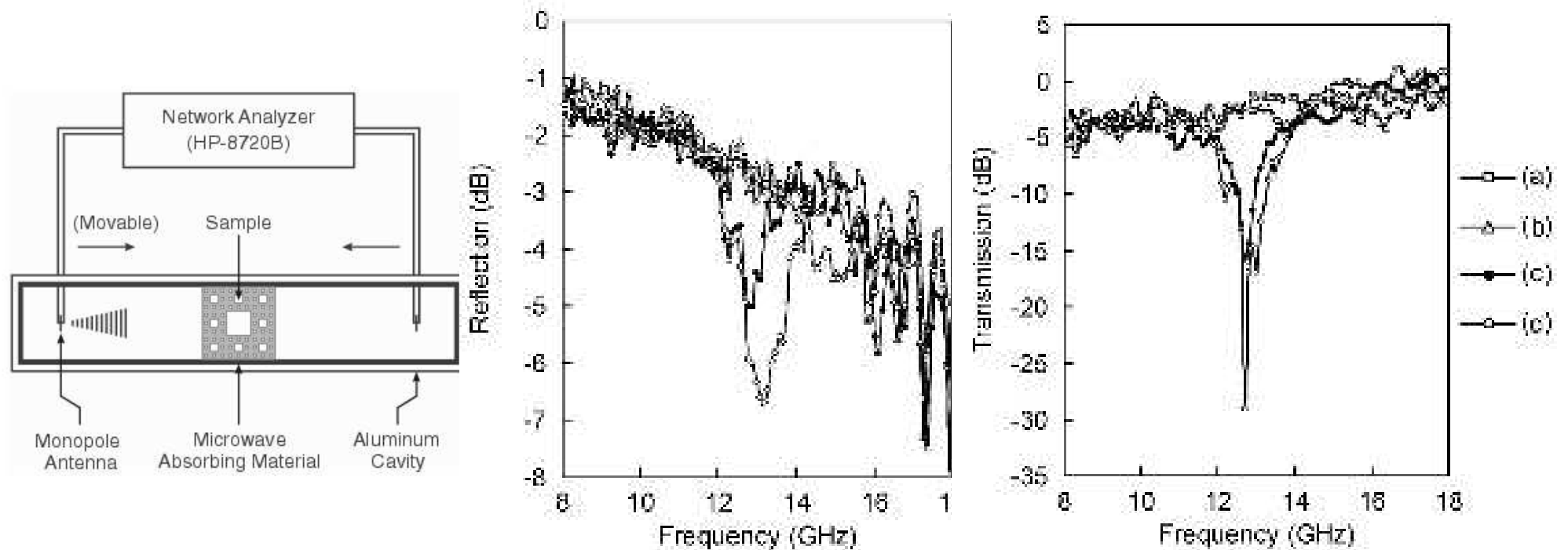
参考文献



徳永隆治:
フラクタルと画像処理
—差分力学系の基礎と応用—,
コロナ社, 2002.

フォトニックフラクタル

- ❑ メンジャースポンジに電磁波をあてる
- ❑ メンジャースポンジの中に特定の波長を持つ電磁波を閉じ込めておくことができる。



M. W. Takeda et al., Physica Review Letters, Vol.92, 093902, 2004.

フォトニックフラクタル

- 電磁波が反射も透過もしない
 - 有害な電磁波から人体や電子機器を守る
- 内部に電磁波が集中
 - 微弱な電磁波を受信するアンテナ
 - 微弱な電磁波のセンサー
- 光を取り込む
 - 太陽電池材料
 - 核融合炉
 - 光コンピュータ

フラクタルに関する参考文献例



本田勝也:
フラクタル, 朝倉書店, 2002.

- 高安秀樹: フラクタル, 朝倉書店, 1986.
- 高安秀樹編: フラクタル科学, 朝倉書店, 1987.