2 変数関数のテーラ展開

- 第一式

$$x^* + \epsilon'_x = f(x^* + \epsilon_x, y^* + \epsilon_y)$$

- 第二式

$$y^* + \epsilon'_y = g(x^* + \epsilon_x, y^* + \epsilon_y)$$

線形写像による近似

- $\epsilon_x \ll 1, \epsilon_y \ll 1$ だから，

- これは，____________________________________ 写像

- 「線形な行列による写像により，(ϵ_x, ϵ_y) は，どのような変化を示すか」を考えれば良い．
  $\Longrightarrow$ どこで習ったか?
  - ____________

演習

- 線形な行列による写像の応答は，どのように分類されるか，を考える前に，演習をやりましょう．
  エノン写像

$$\begin{cases} x(t+1) &= 1 - ax(t)^2 + y(t) \\ y(t+1) &= bx(t) \end{cases}$$

  のヤコビ行列を求めなさい．

演習

- 池田写像

$$
\begin{cases}
x(t+1) = q + b\Big(x(t)\cos\theta(t) - y(t)\sin\theta(t)\Big) \\
y(t+1) = b\Big(x(t)\sin\theta(t) + y(t)\cos\theta(t)\Big) \\
\theta(t) = \kappa - \dfrac{a}{1 + x^2(t) + y^2(t)}
\end{cases}
$$

のヤコビ行列を求めなさい．

線形な差分方程式

- 1 次元の場合

$$x(t+1) = Rx(t)$$

これを解くと (________________________),

  – ______ であれば漸近安定
  – ______ であれば不安定
  – ______ であればリアプノフ安定

- それでは，2 次元の場合は?
- さらに進んで，一般の K 次元の場合は?

線形な差分方程式

❑ 2 次元の場合は?

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= a x_1(t) + b x_2(t) \\ x_2(t+1) &= c x_1(t) + d x_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

❑ もし，1 次元の場合とのアナロジーで，

などとして，安定性の判定が出来たらうれしい．

「簡単」な線形差分方程式

- 一般的な 2 次元の線形差分方程式

$$\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$$

から，

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(0)$$

を求めるのは容易ではない．

- そこで，まずは簡単にできる例から考えてみよう．以下の場合はどうか?

対角行列の場合

- 対角行列の場合は簡単である．

- つまり，

  のように，__________ に考えればよい

- それでは，対角行列でない一般の場合はどうか．
  対角行列のパターンに _____ できないか？$\Rightarrow$ ________

対角化とは何か (1)

[問題] 以下の具体例を考えよう．

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

に対して， $x_1(t) = \boxed{} x_1(0),\ x_2(t) = \boxed{} x_2(0)$ **を求めよ．**

- **ヒント 1**

$$\begin{cases} y_1(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\ y_2(t) &= x_1(t) - x_2(t) \end{cases}$$

として， $y_1(t), y_2(t)$ **を求めよ．**

対角化とは何か (2)

- ヒント 2 : $y_1(t), y_2(t)$ から $x_1(t), x_2(t)$ に戻せ．

対角化とは何か (3)

[問題] 今の問題を行列を用いて翻訳せよ．

- **ヒント**

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ とすれば } \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$$

対角化とは何か (4)

[問題] うまくいった理由を探ぐろう．

- ❑
- ❑
- ❑
- ❑

うまく解けるかどうかの鍵は，

$\boldsymbol{x}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}(t)$

単なる表現上の問題だが •••

- $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t) &= C^{-1}\boldsymbol{y}(t) \end{cases}$$

- $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t) &= P\boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= P^{-1}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

- **理由**

対角化とは何か (5)

- さて， $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t)$ より，　　　　　　である．

$$\boldsymbol{y}(t+1) \quad = \quad P^{-1}\boldsymbol{x}(t+1)$$

となるので，

- Λ が対角行列ならば，　　　　　　より，

対角化とは何か (6)

元々の変数	$\boldsymbol{x}(t)$	$\boldsymbol{x}(t+1)$
便利な変数	$\boldsymbol{y}(t)$	$\boldsymbol{y}(t+1)$

対角化とは何か (7)

- $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P をどうやって求めるか．

$$P = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\right)$$

  のように考えよう．ここで，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は __________

- 求めたいのは，

  のように ____________________________

-

対角化とは何か (8)

- 順次、変形していくと ⋯

-

$\Rightarrow$

ここまでのまとめ

線形な 2 次元差分方程式 $x(t+1) = Ax(t)$ を定める行列 A に対して，

- 正則行列　をうまく選んで，　　　により ______ できれば，

  λ_1, λ_2 は行列 A の固有値
  P は行列 A の固有ベクトルを並べた行列

- 安定であるためには，

注 ここまでは，

____

____

固有値，固有ベクトルの意味

- ❑ **固有値** λ**，固有ベクトル** p **の定義**
  正則な行列 A **に対して**

- ❑ **差分方程式** $\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$ **のダイナミクスとの関係**
  $\Longrightarrow \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{p}$ **としたらどうなるか？**
  -
  -
  -
  -
  -

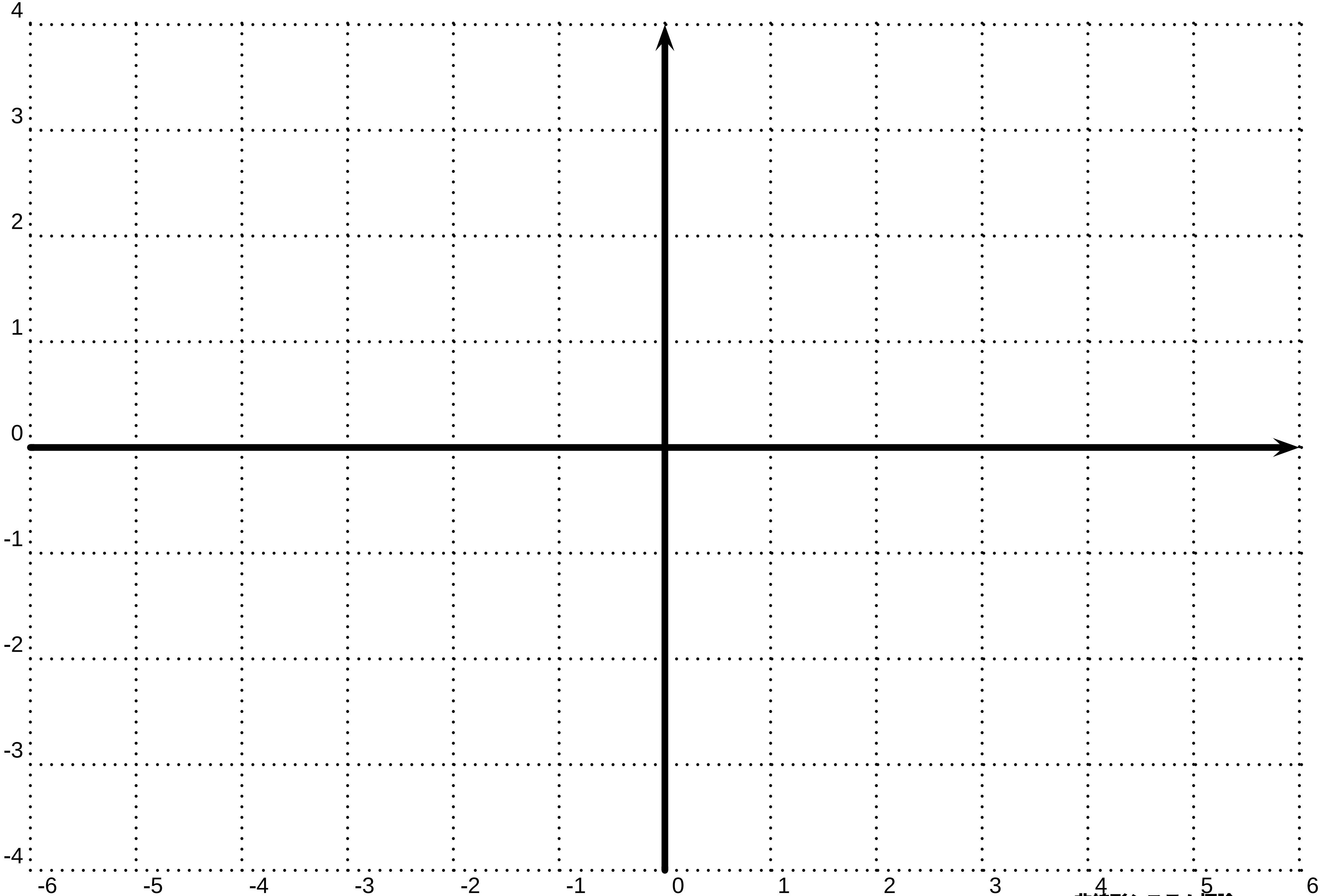
固有値，固有ベクトルの意味

- $x(t) = \lambda^t p$ の意味は？
  - p (A の固有ベクトル) を初期値として与えると，
    ____________________ で ____________________
  - ________ のは ，_____ のは

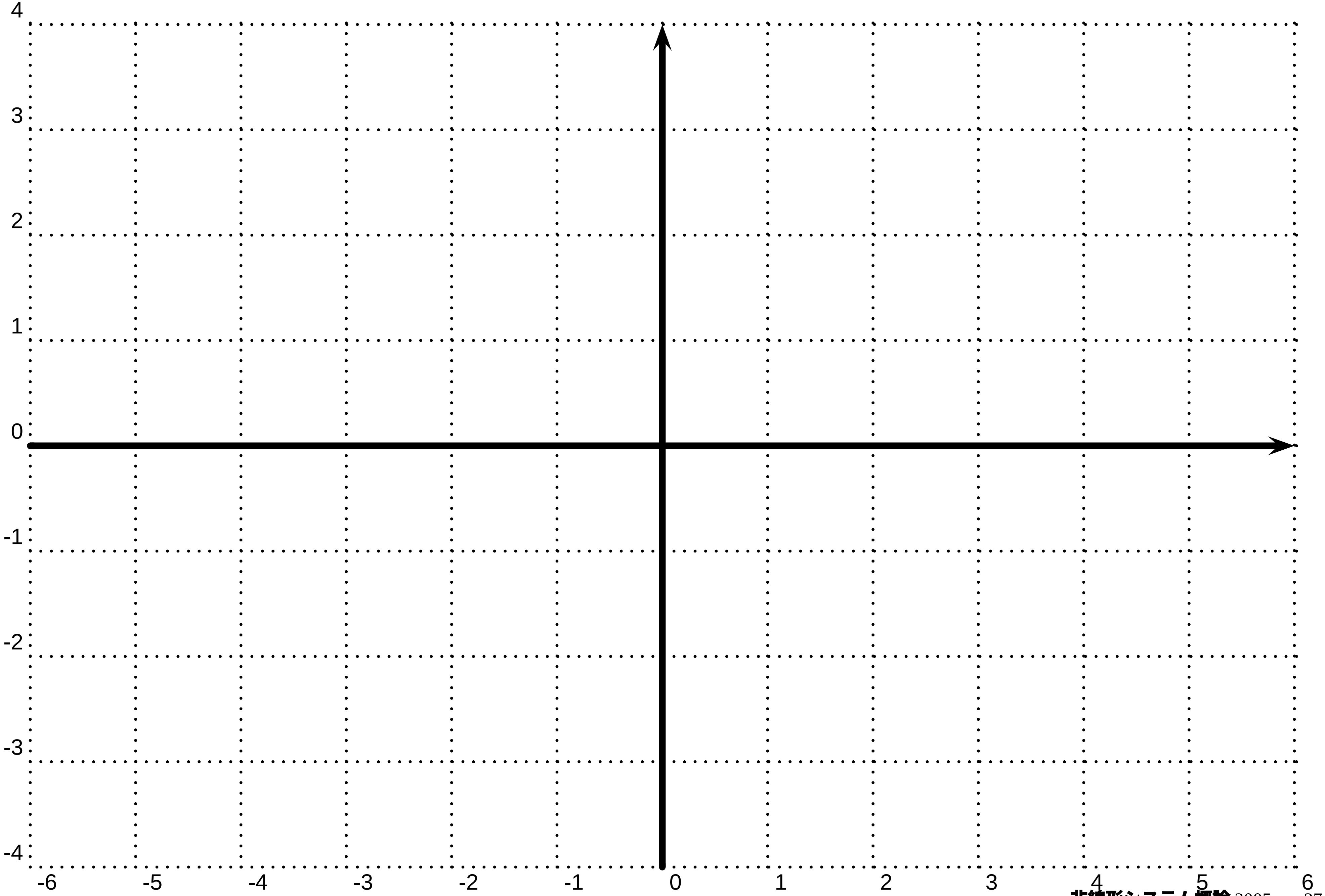
例 2 次元の線形差分方程式 $x(t+1) = Ax(t)$ の写像行列 A の固有値を λ_1, λ_2，固有ベクトルを p_1, p_2 としよう．
この差分方程式の固定点 x^* は， である．以下の場合について，固定点の安定性を議論しよう．但し，$p_1 = (2, 1)^T$, $p_2 = (1, -1)^T$ とする．

- $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.6 \Rightarrow$ ________________
- $\lambda_1 = 1.6, \lambda_2 = 1.2 \Rightarrow$ ________________
- $\lambda_1 = 2.0, \lambda_2 = 0.5 \Rightarrow$ ______________________

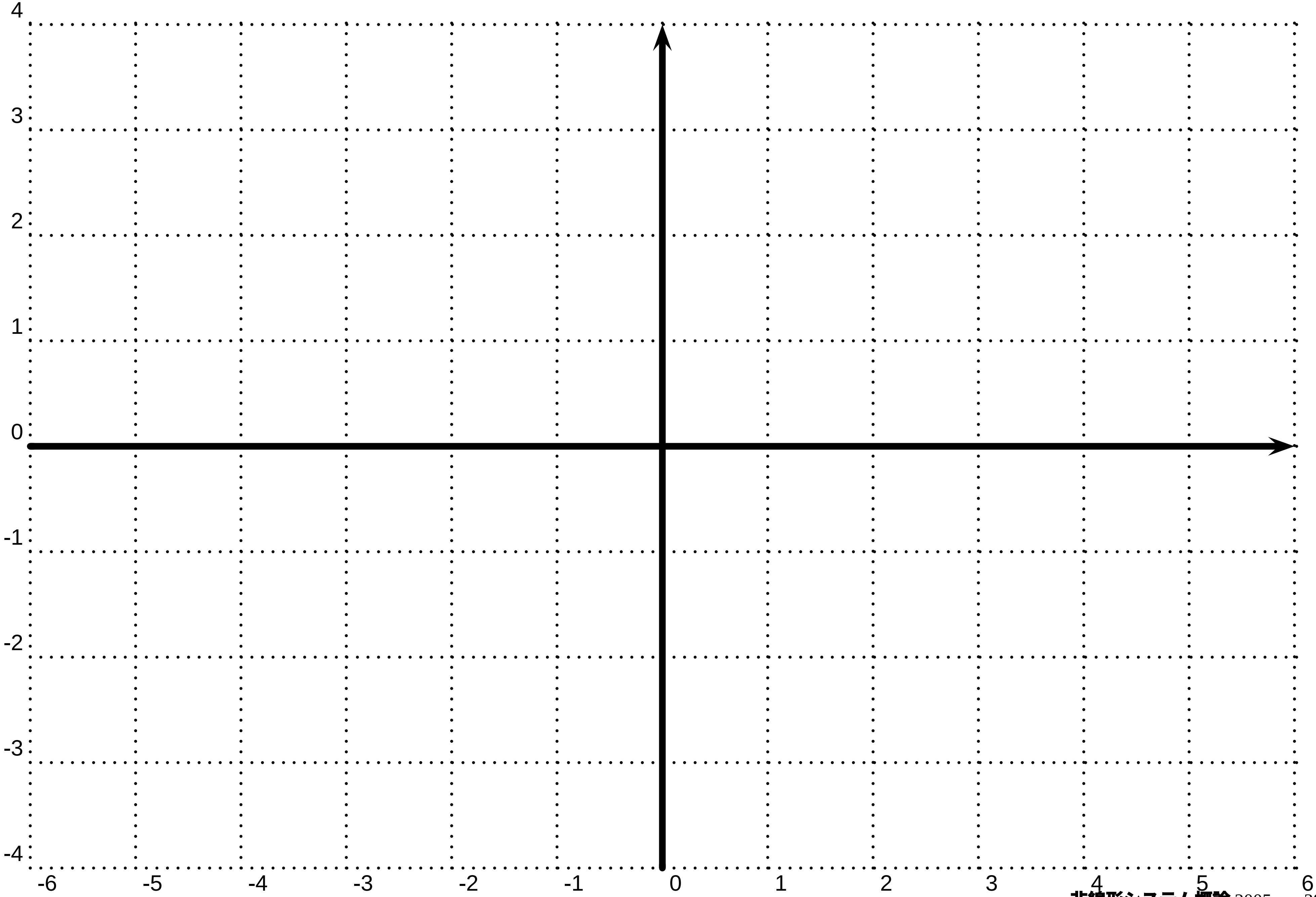
$\lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1$ の場合



$\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$ の場合



$\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1$ の場合



固有値，固有ベクトルを求めるには

- 定義より

- 移項すると

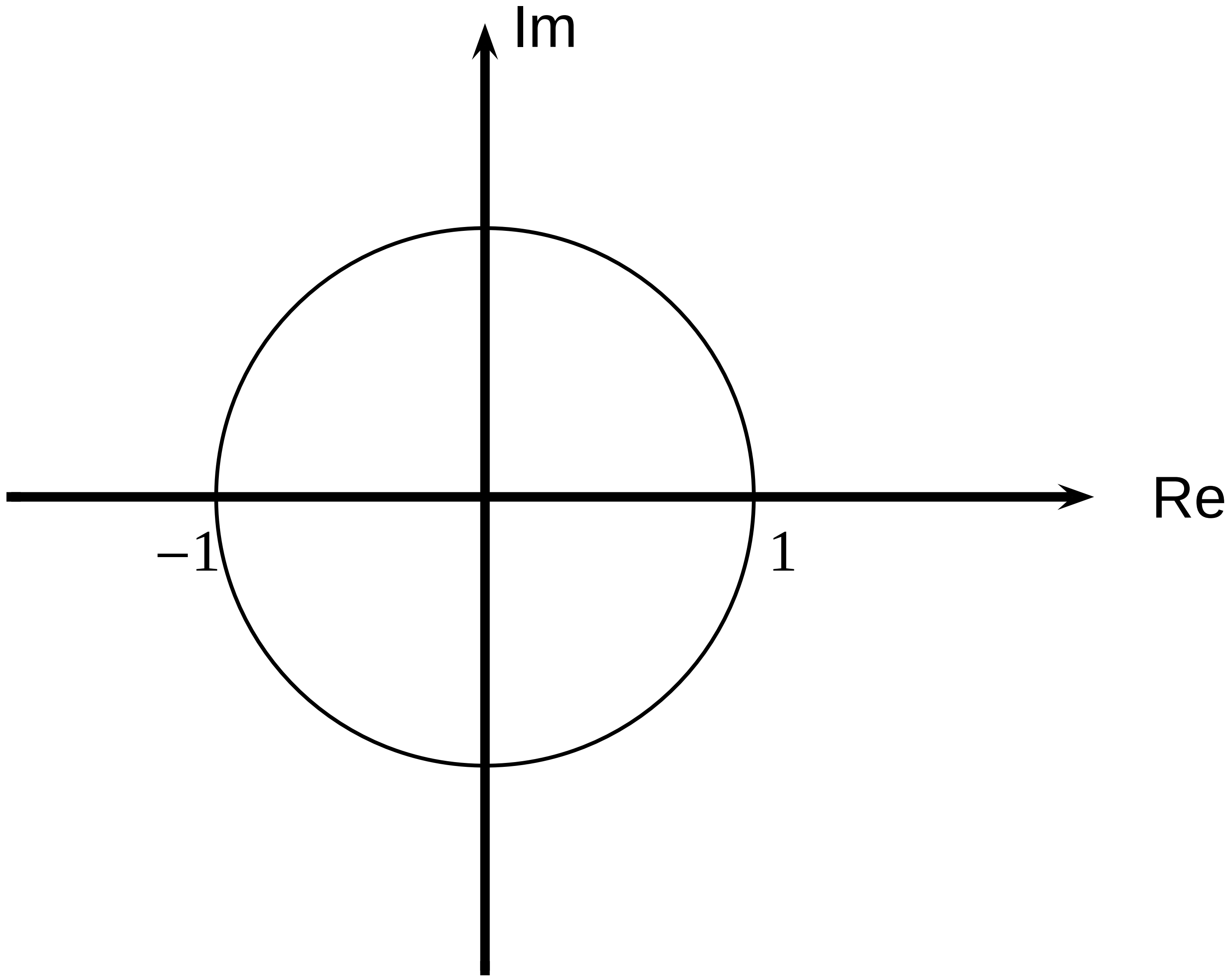
- 従って

- これを ____________ という．

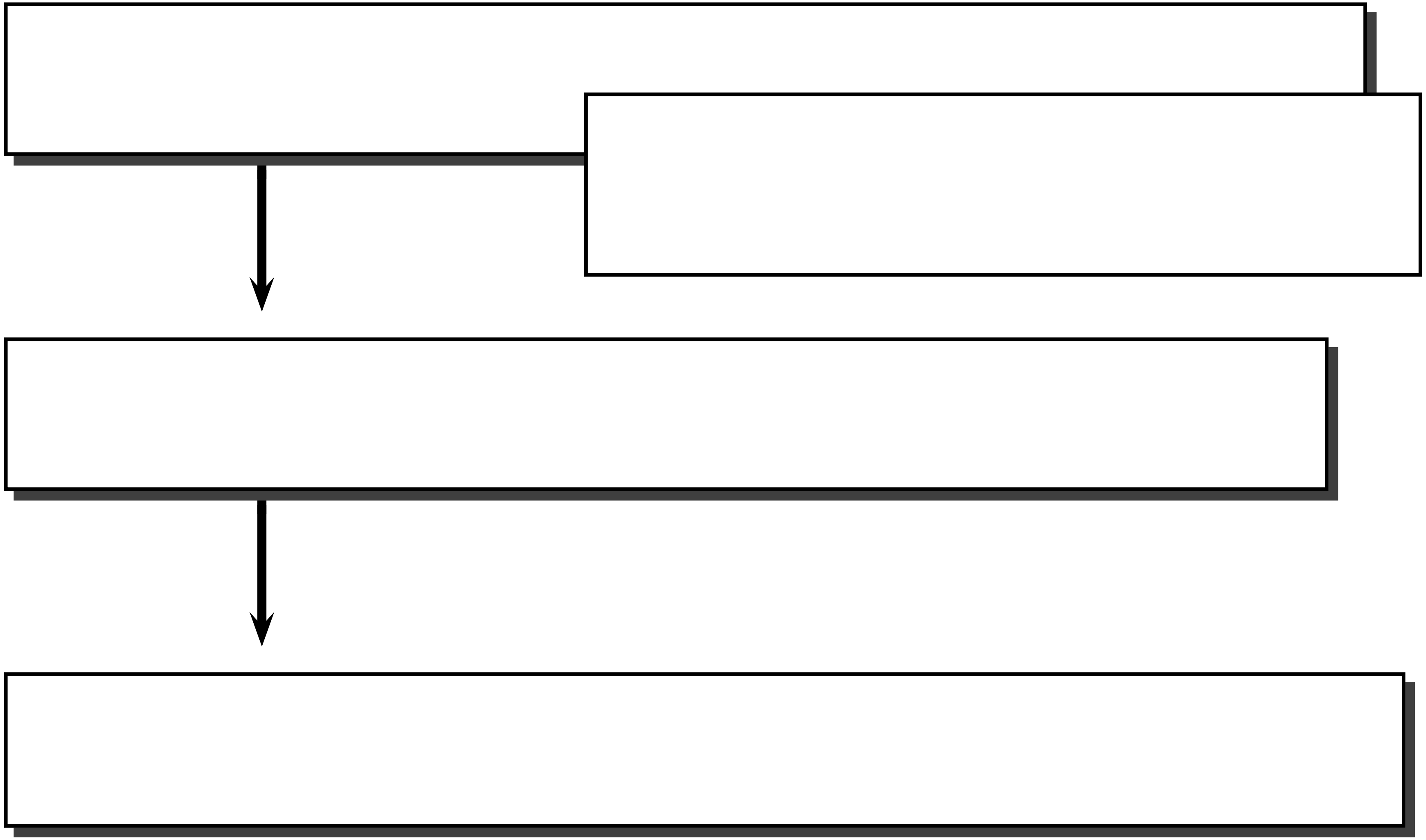
特性方程式の解のパターン

- 実数解 $\rightarrow$
  - 相異なる二つの実数解 λ_1, λ_2
    - ➞ $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ ______________________
    - ➞ $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$ __________________________
    - ➞ $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$ ______________
  - 重解 λ
    - ➞ $|\lambda| > 1$ ______________________
    - ➞ $|\lambda| < 1$ ________________________
- 複素数 $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \sigma \pm i\omega$ より
  - $\sigma^2 + \omega^2 < 1$ __________________________
  - $\sigma^2 + \omega^2 = 1$ _______________
  - $\sigma^2 + \omega^2 > 1$ ______________________________

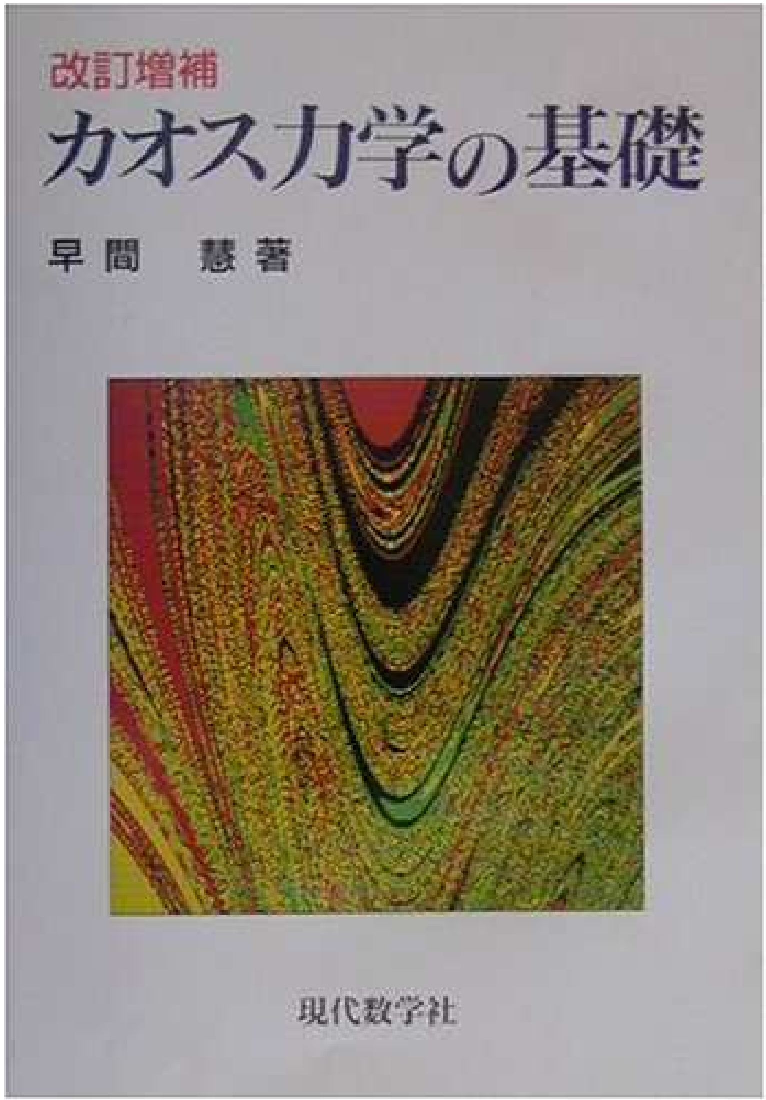
2 次元線形差分力学系の振る舞い



まとめると ···



参考資料紹介



早間 慧, **(改訂増補) カオス力学の基礎**, **現代数学社**,

参考文献

徳永隆治:
フラクタルと画像処理
–差分力学系の基礎と応用–，
コロナ社，2002．

参考書籍紹介

平岡 和幸，堀 玄,
“プログラミングのための線形代数,”
オーム社，2004 年．