

非線形システム概論 2006

線形な差分方程式と非線形な差分方程式

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門

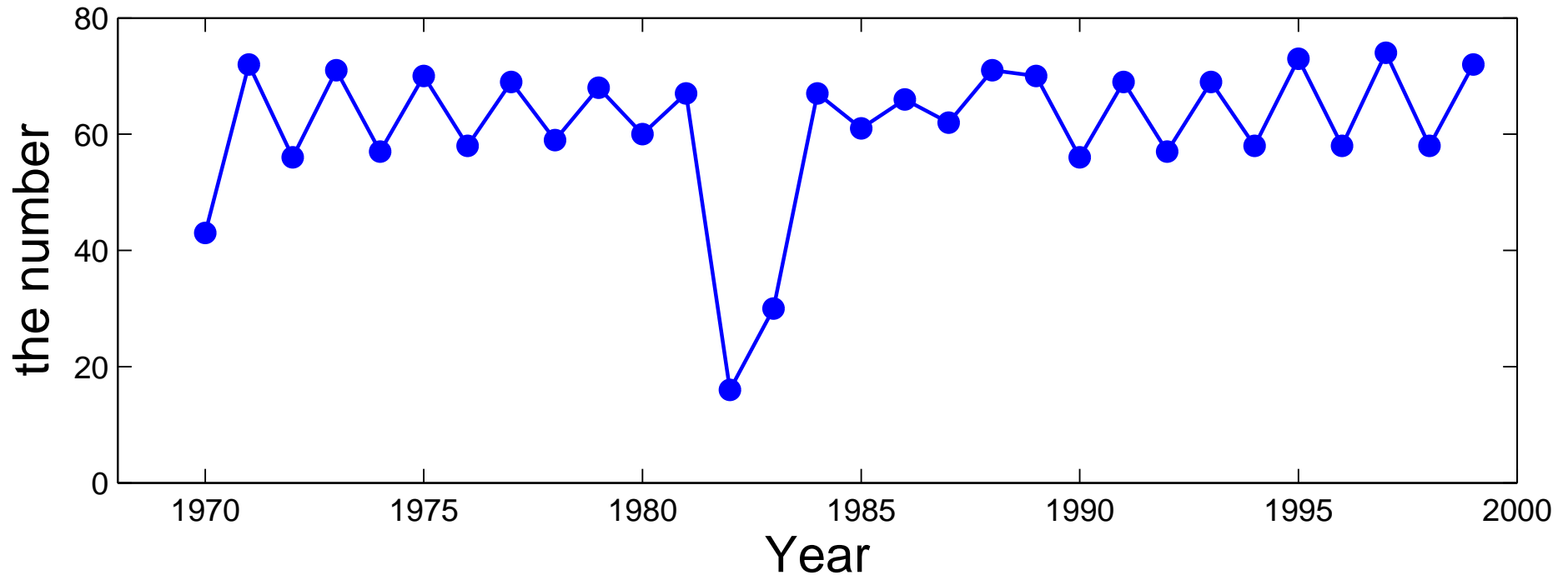
338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048-858-3577, Fax : 048-858-3716

Email : tohru@nls.ics.saitama-u.ac.jp

URL : <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru>

ある時系列データ (ハエの個体数)



- 何か重要な生物学的情報があるだろうか？
- 仮にそのような情報が存在するとして，
 - その情報をどのようにして扱えば良いのか？
 - その情報を時系列データから抽出することができるだろうか？

ハエの個体数の変化をモデル化する

- ❑ ある年 (夏) のハエの数は, 前年の卵の数に依存
- ❑ タマゴの数は, その年 (夏) の蠅の数に依存
- ❑ 従って, ある年 (夏) の蠅の数は, 前年 (の夏) の数に依存



- ❑ この式の意味は?
- ❑ N_t とは?
- ❑ なぜ f ?
- ❑ これを
- ❑ 時間 t が経過すると共に N_t が変化する →

という.

どのような f が良いのだろうか?

□ 一番簡単なのは f が **線形** な場合

⇒

□ 繰り返し (イタレーション)

□ 初期条件

□ 代入

線形な差分方程式の振る舞い

□ $R > 0$

・ $0 < R < 1$

・ $1 < R$

・ $R = 1$

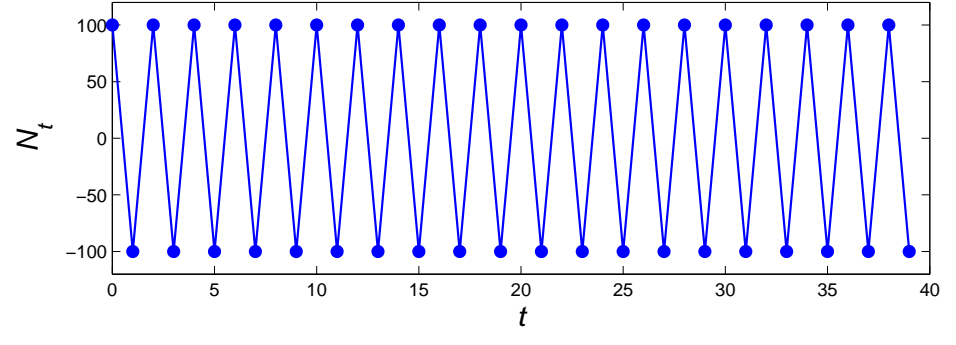
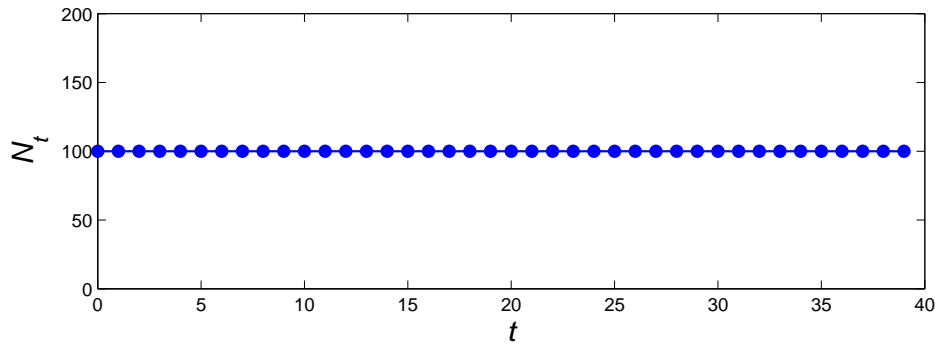
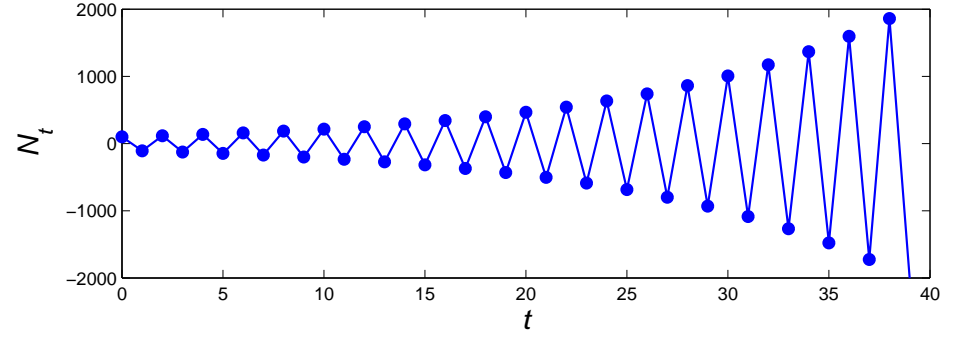
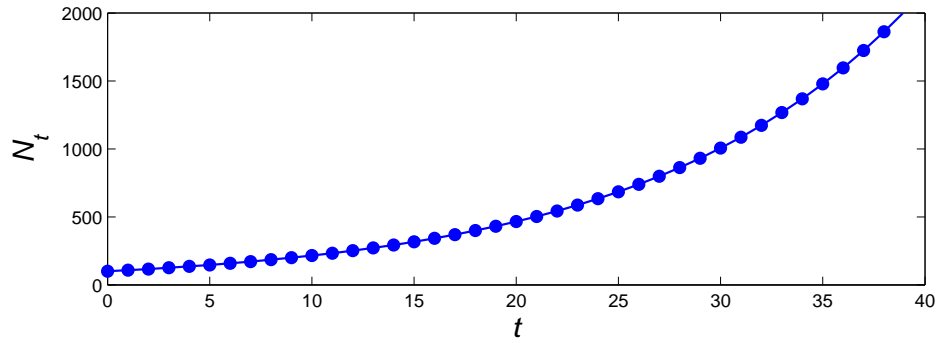
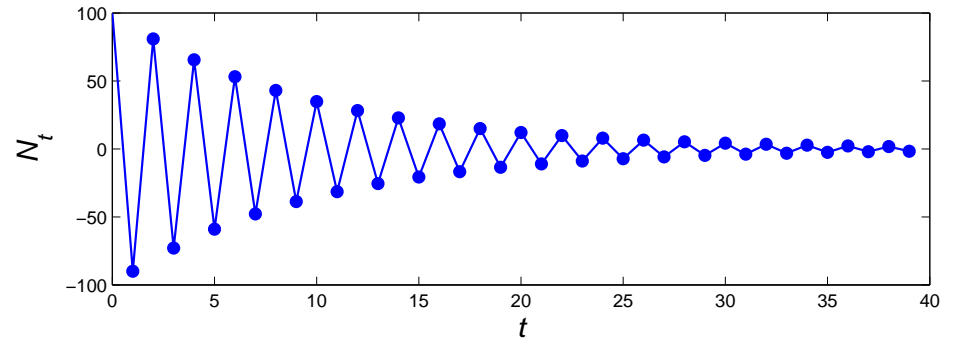
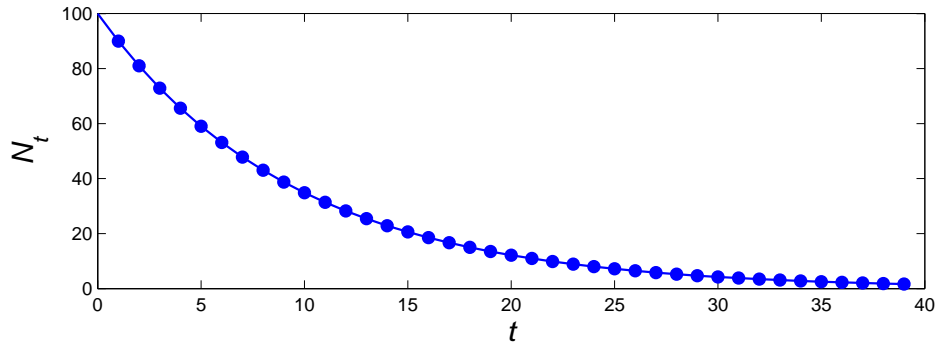
□ $R < 0$

・ $-1 < R < 0$

・ $R < -1$

・ $R = -1$

線形な差分方程式の振る舞い



非線形な差分方程式を扱うために!

注意!

非線形な差分方程式では，解析的に解を求めることが不可能である．

そこで，以下の手法が重要となる



の場合に特に威力を発揮．



の場合でも使える．

これらの手法を身につけるために，
線形な差分方程式で説明しよう!

図式解法

□ $N_0 = 0.7, R = 1.9$ とすると …

数値的な繰り返し計算

□ $N_0 = 100, R = 0.9$ とすると …

演習問題

1. 線形な差分方程式の振る舞いは，何通りに分類することが出来るか．

⇒

2. 線形な差分方程式

$$x_{t+1} = 0.9x_t$$

を考える．

(a) 初期値を $x_0 = 3.2$ としたときの，この差分方程式の解の振る舞いを図式解法を用いて表現せよ．

(b) 初期値を $x_0 = -3.2$ としたときには，どうなるか？

(c) この差分方程式の解の振る舞いは，最終的にはどうなるか？

3. ハエの個体数変化を線形な差分方程式 $N_{t+1} = RN_t$ でモデル化しようと考えた場合，

(a) モデル化できるといって良いか？

(b) もし良いとする場合，その理由は？

(c) もし良くないとする場合，その理由は？

(d) もし良くないとする場合，次にはどのような f を用いるべきか？

ハエの個体数変動は線形か？

□ ハエの個体数の変動は，

1. 減衰する，
2. 発散する，
3. 一定の値となる，
4. 正負を繰り返しながら減衰する，
5. 正負を繰り返しながら発散する，
6. 正負を繰り返しながら発散する，

の

□ 即ち，線形な差分方程式で，モデル化すること

□ なぜ のだろうか？

個体数が少ない時と多い時とで，増加率 (R) が異なっているからでは？

⇒

モデルの改良

$$N_{t+1} = RN_t$$

- この式の意味は?
- R の意味は?
- 問題点は?
 1. N_t が大きくなると,
 2. N_t が大きくなると,

- これらを考えて以下のように改良しよう.

これって非線形？

$$N_{t+1} = (R - bN_t)N_t = RN_t - bN_t^2$$

- これは な差分方程式
- どこが →

注意！
線形・非線形に関係なく、
と分かりやすくなることがある。

- とすると

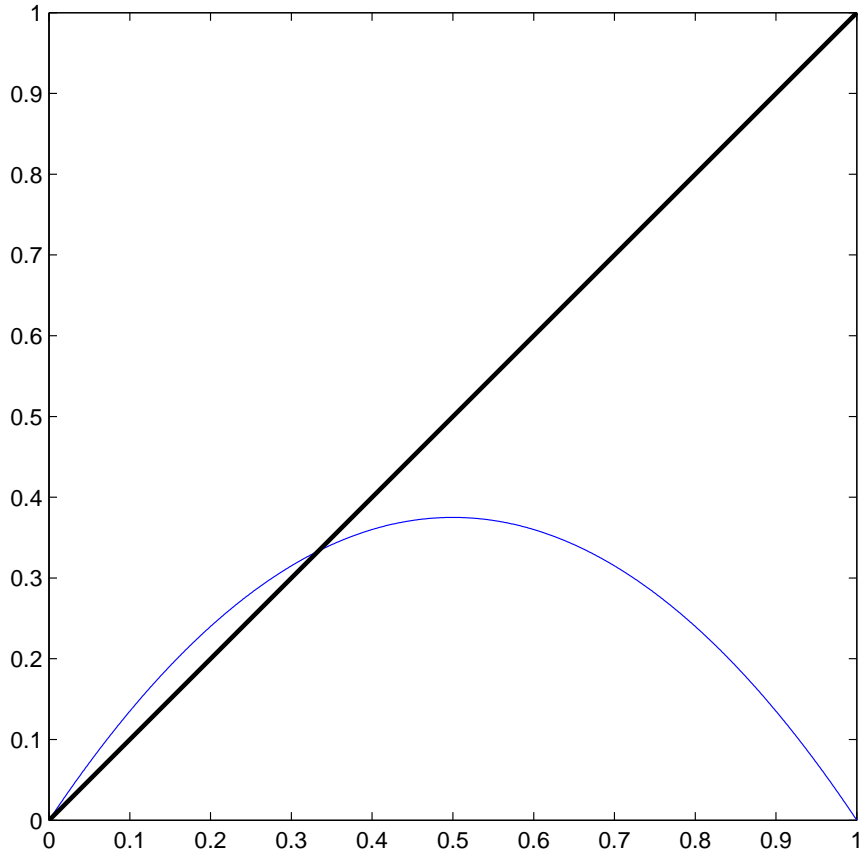
となる。これは、

と呼ばれている。

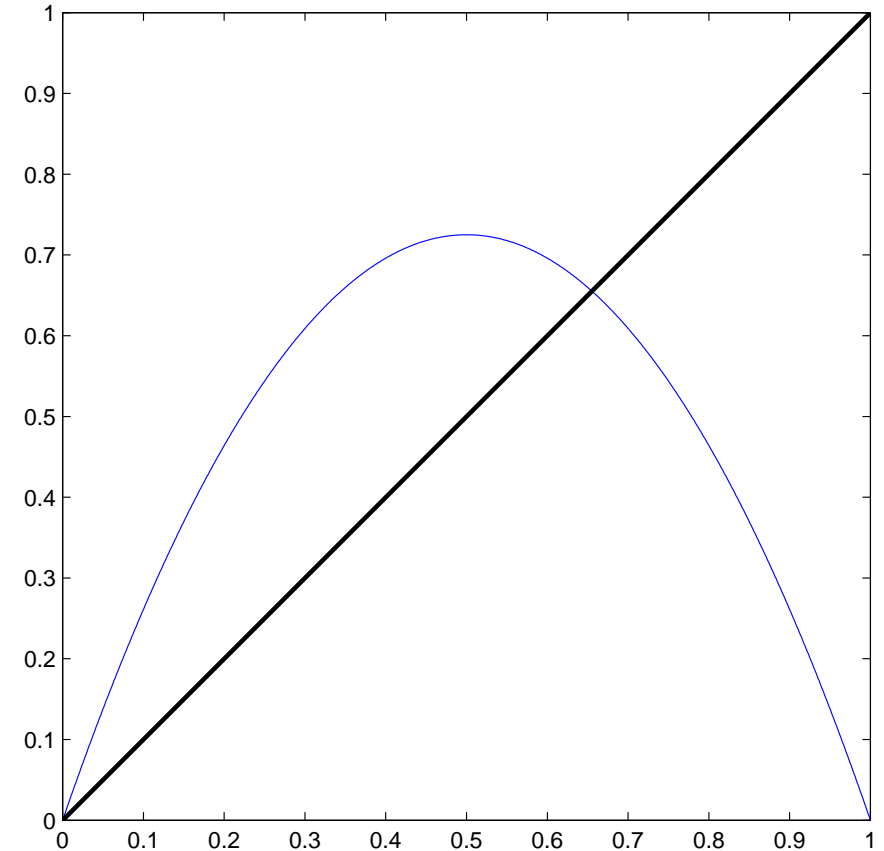
ロジスティック写像と図式解法 (1)

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

$R = 1.5$



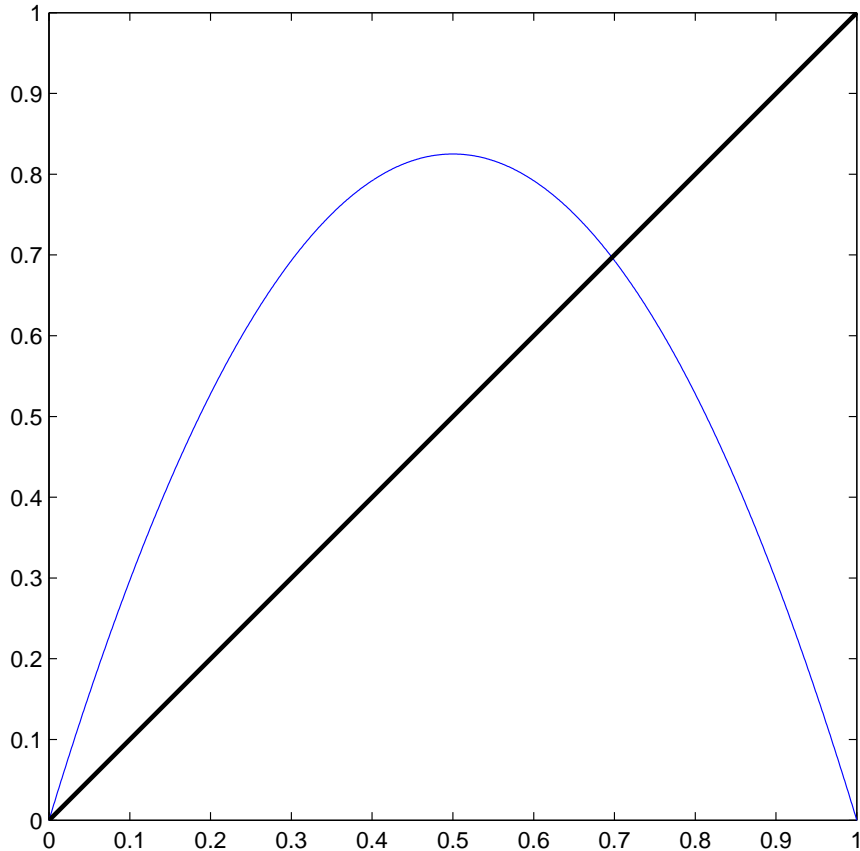
$R = 2.9$



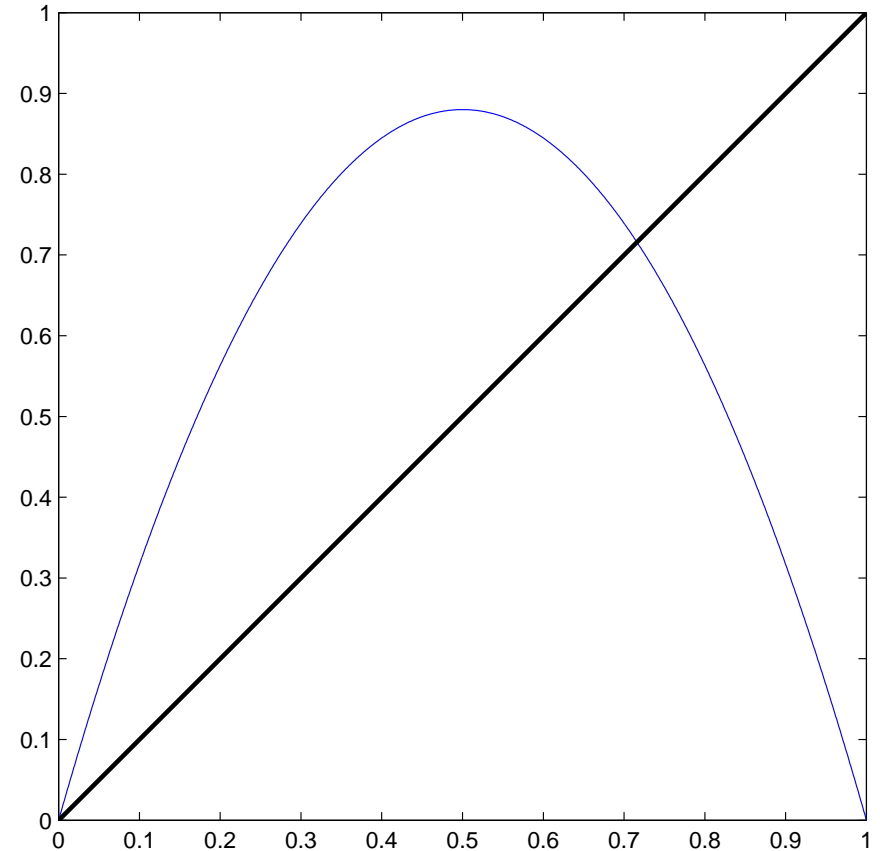
ロジスティック写像と図式解法 (2)

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

$R = 3.3$



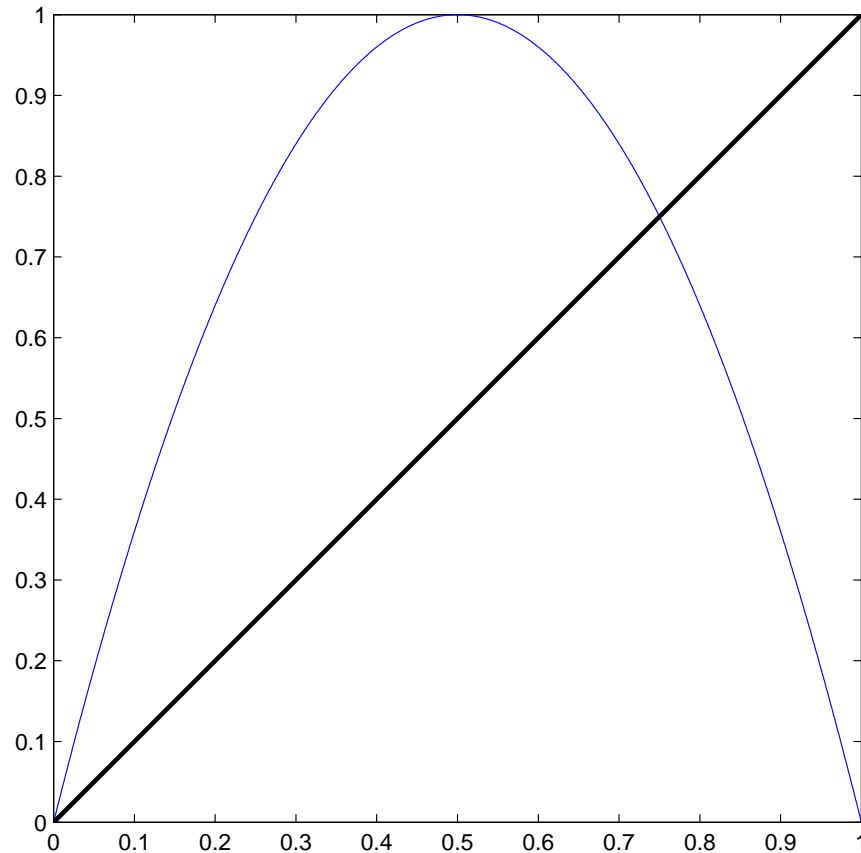
$R = 3.52$



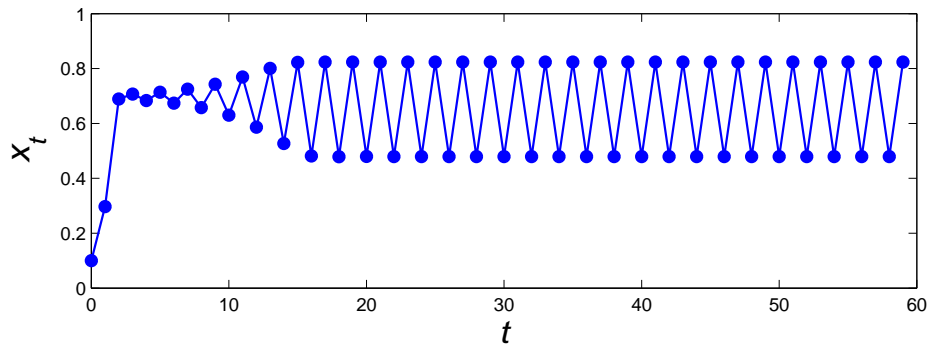
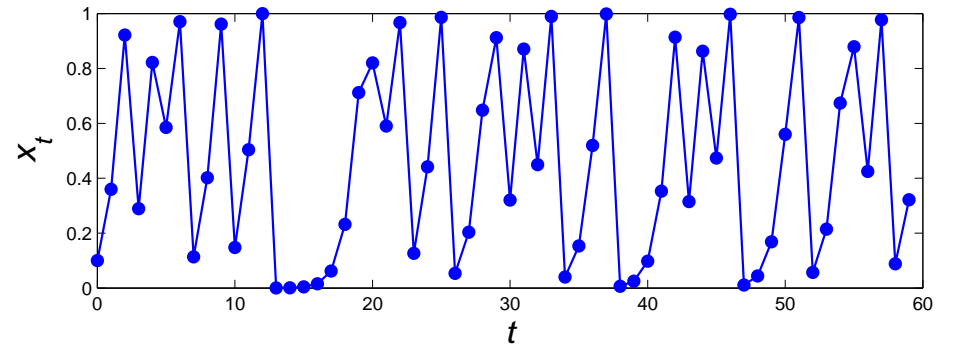
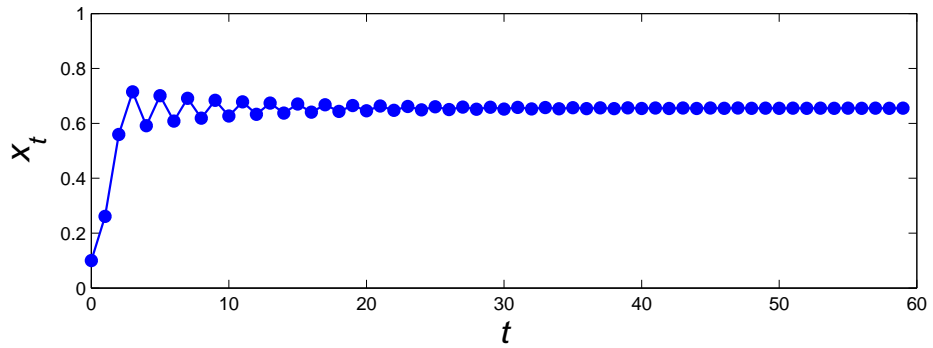
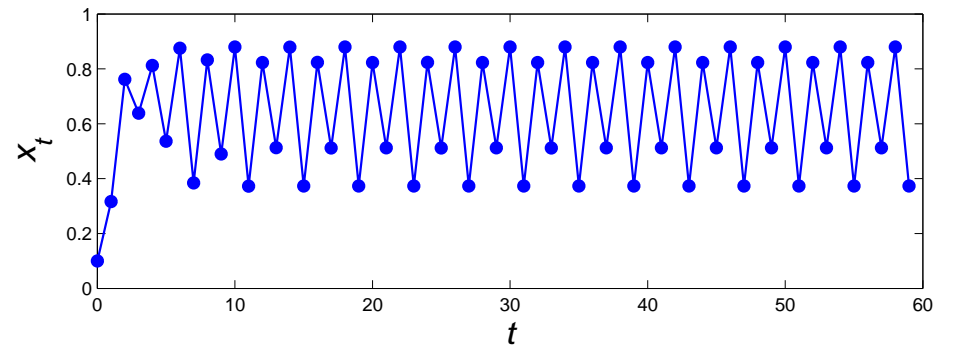
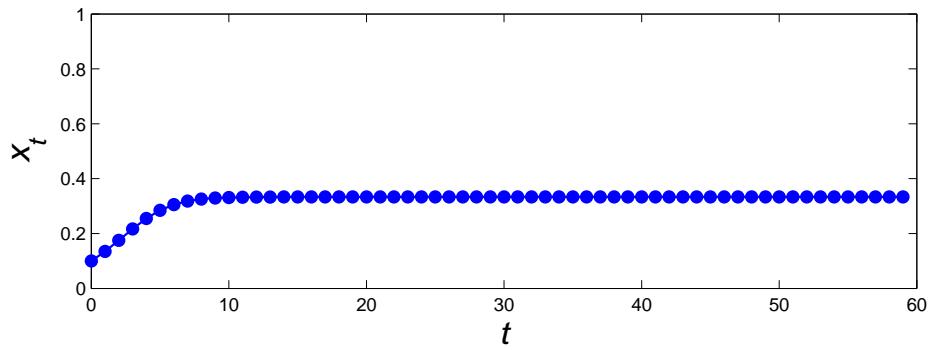
ロジスティック写像と図式解法 (3)

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

$$R = 4.0$$



時系列としてみると・・・

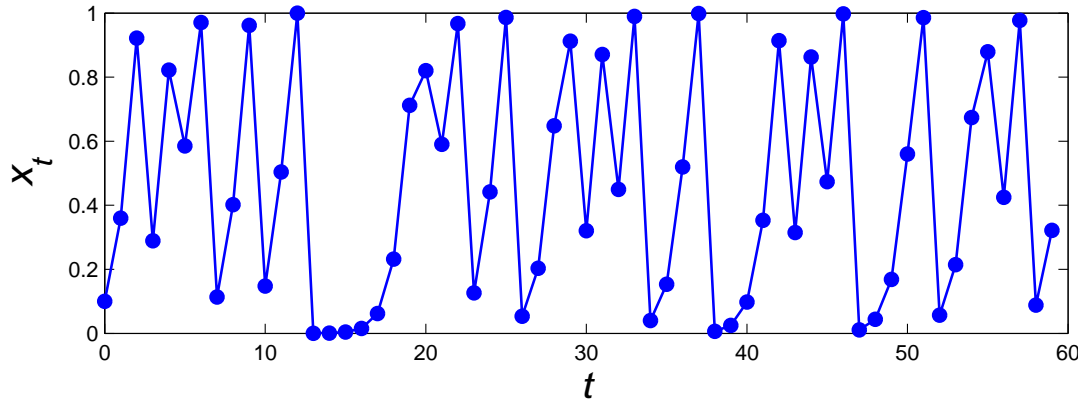


演習問題

1. 線形な差分方程式の振る舞いは，どのように分類することができたか．
2. 非線形な差分方程式の示す振る舞いと，線形な差分方程式の示す振る舞いと
の「違い」は何か．

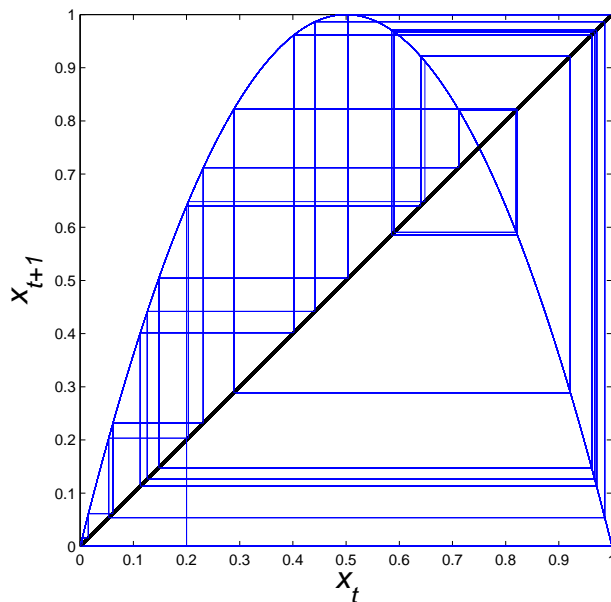
$R = 4$ としたときの振る舞い

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t) = 4x_t(1 - x_t)$$

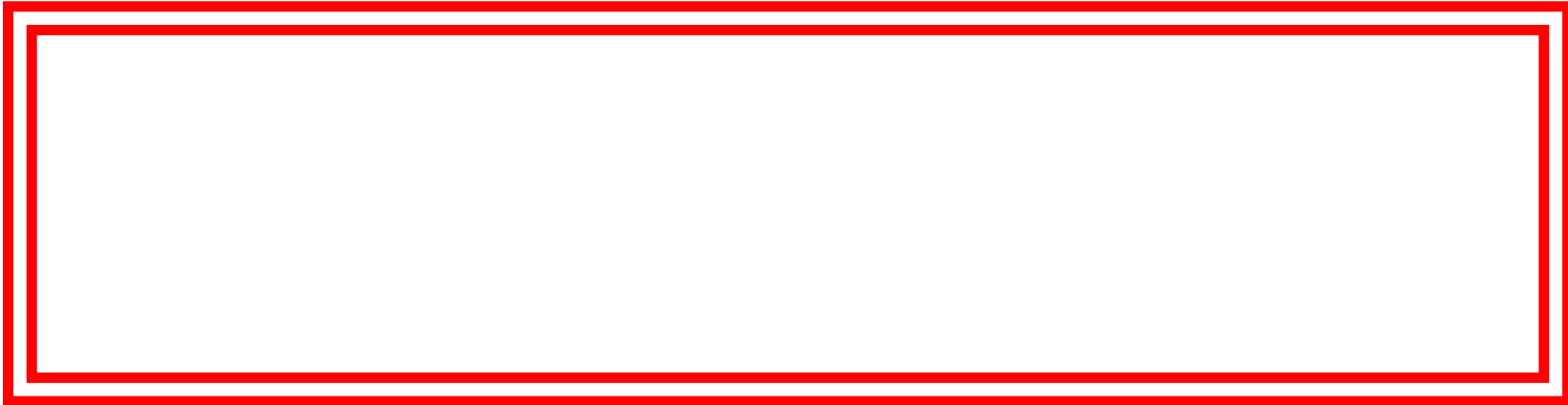


どのような振る舞い?

- irregular oscillation
- not exponential growth or decay
- nor a steady state



振る舞いとしては …



のではあるが …
それを調べる前に以下を考えよう

- ある値に とその
- いくつかの値を繰り返す とその