非線形システム概論 2006
分岐入門／カオスの中の秩序

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門

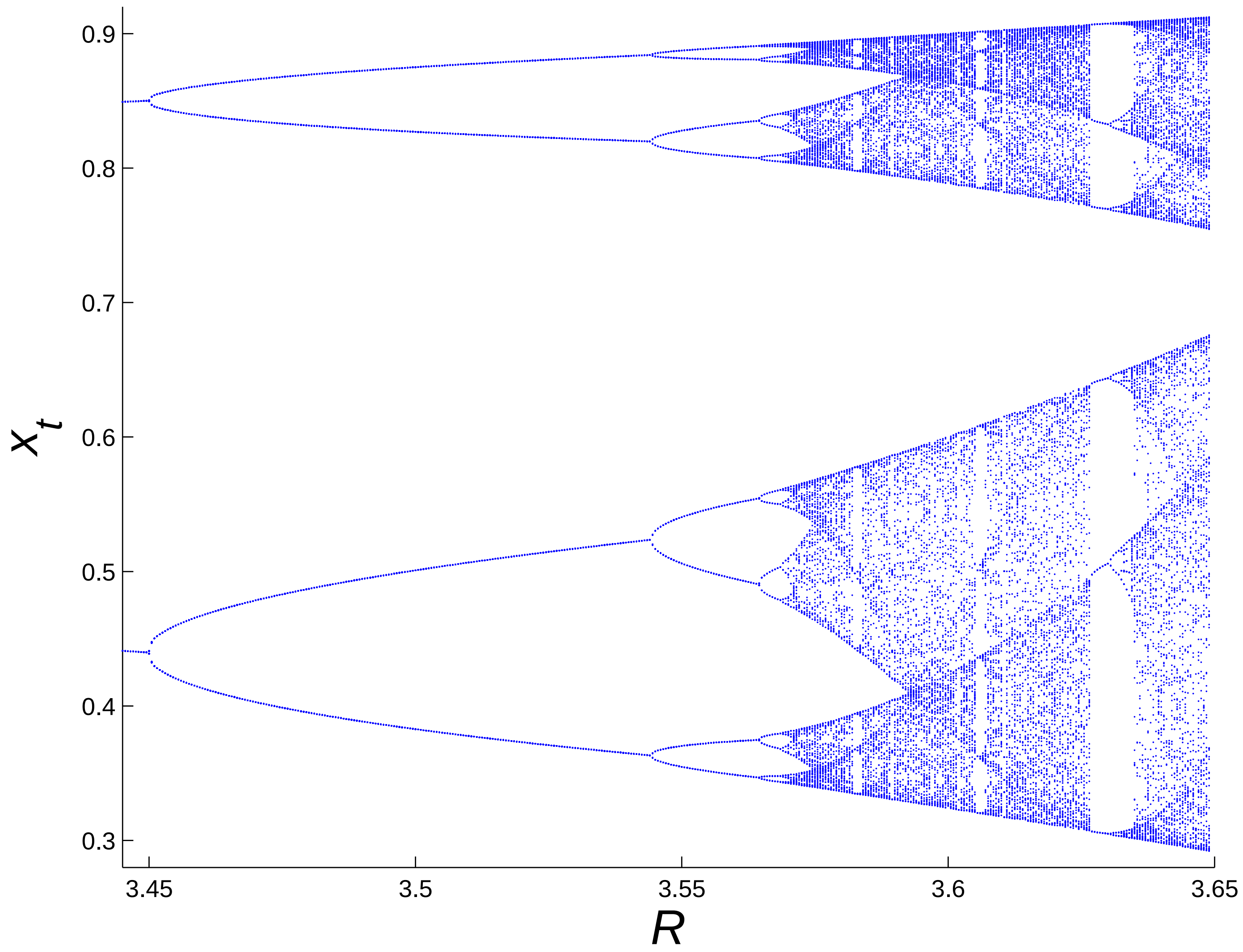
338–8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

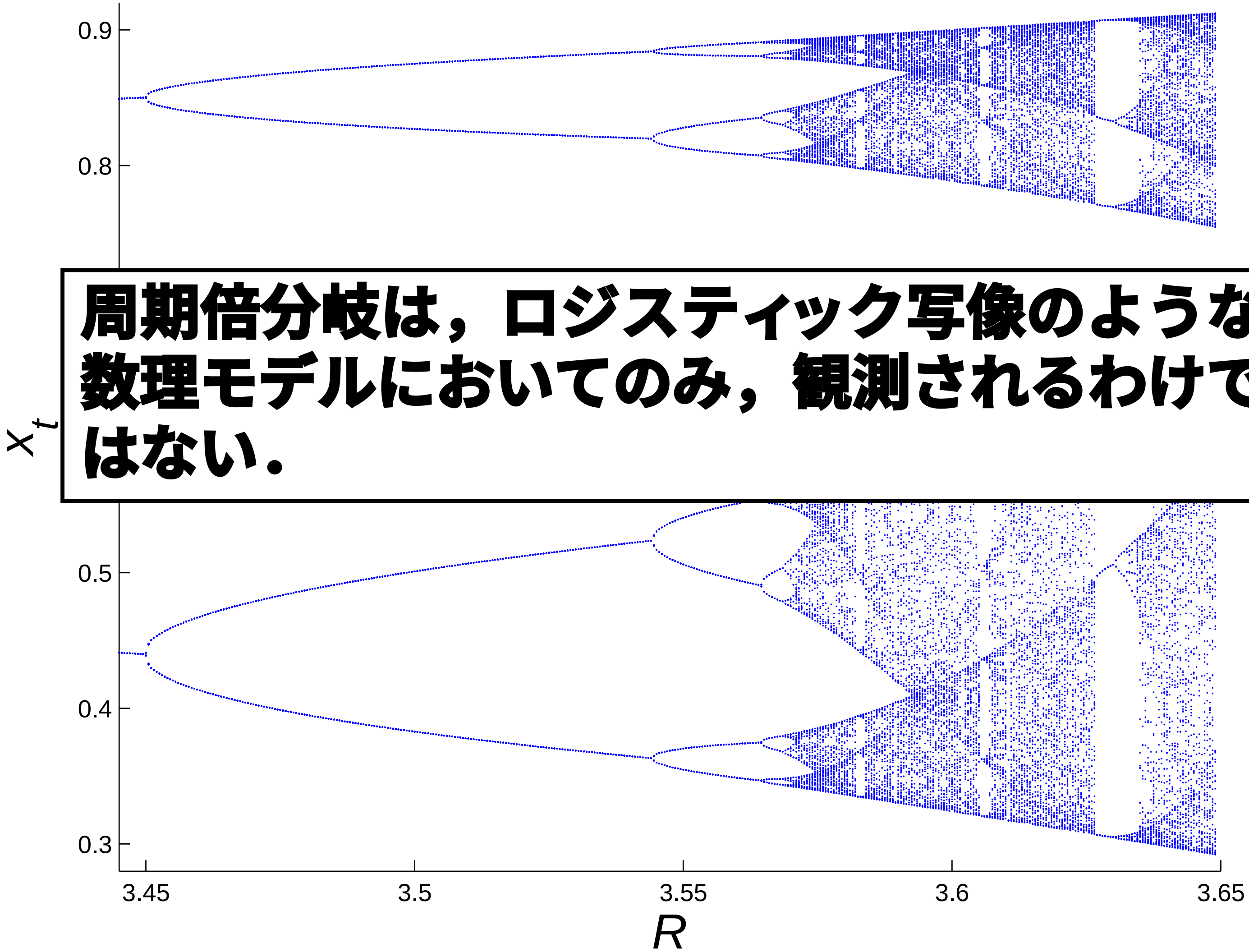
Email : tohru@nls.ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

Period Doubling Bifurcation

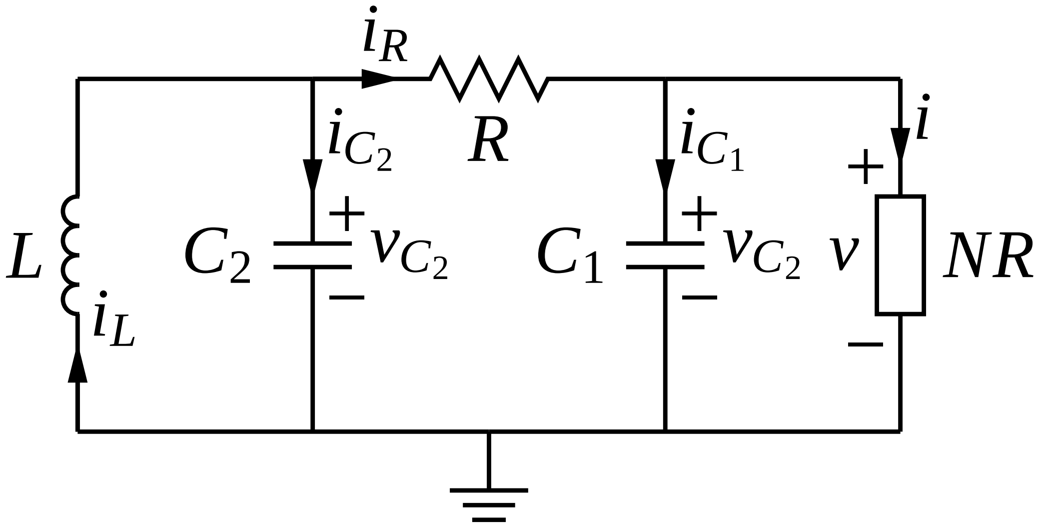


Period Doubling Bifurcation



周期倍分岐は，ロジスティック写像のような数理モデルにおいてのみ，観測されるわけではない．

Chua 回路



$$
\begin{cases}
C_1 \dfrac{dv_{c_1}}{dt} & = & G(v_{c_2} - v_{c_1}) - g(v_{c_1}) \\
C_2 \dfrac{dv_{c_2}}{dt} & = & G(v_{c_1} - v_{c_2}) + i_L \\
L \dfrac{di_L}{dt} & = & -v_{c_2}
\end{cases}
$$

但し， $i = g(v) = m_0 v + \dfrac{1}{2}(m_1 - m_0)|v + B_p| + \dfrac{1}{2}(m_0 - m_1)|v - B_p|$

$i - g(v)$ 特性

$$i = g(v) = m_0 v + \frac{1}{2}(m_1 - m_0)|v + B_p| + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)|v - B_p|$$

1. $B_p \leq v \ (v - B_p \geq 0)$

$$\begin{aligned} g(v) &= m_0 v + \tfrac{1}{2}(m_1 - m_0)(v + B_p) + \tfrac{1}{2}(m_0 - m_1)(v - B_p) \\ &= m_0 v + (m_1 - m_0) B_p \end{aligned}$$

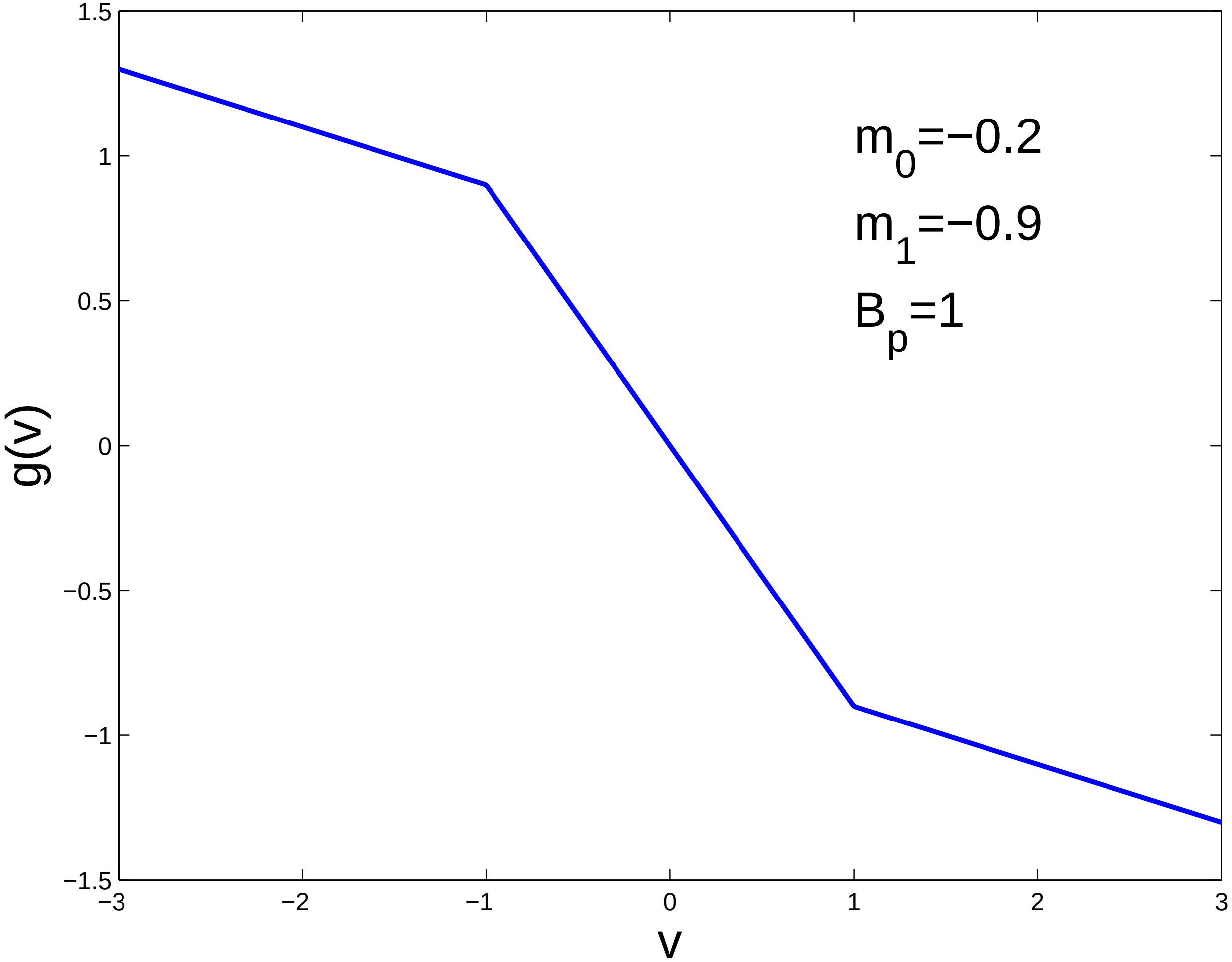
2. $-B_p \leq v \leq B_p (v - B_p \leq 0, v + B_p \geq 0)$

$$\begin{aligned} g(v) &= m_0 v + \tfrac{1}{2}(m_1 - m_0)(v + B_p) - \tfrac{1}{2}(m_0 - m_1)(v - B_p) \\ &= m_0 v + (m_1 - m_0) v = m_1 v \end{aligned}$$

3. $v \leq -B_p \quad (v + B_p \leq 0) - B_p \leq v \leq B_p$

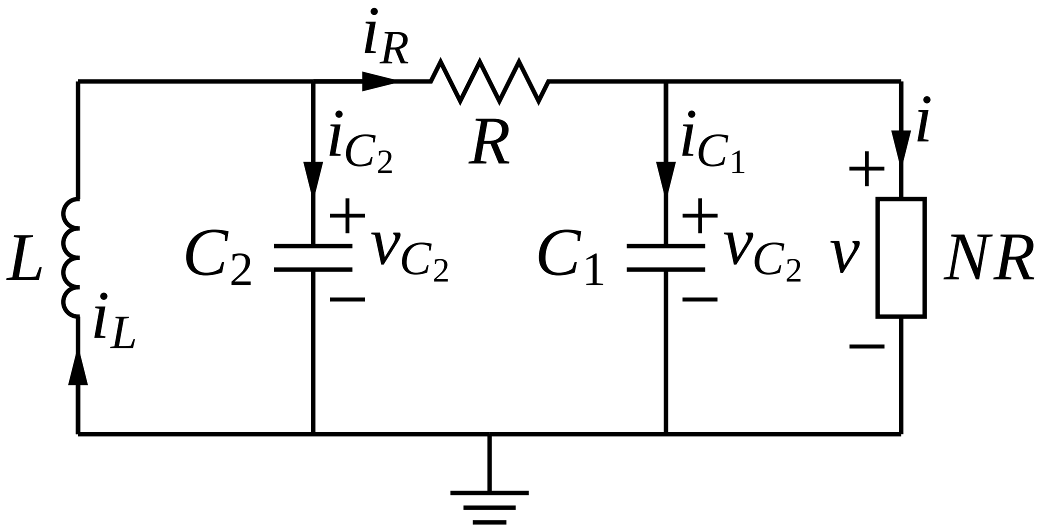
$$\begin{aligned} g(v) &= m_0 v - \tfrac{1}{2}(m_1 - m_0)(v + B_p) - \tfrac{1}{2}(m_0 - m_1)(v - B_p) \\ &= m_0 v - (m_1 - m_0) B_p \end{aligned}$$

$i - g(v)$ 特性



ダブル・スクロール

- **松本隆** (**早稲田大学**)**，**Leon Chua (UC Berkeley) **ら**
- Chua **回路** (**非線形抵抗を含む電気回路**) **からら生成されるカオスの一例**



- **カオスへ至るルート** (**周期倍分岐**) **などをオシロスコープで観測可能**

✌ **デモンストレーションを見てみよう．**

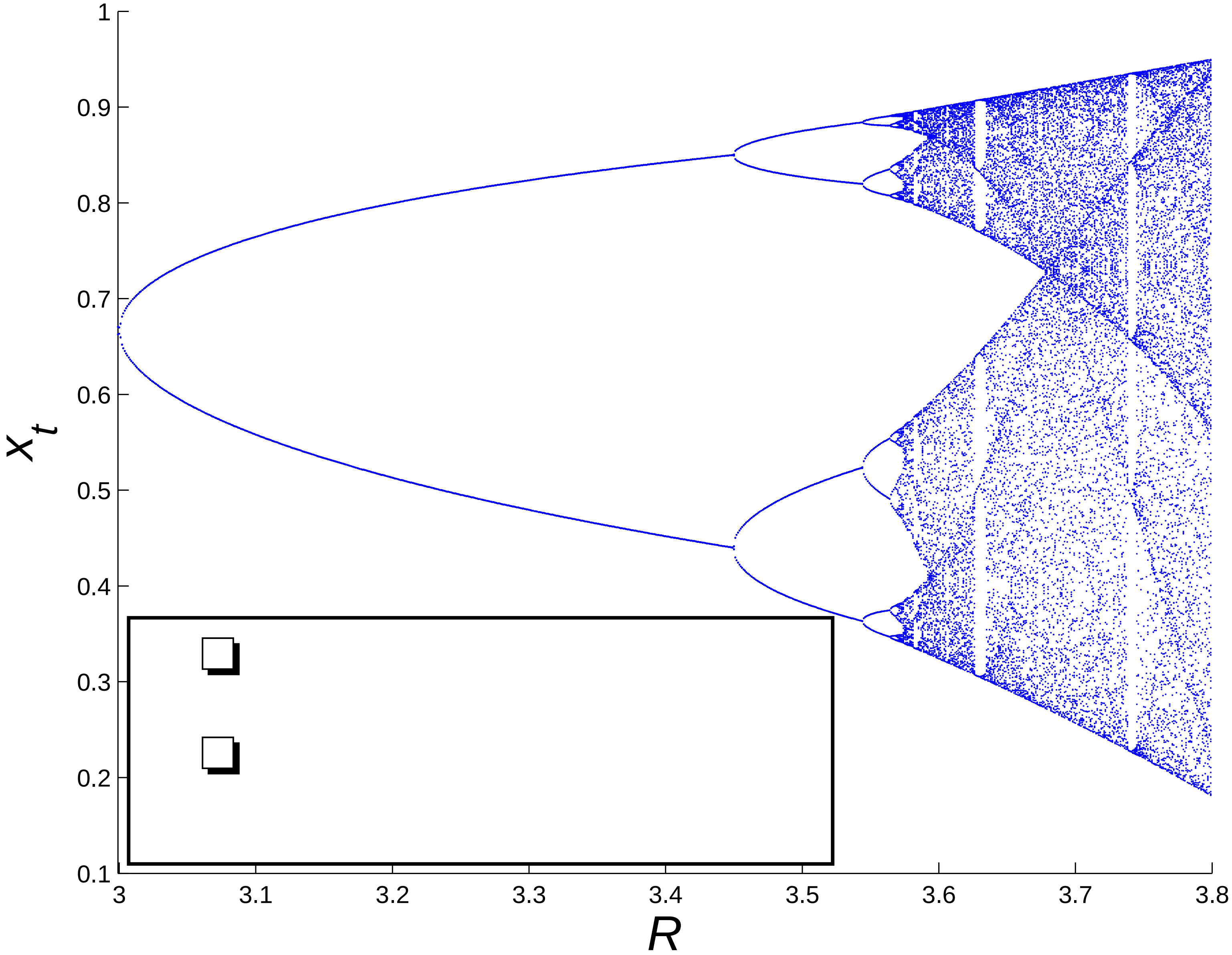
演習

- ❑ 固定点 (1 周期解) から 2 周期解へと分岐する点は，$R = 3$ であった．
- ❑ 2 周期解から周期 4 へと分岐する R の値を求めなさい．

☞ ヒント

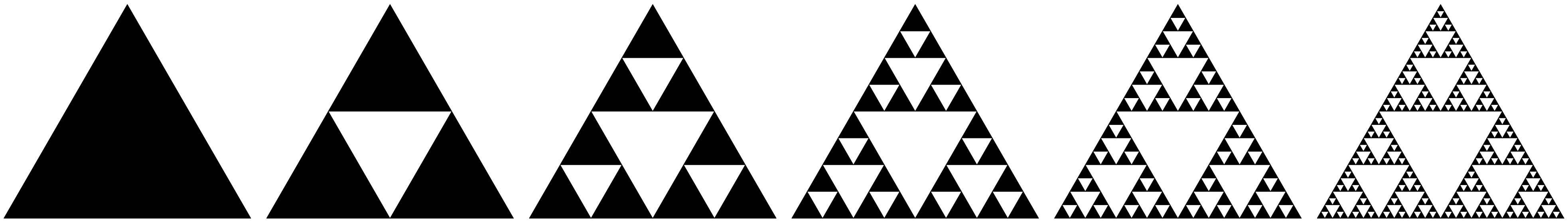
- まずは，2 周期解 (これらを q_1, q_2 とする) を求めよう．
- 2 周期解から 4 周期解への分岐では，2 周期解 q_1, q_2 が不安定化し，q_1 の回りに安定な点が 2 つ，q_1 の回りに安定な点が 2 つ，合計 4 つの安定な点 (これらが 4 周期解に対応) が表れている．
- そこで，2 回写像に関する q_1, q_2 の安定性を議論すれば良い．つまり $\left(f^2\right)'(q_1)$ と $\left(f^2\right)'(q_2)$ を計算し，R の関数として表せば良い．その際，
  ☆ 合成関数の微分則 (チェインルール)
  ☆ 2 次方程式の解と係数の関係
  をつかうと計算が楽になる．

Order within Chaos

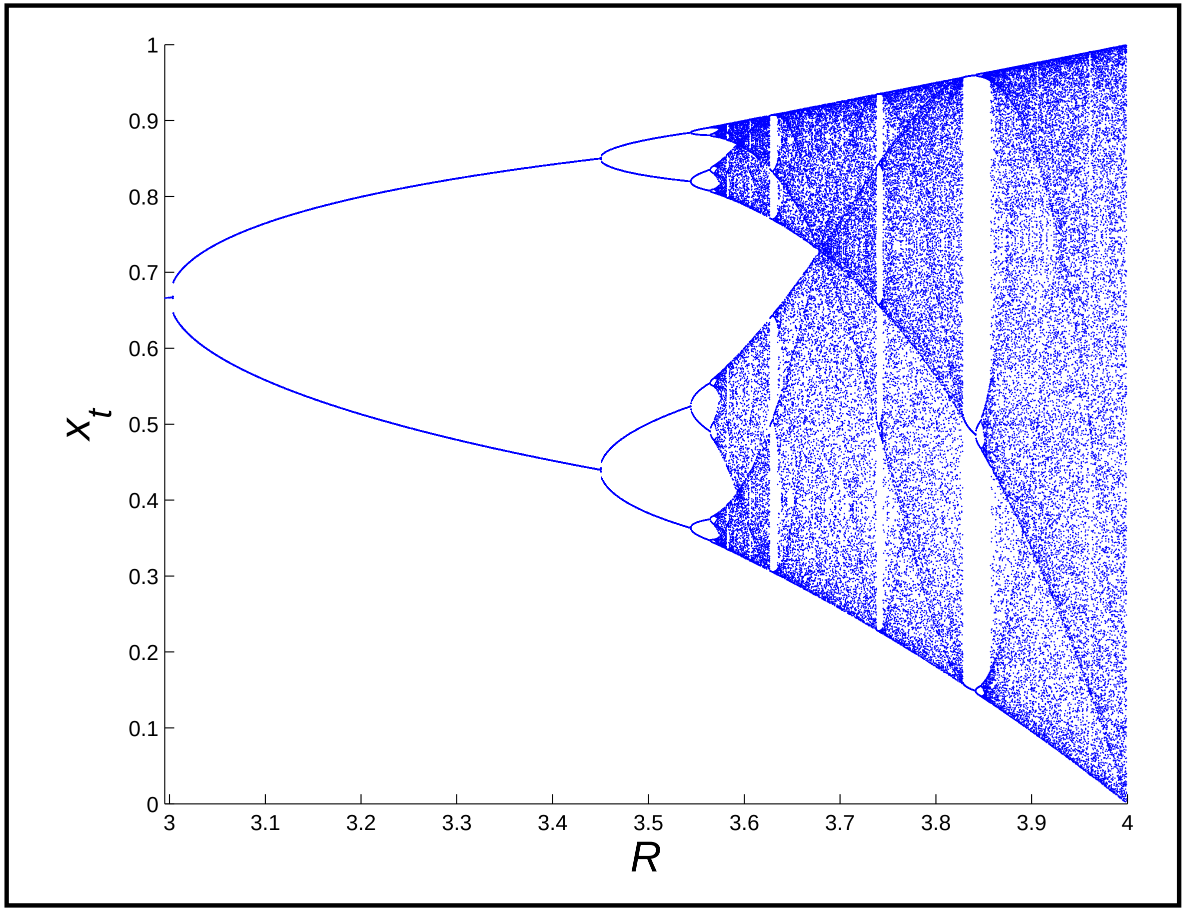


フラクタルとは？

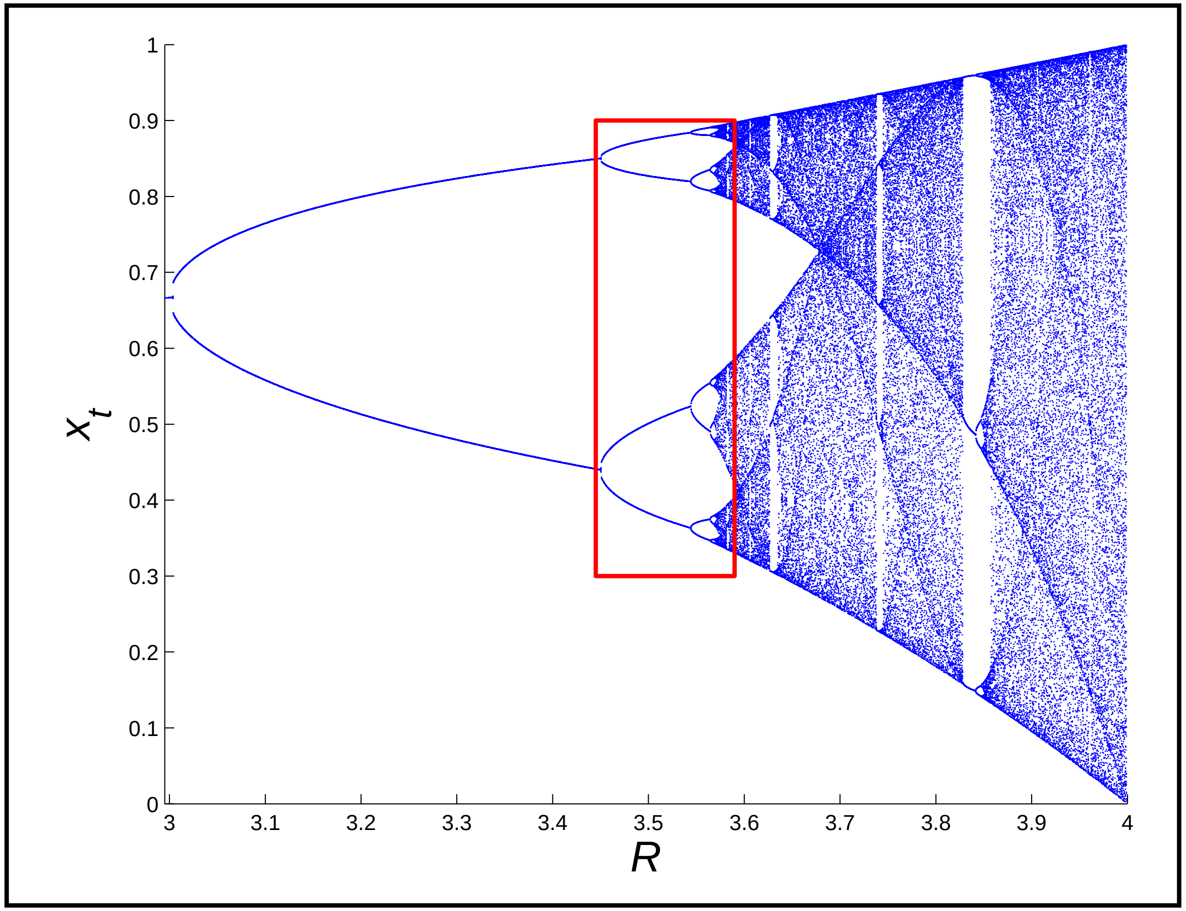
- 図形 (集合) の一部分を拡大すると，その図形と　　　　　　　が現れる
- 語源
  - Fractal – Benoit Mandelbrot, 1975
  - ラテン語の動詞 frangere → fractus
- ニュートン的図形観 (　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　) とは異なる考え ⇒ 要素に



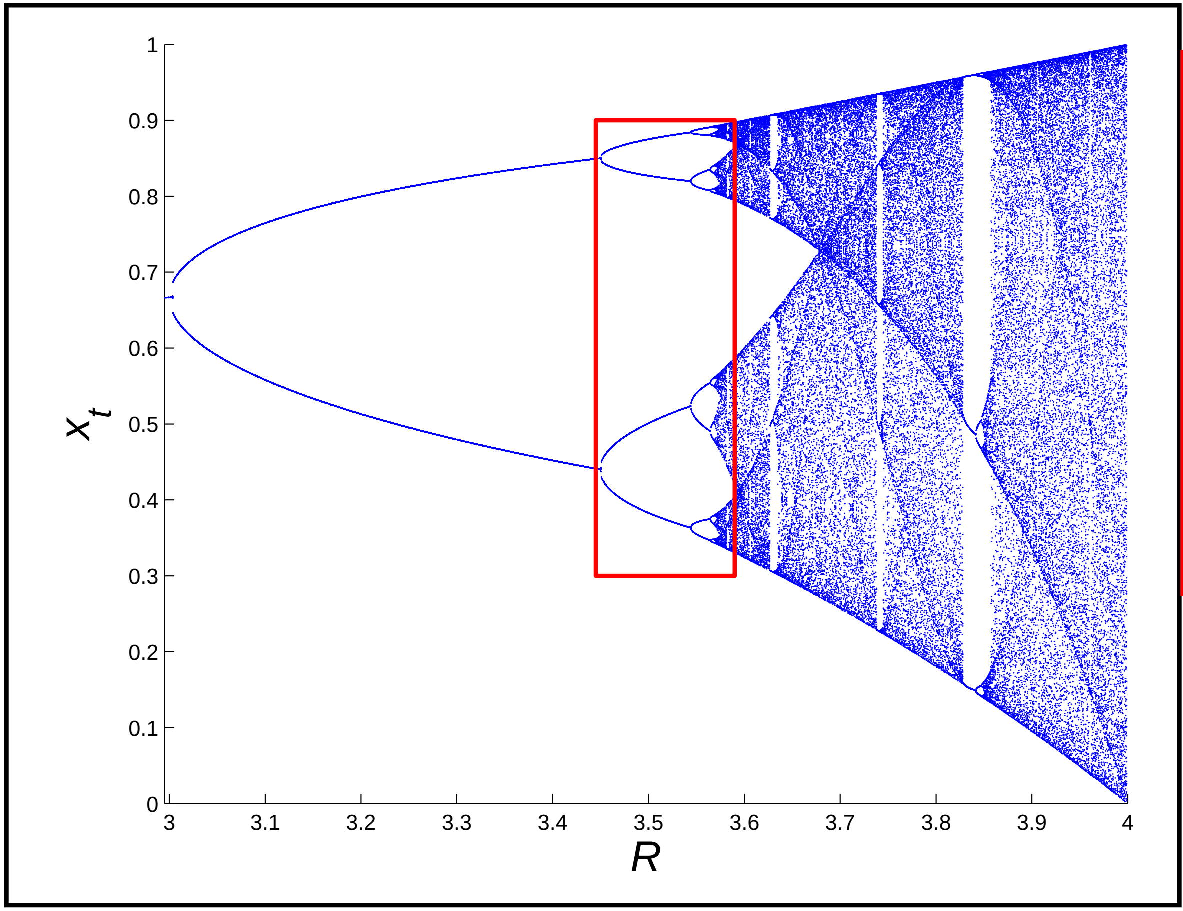
分岐におけるフラクタル性

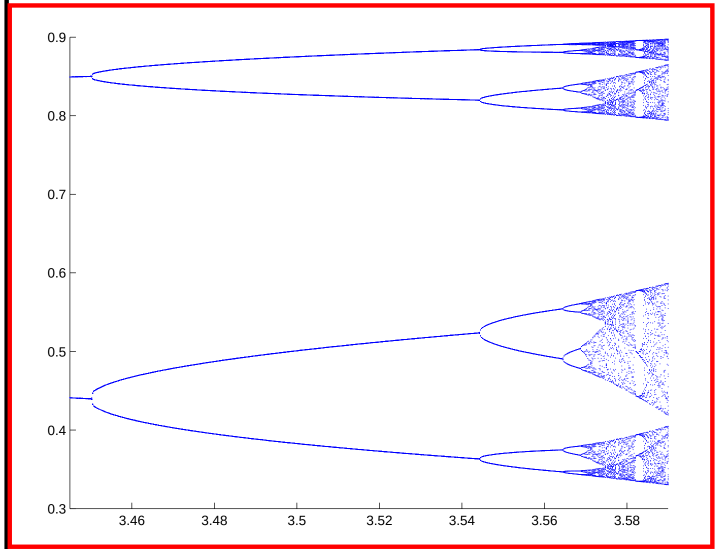


分岐におけるフラクタル性

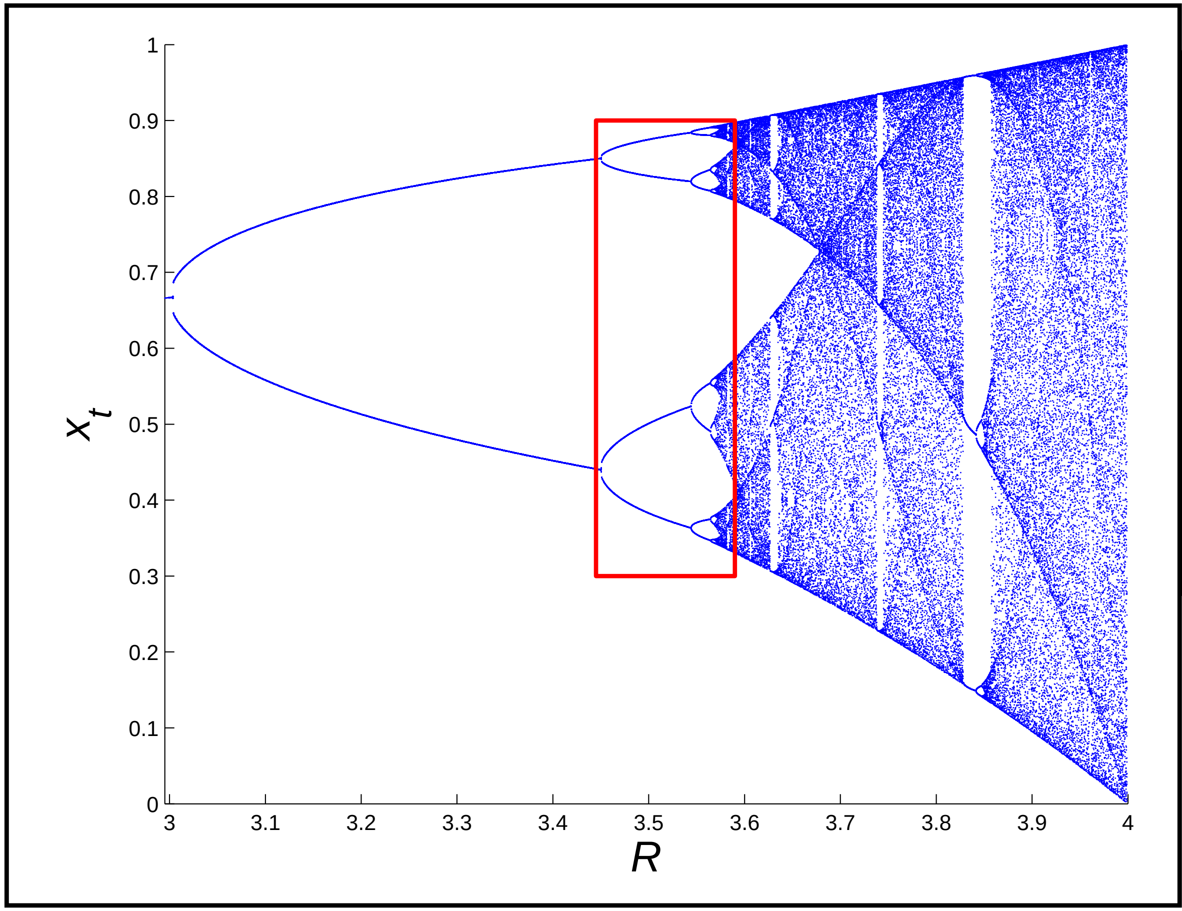


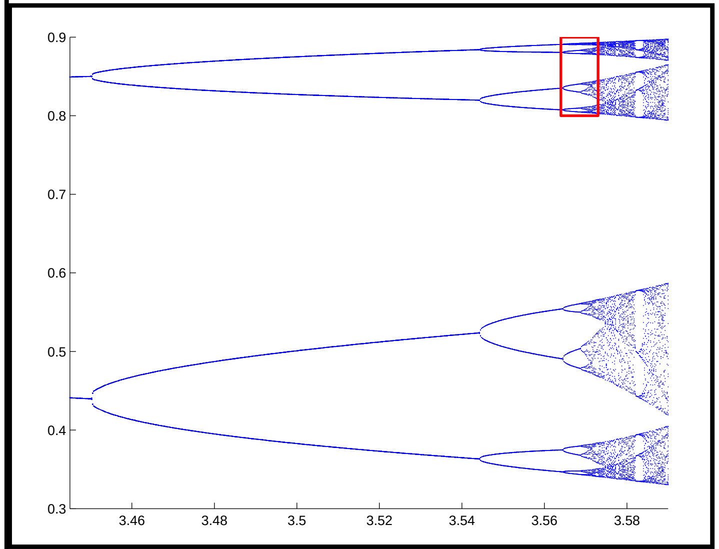
分岐におけるフラクタル性



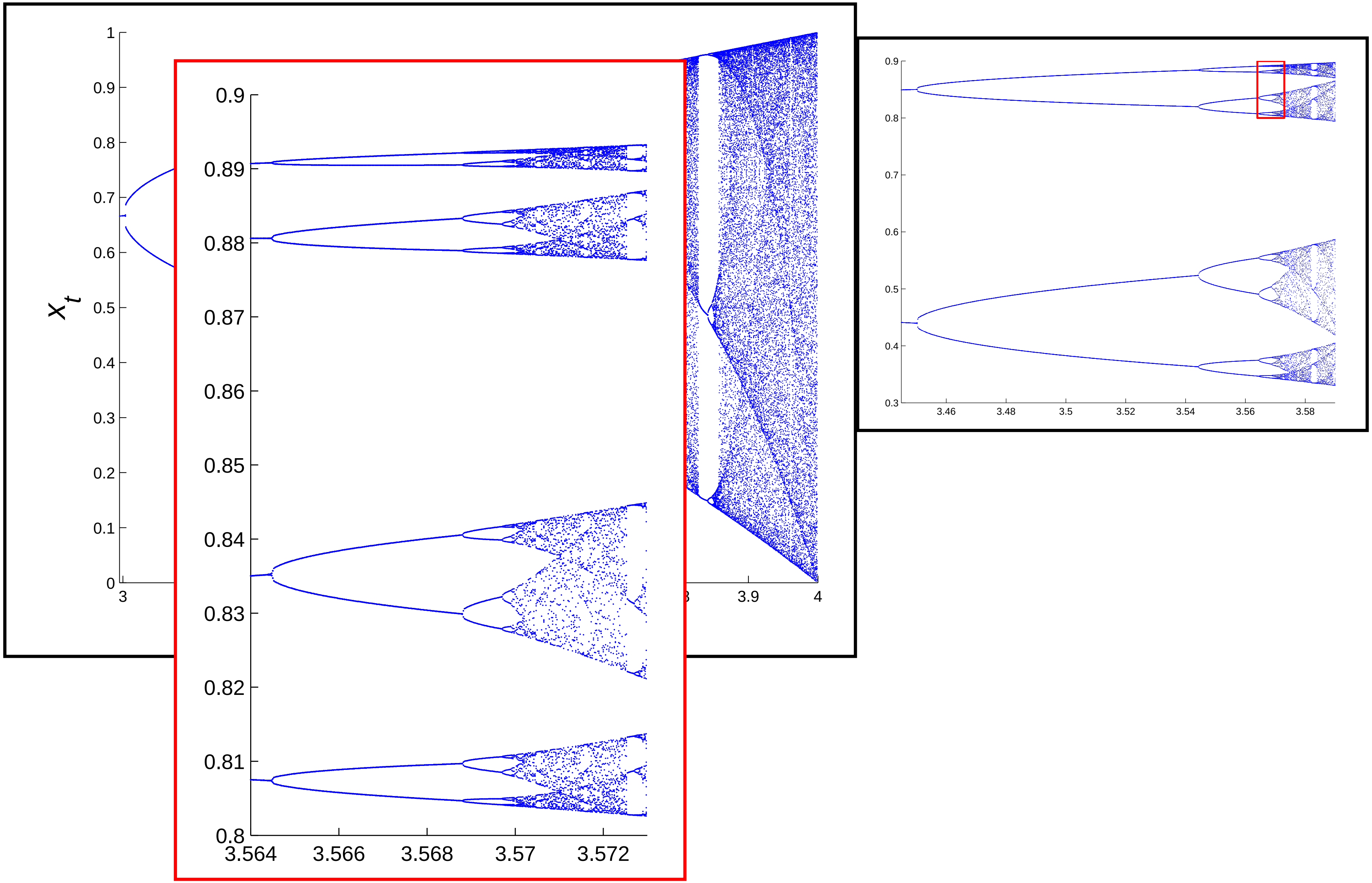


分岐図におけるフラクタル性

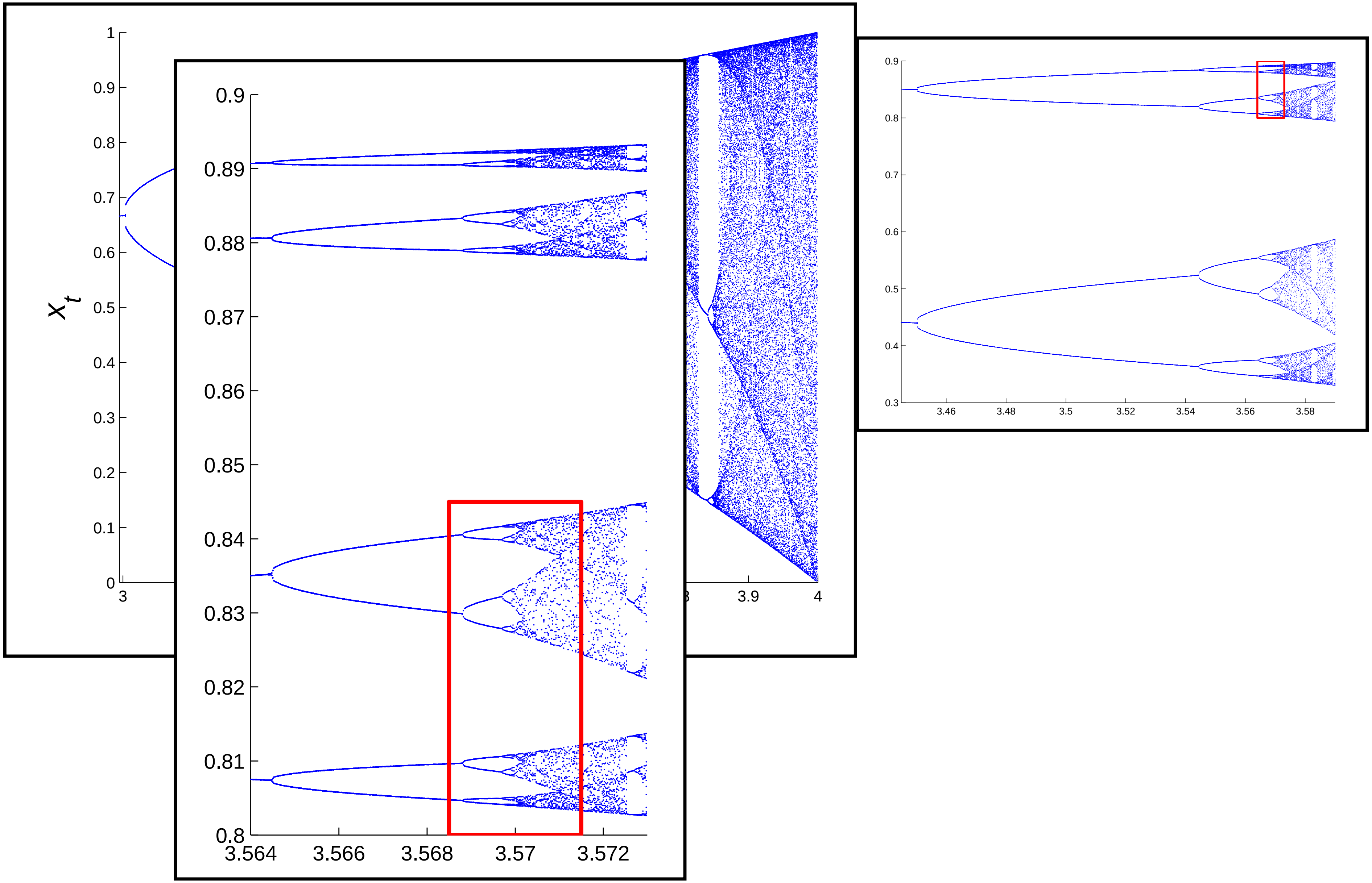




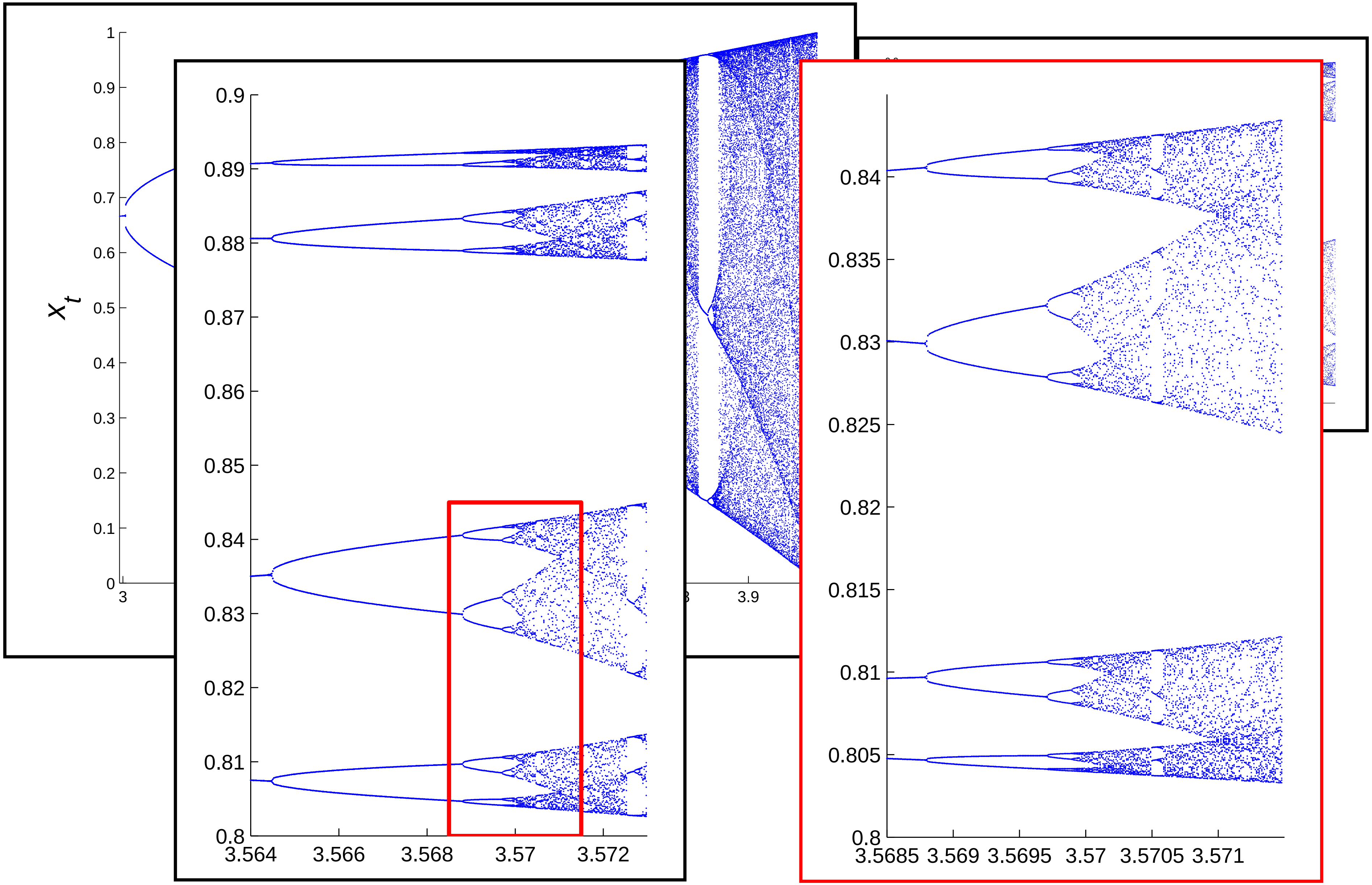
分岐におけるフラクタル性



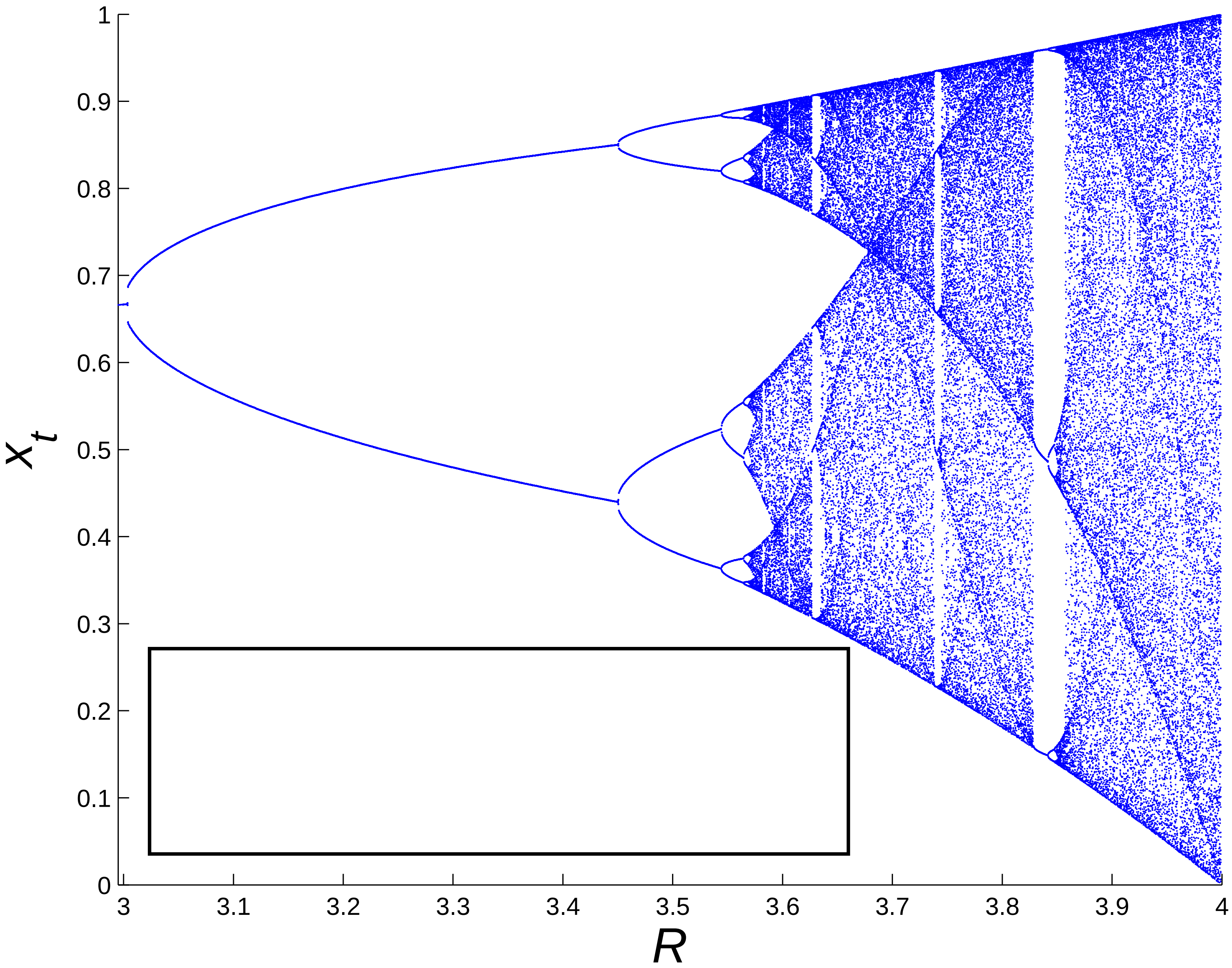
分岐におけるフラクタル性



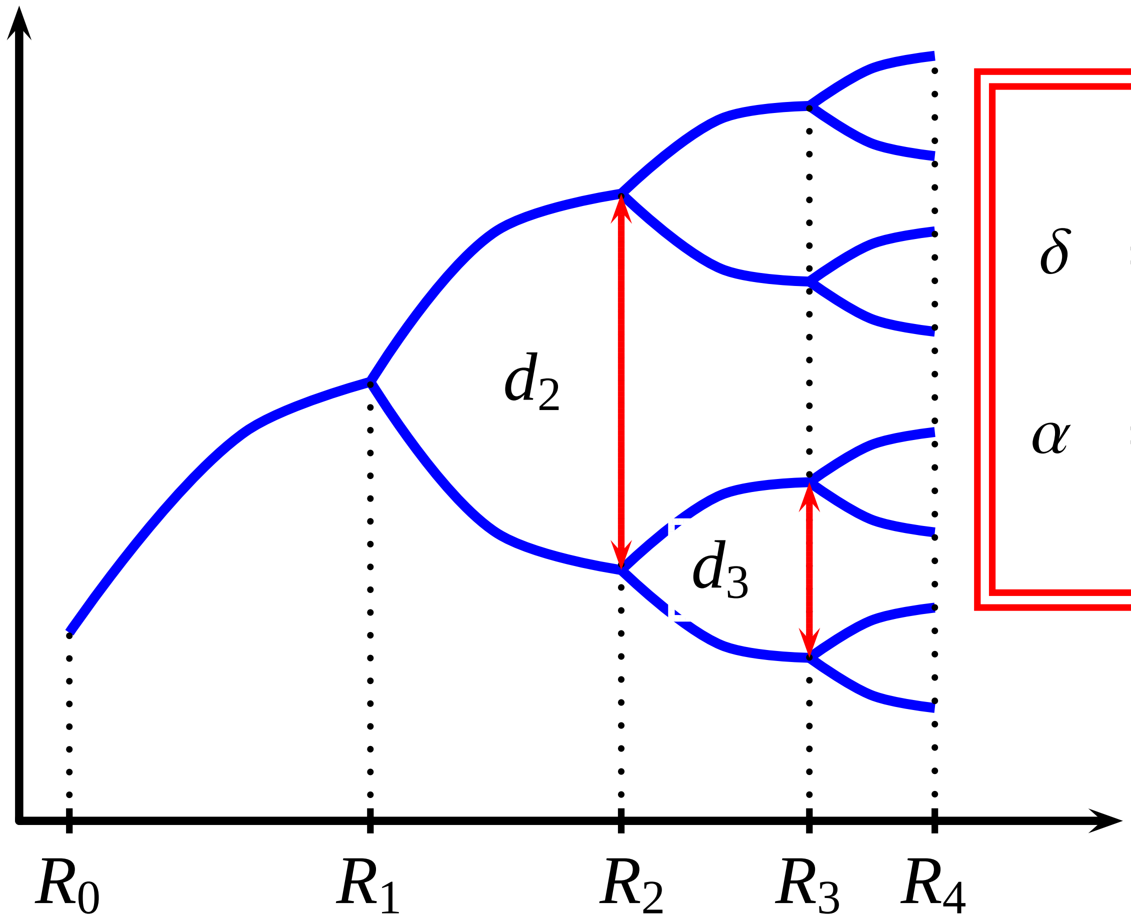
分岐におけるフラクタル性



ファイゲンバウム (の普遍) 定数



ファイゲンバウム (の普遍) 定数



$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{R_n - R_{n-1}}{R_{n+1} - R_n} = 4.669\ldots$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = 2.5029\ldots$$

ファイゲンバウム (の普遍) 定数

なぜこれが人々を驚かせたか?

1 **次元写像についての条件**

1.

2.

3.

参考資料紹介

❑ 早間 慧, (改訂増補) カオス力学の基礎，現代数学社，