$\LaTeX$ で数式を書く[1]

1　Taylor 展開

1.1　Taylor の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で n 回連続微分可能ならば，$a \leq x \leq b$ において

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{f^{(r)}(a)}{r!}(x-a)^r + R_n \\
&= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2 \\
&= +\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n
\end{aligned}
$$

ここに，R_n は剰余項とよばれ，つぎのように表示される．

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= \frac{(x-a)-p}{(n-1)!p}(x-\xi)^{n-p} f^{(n)}(\xi) \\
&= \frac{(x-a)-p}{(n-1)!p}(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))
\end{aligned}
$$

ただし，$n \geq p > 0$，$0 < \theta < 1$，$a < \xi < x$，$\xi = a + \theta(x-a)$.

ここで $p = n, 1$ ととれば，つぎの形にも表わされる．

$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(\xi) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(x-a)(x-\xi)^{n-1} f^{(n)}(\xi)
\end{aligned}
$$

1.2　2 変数函数の Taylor 展開

2 実変数 x, y の函数 $f(x,y)$ が点 (x_0, y_0) の近傍で N 回微分可能ならば，

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h, y_0+h) &= \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{r!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^r f(x_0,y_0) + R_N \\
&= \sum_{\substack{0 \leq m+n \leq N-1 \\ m,n \geq 0}} \frac{h^m k^n}{m!n!} \frac{\partial^{m+n} f(x_0,y_0)}{\partial x^m \partial y^n} + R_N
\end{aligned}
$$

[1] 森口，宇田川，一松著，岩波 数学公式，岩波書店より．

$$R_N = \frac{1}{N!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial x}\right)^N f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$$

ここに，$\left(h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^N f$ は，$(h\xi + k\eta)^N$ を展開して，その $\xi^m\eta^n$ 項を $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ でおきかえたものである．具体的には，図 1 を参照のこと．

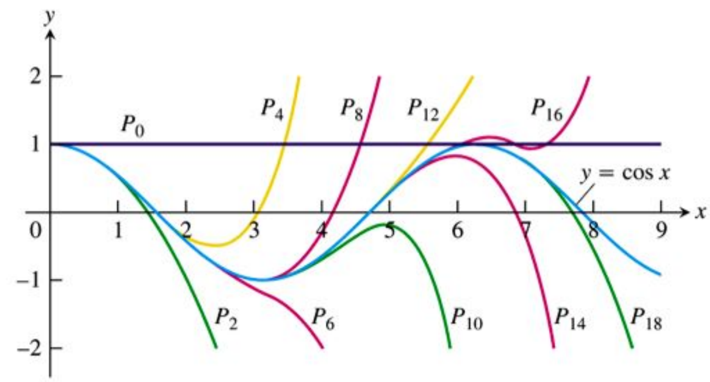

図 1: のテーラ展開の意味.

2　特別な不定積分

しばしば現われる初等函数の不定積分で，助変数の値によって形のかわるものをつぎのようにおく．右端はその記号の現われる表の番号である．

$$I_H = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x + c} \qquad \begin{cases} \text{第 27 表} \\ \text{第 30 表} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \log\left|\dfrac{\tan(x/2) + (a-\sqrt{a^2+b^2-c^2})/(c-b)}{\tan(x/2) + (a+\sqrt{a^2+b^2-c^2})/(c-b)}\right| & [a^2+b^2>c^2, b\neq c] \\ \dfrac{2}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} \arctan\dfrac{a-(b-c)\tan(x/2)}{\sqrt{c^2-a^2-b^2}} & [a^2+b^2<c^2] \\ \dfrac{-2}{a-(b-c)\tan(x/2)} & [a^2+b^2=c^2, b\neq c] \\ \dfrac{1}{a}\log\left|b + a\tan\dfrac{x}{2}\right| & [b=c, a\neq 0] \\ \dfrac{1}{b}\tan\dfrac{x}{2} & [b=c, a=0]. \end{cases}$$