非線形システム概論 2005

高次元の差分方程式

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 情報数理科学専攻

338–8570 **さいたま市 桜区 下大久保** 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

1次元の差分方程式

- ロジスティック写像

$$x(t+1) = Rx(t)(1 - x(t))$$

注 これまでは，$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$ のように，(離散) 時間 t を下付き添字として表わしていたが，今日からは，(t) のように，括弧を用いて表現する．

- 様々な応答
  - 固定点
  - 周期点
  - カオス
- 分岐

高次元の差分方程式とは？

- **表現**1
  - t : ________________
  - $\boldsymbol{x}(t)$; ____________________________________
  - $\boldsymbol{f}(t)$: ____
- **表現**2

2 次元の差分方程式とは？

- 表現 1
  -
  -
  -
- 表現 2
- 表現 3

なぜ2次元の差分方程式？

- ❏ より次元の高い差分方程式の雛形になっている
- ❏ 1次元差分方程式では観測されないものがある
  - – ________________________
  - – ____
- ❏ 3次元微分方程式の解の性質を，解析するためのツールになる．
- ❏ 実際のシステムの ________________ として，2次元の差分方程式を考えた方が良いときがある．
- ❏ __________ を含めた多様な解をもつ．

2 次元の線形な差分方程式の例

- **表現** 1
  - t : ________________
  - $\boldsymbol{x}(t)$; ______________________________________
  - A : _____________________
- **表現** 2
- **表現** 3

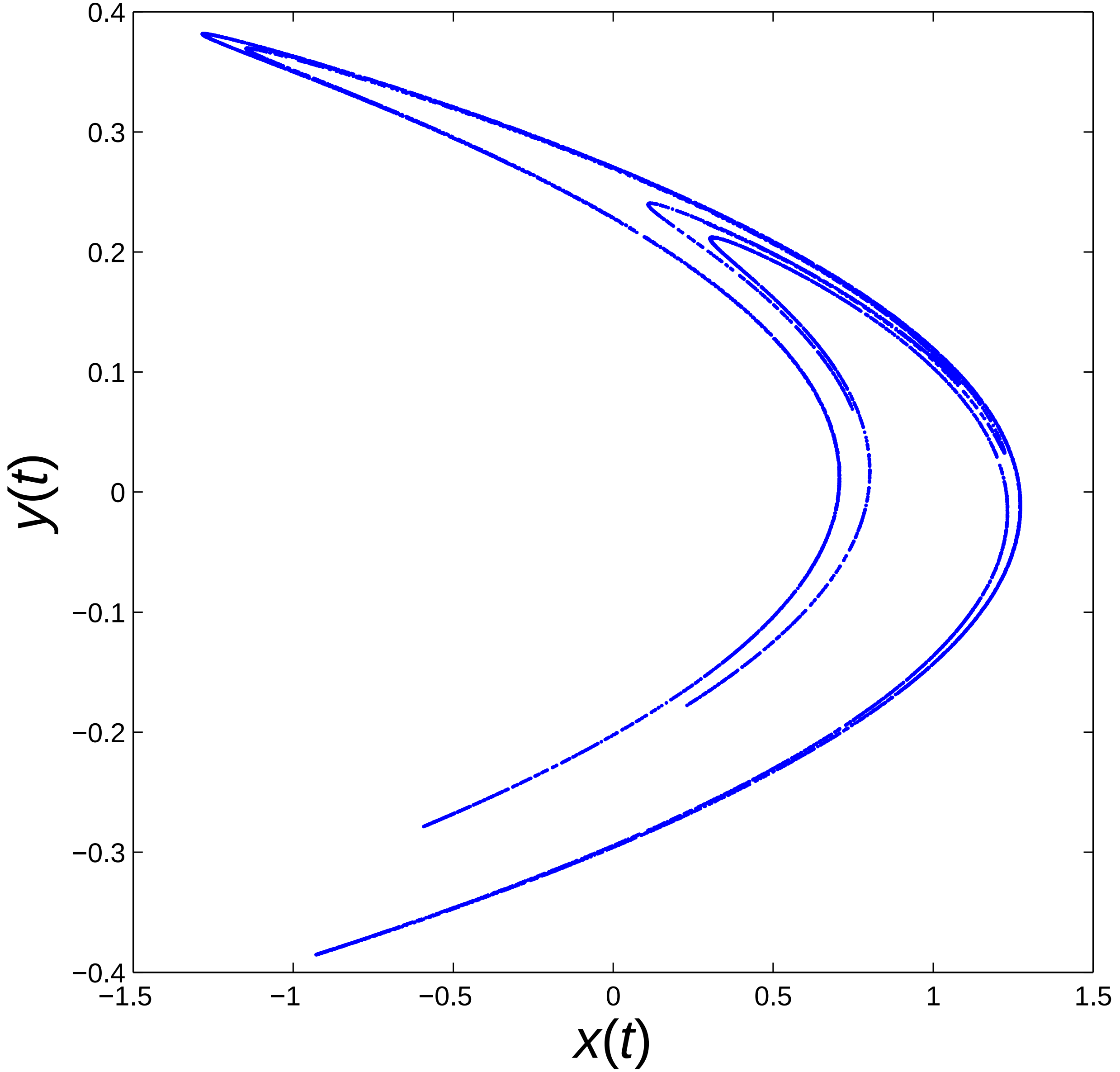
2 次元の非線形な差分方程式の例

- **エノン写像**

cf **ロジスティック写像**

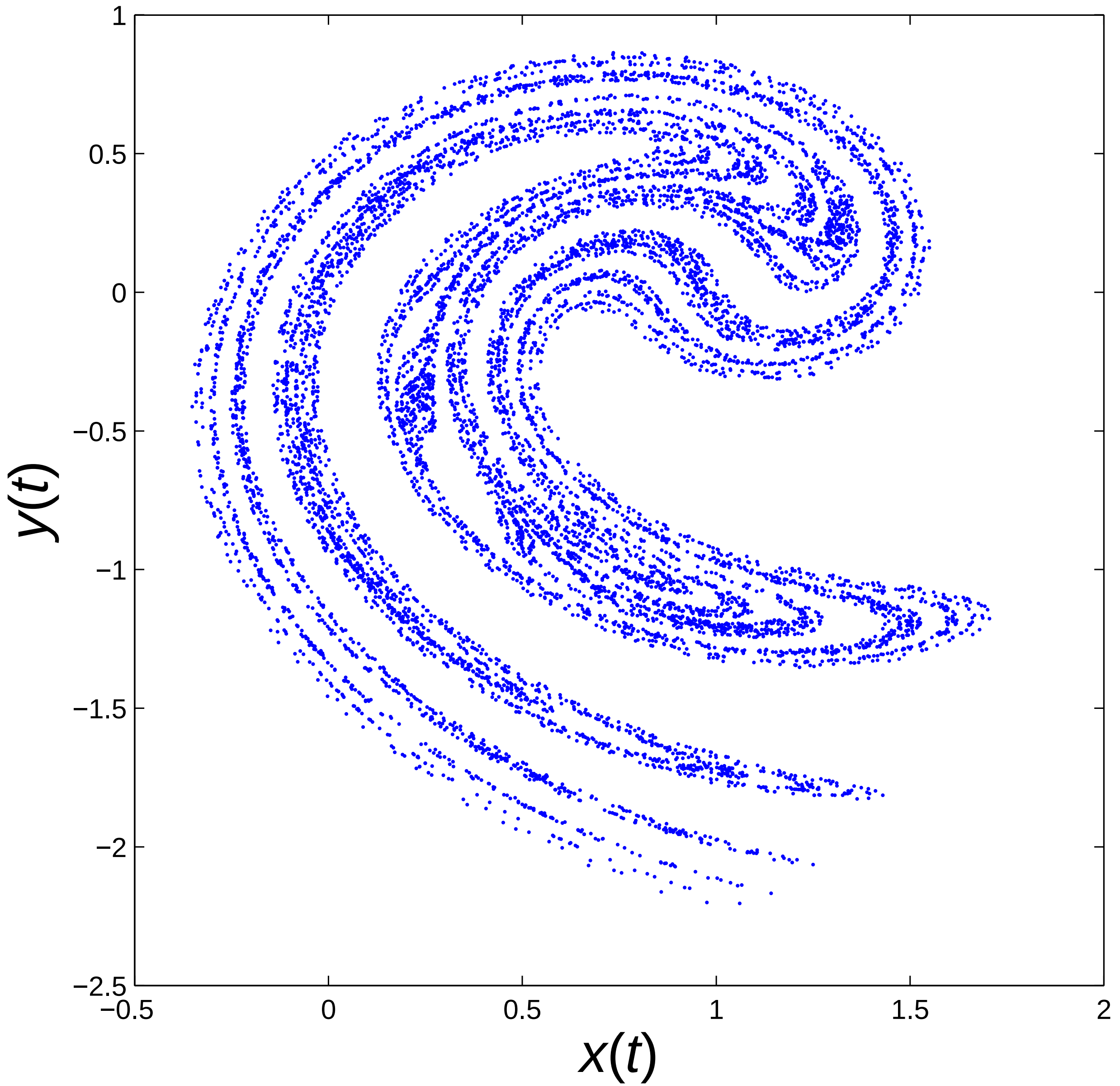
- **池田写像 (池田研介,** 1972)

エノン写像



$a = 1.4, b = 0.3$
10000 **点**
初期値より 1000 **点を過渡状態として無視**

池田写像



$q = 1.0, b = 0.9,$
$\kappa = 0.4, a = 6$
10000 点
初期値より 1000 点を
過渡状態として無視

2次元写像の応答を調べるには

- 1次元写像と同様に，
  - ______
  - ______

  の______，________を調べる必要がある．
- 2次元写像

$$\begin{cases} x(t+1) &= f(x(t), y(t)) \\ y(t+1) &= g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

の固定点を $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ とすると，

演習

- エノン写像の固定点を求めなさい．

$$\begin{cases} x(t+1) &= 1 - ax(t)^2 + y(t) \\ y(t+1) &= bx(t) \end{cases}$$

固定点 の安定性，不安定性

- 一変数の差分方程式

$$x(t+1) = f(x(t))$$

の場合は，$|f'(x^*)|$ が 1 よりも大きいかどうかを考えた．

- x^* を $x^* + \epsilon$ に変化させたときに，_ を加えた効果がが f により，
  - ____________
  - ____________________

- つまり，

を考えて，

が 1 よりも大ききかどうかを議論すればよいということ．

固定点 の安定性，不安定性

- 右辺をテーラ展開すると，

$$x^* + \epsilon' = f(x^* + \epsilon)$$

- 整理すると

- $\epsilon \ll 1$ なので，

2変数の場合は？

- 二変数の差分方程式

$$\begin{cases} x(t+1) &= f(x(t), y(t)) \\ y(t+1) &= g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

に対して，$(x^*, y^*)^T$ を $(x^* + \epsilon_x, y^* + \epsilon_y)^T$ に変化させたときに，____ が

  – 大きくなってしまうのか (______)，

  – 小さくなるのか (____)

を考えれば良い．

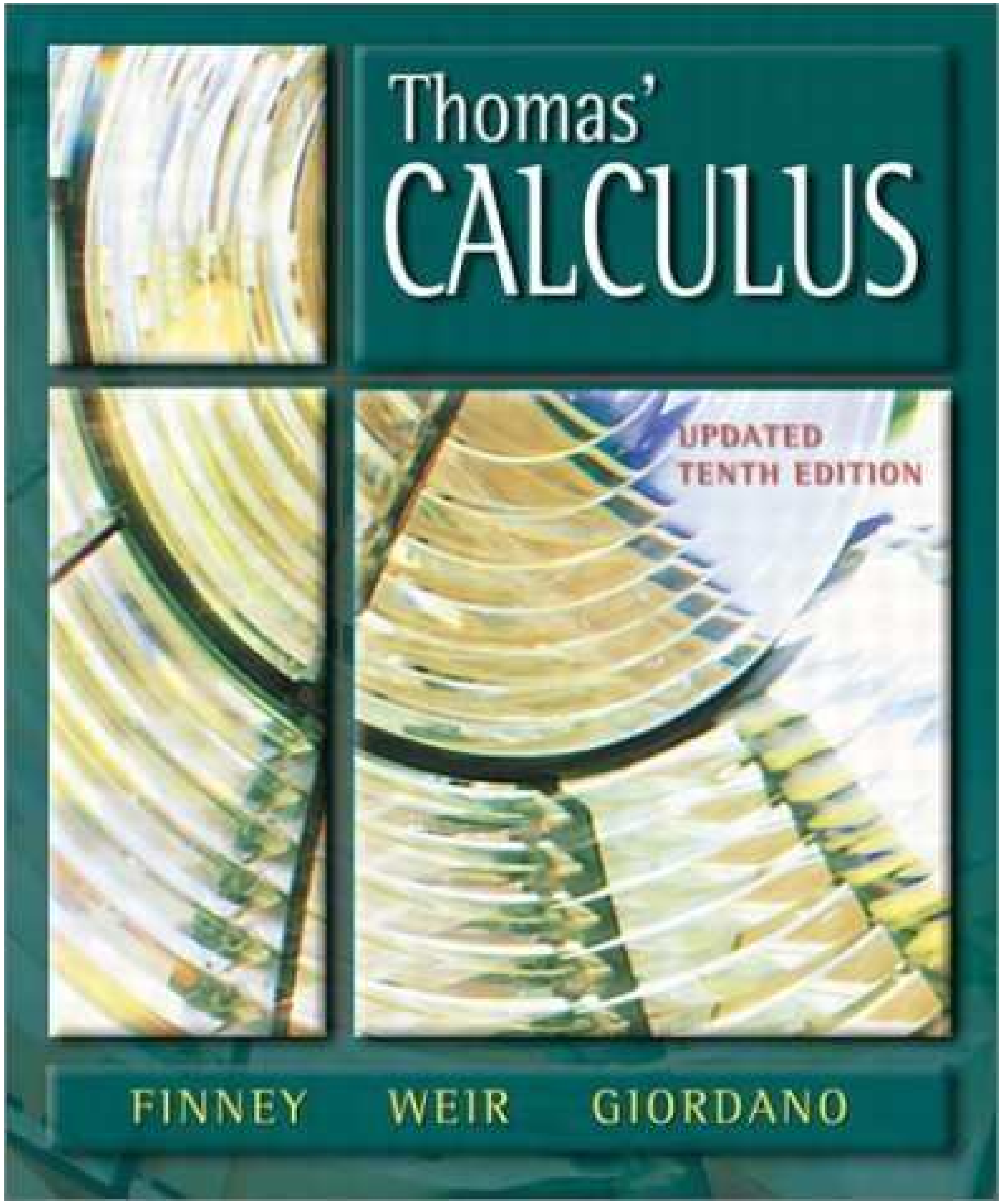
- そのためには，______________________ を用いる．

- どこで習ったか？

  – ____________

  – __________

参考書籍紹介



Ross L. Finney, Maurice D. Weir, and Frank R. Giordano, “Thomas’s Calculus,”
10 th Edition, Addison Wesley, 2001.

2変数関数のテーラ展開

- 第一式

$$x^* + \epsilon_x' \quad = \quad f(x^* + \epsilon_x, y^* + \epsilon_y)$$

- 第二式

$$y^* + \epsilon_y' \quad = \quad g(x^* + \epsilon_x, y^* + \epsilon_y)$$

線形写像による近似

- ❏ $\epsilon_x \ll 1, \epsilon_y \ll 1$ だから，

- ❏ これは，__________________________________ 写像
- ❏ 「線形な行列による写像により，(ϵ_x, ϵ_y) は，どのような変化を示すか」を考えれば良い．
  $\Longrightarrow$ どこで習ったか?
  - ____________

参考書籍紹介

平岡 和幸，堀 玄,
"プログラミングのための線形代数,"
オーム社，2004 **年**.

演習

- エノン写像

$$\begin{cases} x(t+1) &= 1 - ax(t)^2 + y(t) \\ y(t+1) &= bx(t) \end{cases}$$

のヤコビ行列を求めなさい．

演習

- 池田写像

$$
\begin{cases}
x(t+1) = q + b\Big(x(t)\cos\theta(t) - y(t)\sin\theta(t)\Big) \\
y(t+1) = b\Big(x(t)\sin\theta(t) + y(t)\cos\theta(t)\Big) \\
\theta(t) = \kappa - \dfrac{a}{1 + x^2(t) + y^2(t)}
\end{cases}
$$

のヤコビ行列を求めなさい．