非線形システム概論 2006

固定点・周期解と安定性(続き)／カオスとは？決定論と確率論

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門

338–8570 **さいたま市 桜区 下大久保** 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@nls.ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

カオスの“定義”

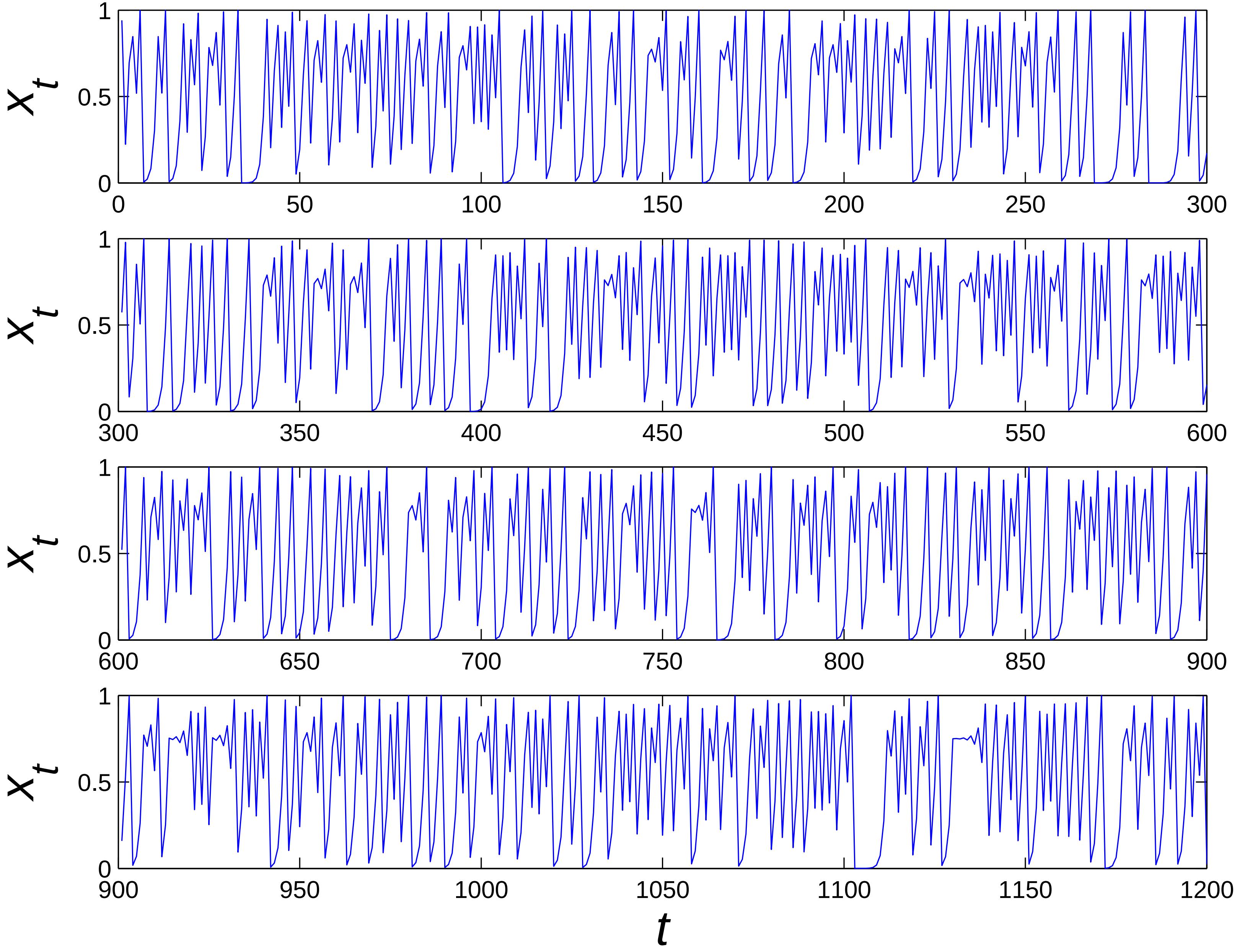
- Aperiodic

- Bounded

- Deterministic

- Sensitive Dependence on Initial Conditions

非周期性，有界性



x_t
1
0.5
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
550
600
650
700
750
800
850
900
950
1000
1050
1100
1150
1200
t

決定論的

$$x_{t+1} = f(x_t) = 4x_t(1 - x_t)$$

- ❑ $t = 0$ での値 x_0 (初期値) から x_1 を　決定できる
  確率的な要素は　.
- ❑ $t = 1$ での値 x_1 から x_2 を決定できる
- ❑ この過程は，次々と繰り返される．つまり，

初期値が与えられると，未来永劫，全てが決定される	⟷	「　に従う」

⟶ 　な現象も再現できる!!

確率的 (非決定論的) な法則とは?

- さいころ投げ
- コイントス，etc

■■■■■■■■■■■■■■■■■■ ⋯
□□□□□□□□□□□□□□□□□□ ⋯
■□■□■□■□■□■□■□■□■□ ⋯
■□□■□□■□□■□□■□□■□□ ⋯
⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯
□■□■■■□■■■□□□■■■□□ ⋯
□■□□□■□□■■■■■□□□■□ ⋯
■□■□■□■□■■■■□□■□□■ ⋯
⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

$\omega_0\ \omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4\ \omega_5\ \omega_6\ \cdots\ \omega_{t-1}\ \omega_t\ \omega_{t+1}\ \cdots \quad \cdots$

$$\omega_i \in \{\,■\ (\text{表}),\ □\ (\text{裏})\}$$

決定論的 → 確率的

ロジスティック写像 $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$ より得られる x_t $(t = 0, 1, 2, \ldots,)$ の系列に対し，

$0 \le x_t \le 0.5$	$\rightarrow$	■ (表)
$0.5 \le x_t \le 1$	$\rightarrow$	□ (裏)

という対応を考えると，コイントス (確率的) を繰り返した系列ができる．つまり，

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots$$

が与えられたら，

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \ldots$$

を作ることができる．

確率的 → 決定論的

驚くべきは，逆のことが成立する!!!

無限記号列

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \ldots$$

を勝手に取ってくる．

↓

すると，勝手に取ってきた無限記号列 (■□のランダムな列) を創り出せるロジスティック写像から生み出された

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots$$

という系列が必ず存在する (つまり，全ての t について $x_t \in \omega_t$ となるような初期値 x_0 が必ずある)．

決定論的なのに確率的なものを作れる!

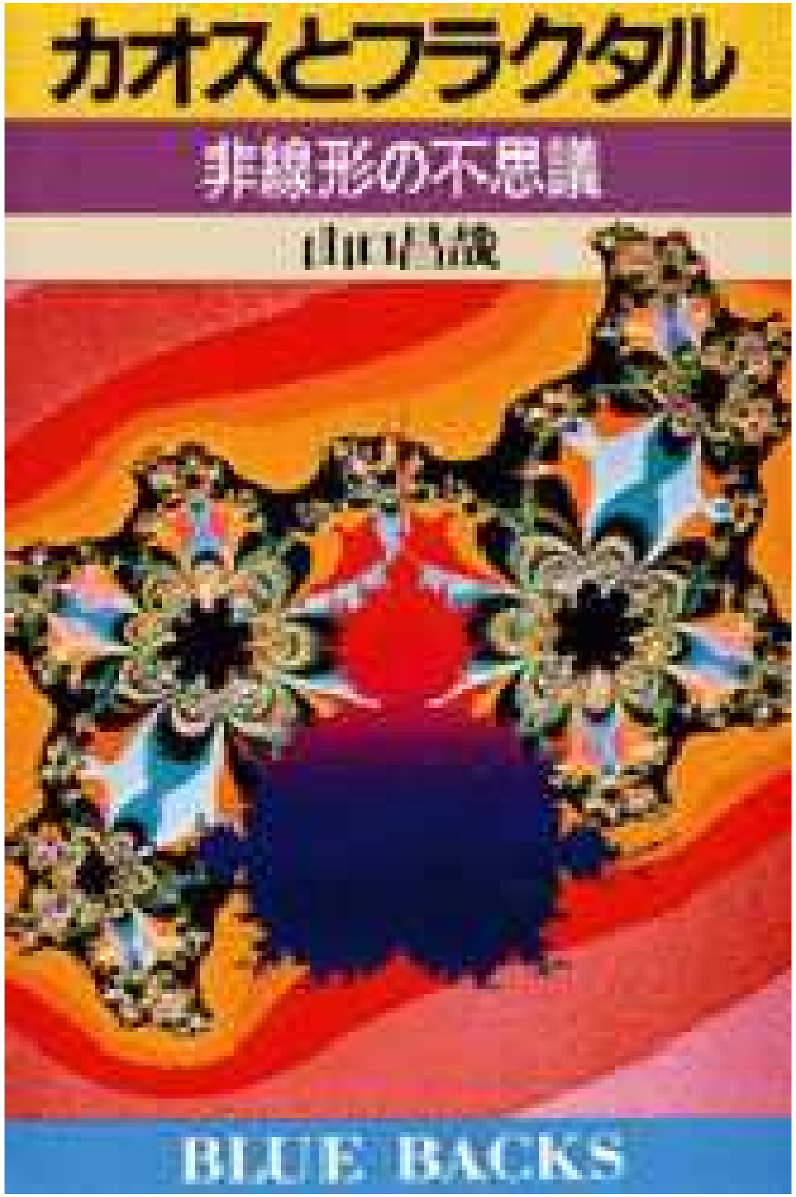
ロジスティック写像より得られる決定論的な系列

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots$$

コイントスより得られる確率的 (非決定論的) な系列

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \ldots$$

証明



山口 昌哉
「カオスとフラクタル
– 非線形の不思議–」
講談社ブルーバックス，
1986．

証明は pp.36–44 **に載っている．**

フォン・ノイマンもカオスを知っていた!

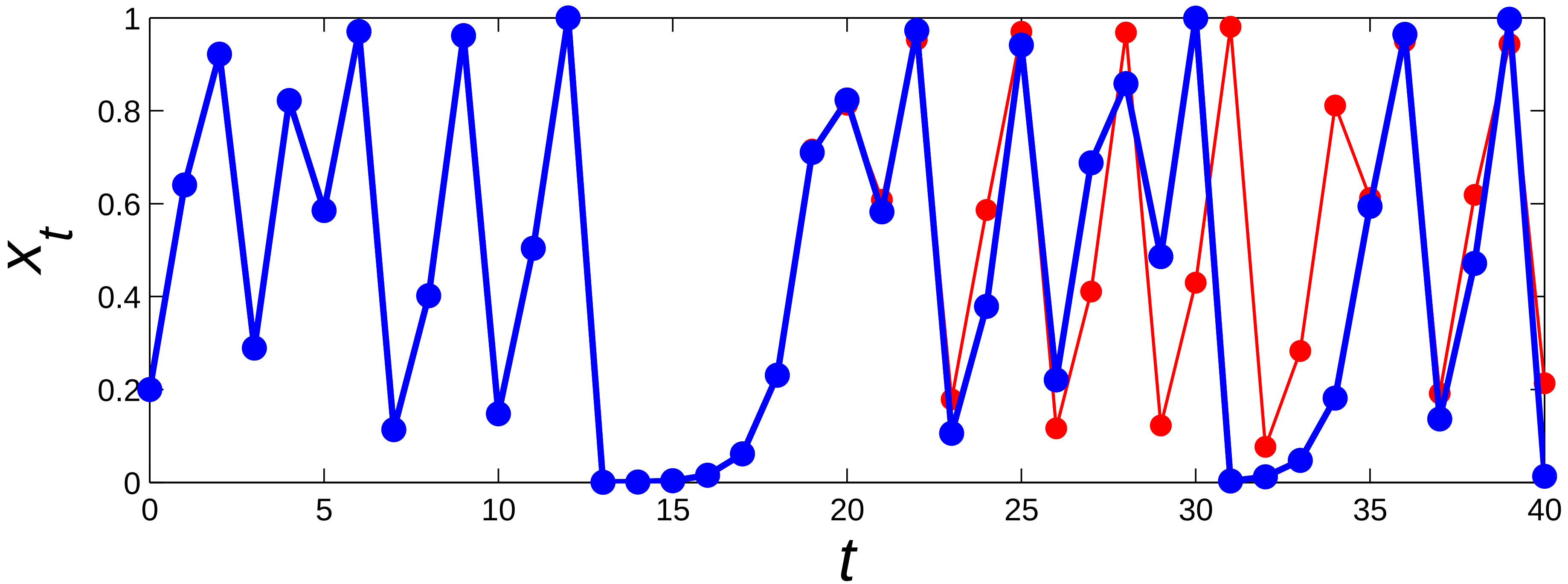
403. S. M. Ulam and John von Neumann: *On combination of stochastic and deterministic processes*. Preliminary report.

A computational procedure for the study of various differential equations—ordinary or partial—is investigated. It consists of a statistical model of the corresponding physical problem and involves a process which is a combination of deterministic and stochastic processes (see Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 51-9-165). This procedure is analogous to the playing of a series of "solitaire" card games and is performed on a computing machine. It requires, among others, the use of "random" numbers with a given distribution. Various distributions of such numbers can, however, be obtained by deterministic processes. For example, starting with almost every x_1 (in the sense of Lebesgue measure) and *iterating* the function $f(x)=4x\cdot(1-x)$ one obtains a sequence of numbers on $(0, 1)$ with a computable algebraic distribution. By playing suitable *games* with numbers "drawn" in this fashion, one can obtain various other distributions, either given explicitly or satisfying given differential or integral equations. (Received September 3, 1947.)

初期値鋭敏依存性

ロジスティック写像 $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$

$$x_0 = \begin{cases} 0.1 \\ 0.1 + 10^{-8} \end{cases}$$



カオスの特徴

ロジスティック写像のような決定論的非線形ダイナミクス

-
-
-

$\Longleftrightarrow$