LaTeX で数式を書いてみよう[1]

1 複素関数の Laurent 級数展開

1.1 Laurent 展開

関数 $f(z)$ が円環領域 $D: r < |z-a| < R$ で正則ならば，D において Laurent 級数

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n \\ &= \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-c)^2} + \frac{a_{-1}}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots \end{aligned}$$

に展開される．右辺の級数は，$r+\delta \leq |z-c| \leq R+\delta \ \ [\delta > 0]$ で一様収束する．そして，係数 a_n はただひとつとおりに定まり，

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta \tag{1}$$

で与えられる．ここに，γ は D 内で c を一周する閉曲線である．

とくに，a_n の負の項が有限個で，$a_{-h-1} = a_{-h-2} = \cdots = 0$ ならば，関数 $f(z)$ は $0 < |z-c| < R$ で正則で，点 c は h の極であり，また，$g(z) = (z-c)^h f(z)$ は　$|z-c| < R$ で正則で，

$$a_n = \frac{g^{(n+h)}(c)}{(n+h)!}$$

となる．係数 a_{-1} は $f(z)$ の c における留数である．

1.2 関数 $f(z)$ の円環領域

Laurent 展開を適用する場合の，関数 $f(z)$ の円環領域の例が図 1 である．

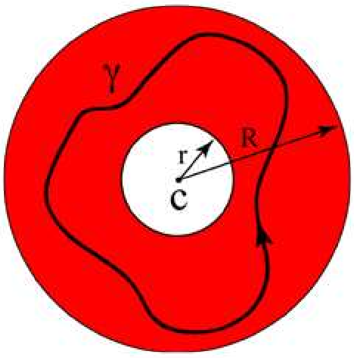

図 1: 円環領域の例．

[1] 森口，宇田川，一松著,「岩波 数学公式 II 級数・フーリエ解析」，岩波書店より．