非線形システム概論 2005

フラクタルの基礎

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門

338–8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

↓

一部分を拡大すると，
自分自身と同じ構造が現れる

雲

雲の写真の拡大

植物

植物

植物 の写真の拡大

複雑なもの

空に浮かぶ雲，稲妻，雪の結晶
植物，木，枝，葉
海岸線，河川，山の稜線，岩石
血管・肺・脳の構造

一部分を拡大すると，
自分自身と同じ構造が現れる

フラクタル (自己相似) とは

- 図形 (集合) の一部分を拡大すると，その図形と同じ構造が現れる
- 語源
  - Fractal – Benoit Mandelbrot, 1975
  - frangere → fractus ラテン語
- ニュートン的図形観とは異なる
  - 複雑な図形であっても， が現れる

$\Longrightarrow$

今日考えること

- ❑ フラクタルとは何か？その性質は？
  - –　　　　　　　　　　　　　　　　が現れる．
  - –　　　　　　　　　　　　　　　　　　　と言っても良い．
- ❑ 具体的にはどのようなものがあるのか？
  - –
  - –
  - –
  - –
- ❑ フラクタルな図形を特徴づけるには？そのための尺度は？
  - –
- ❑ カオスとフラクタルは関係があるか？
  - –　　　　　　　$\Rightarrow$ $\boxed{}$

フラクタル図形の例

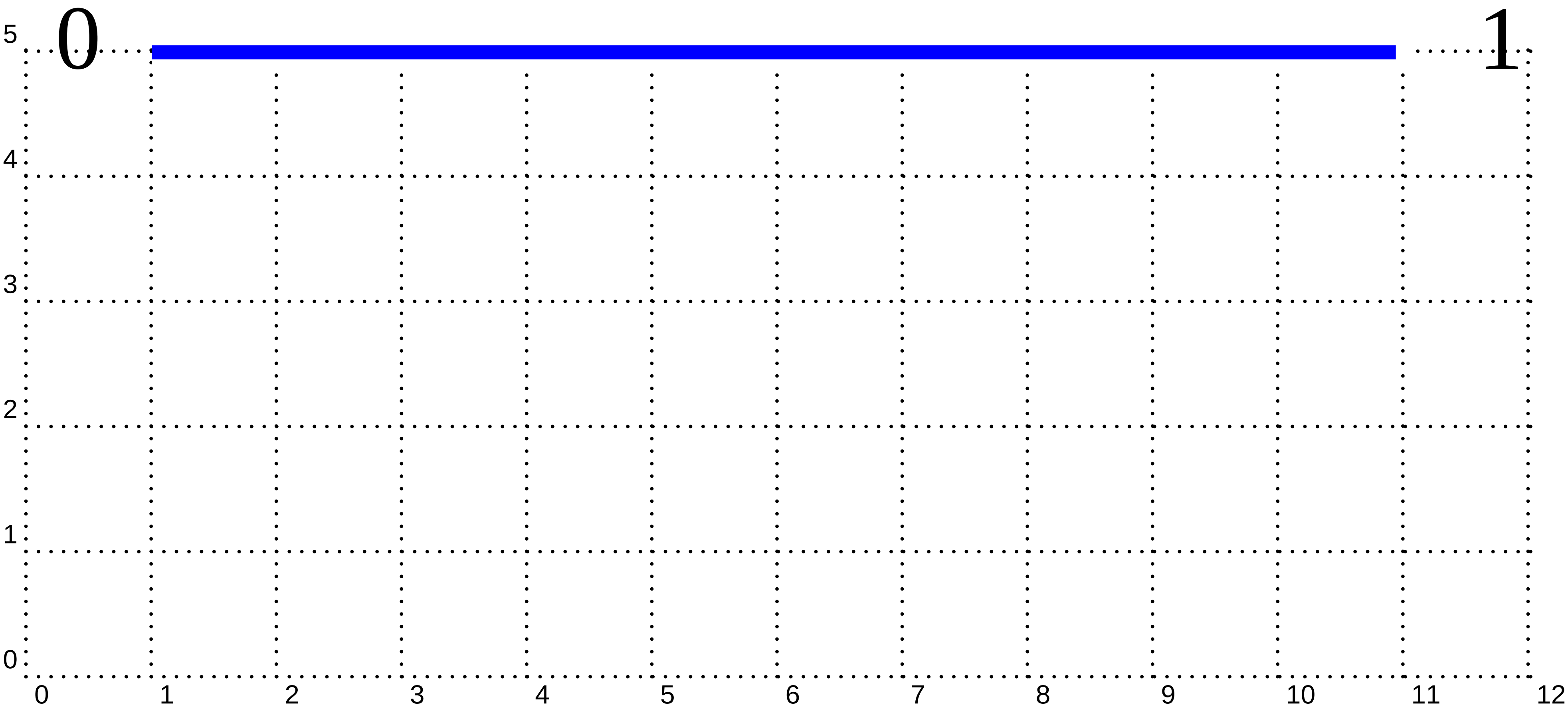
- カントール集合 (Cantor set)
- コッホ曲線 (von Koch curve)
- シェルピンスキーのギャスケット (Sierpiński gasket)
- メンジャースポンジ (Menger Sponge)

以下を考えてみよう

- これらの図形は，どのように作られるか?
  - 元になる図形対して，ある処理を 適用する．
    ☞ ある処理＝
    $\Longrightarrow$ と に着目！
  - プログラミング的な言葉を使えば，
    処理を用いるということ．

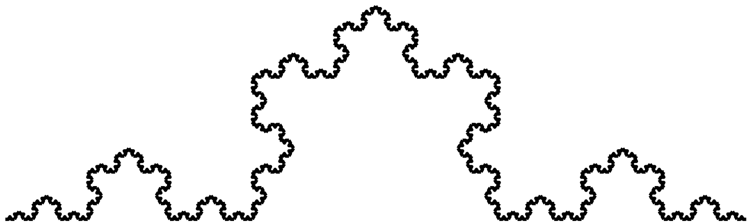
カントール集合

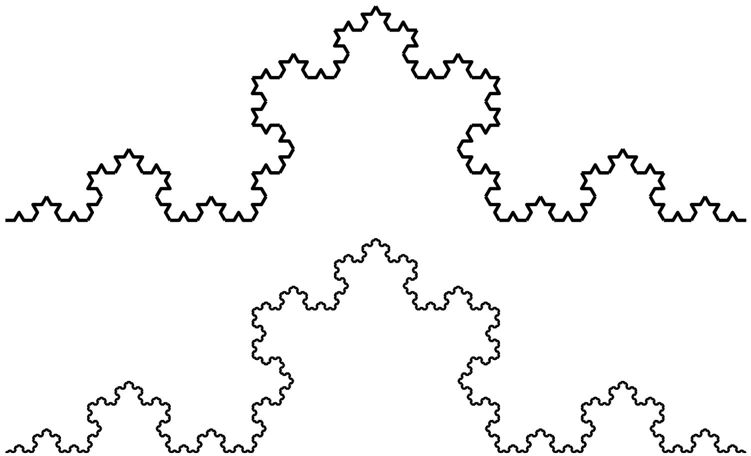
- ❑ 長さ 1 の線分から始める．
- ❑



コッホ曲線

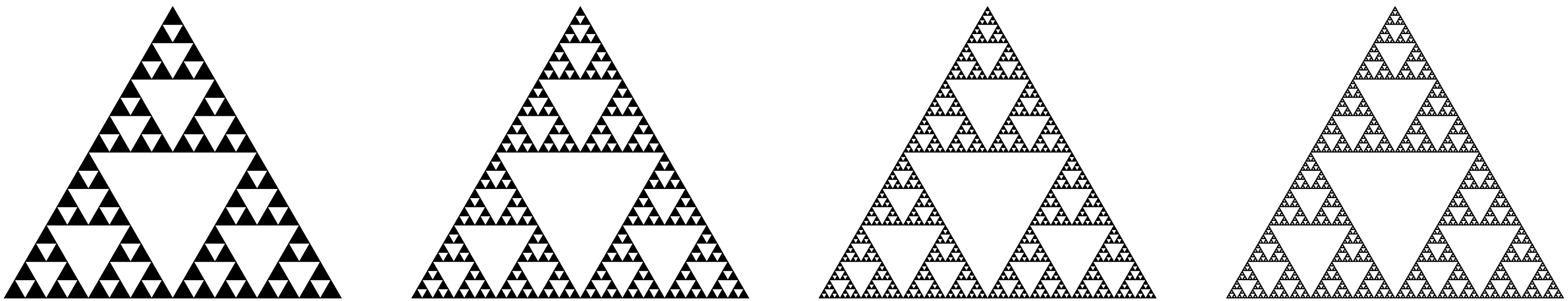
- **長さ** 1 **の線分の中央** [1/3, 2/3] **を山にした帽子形 から始める．**
-
-





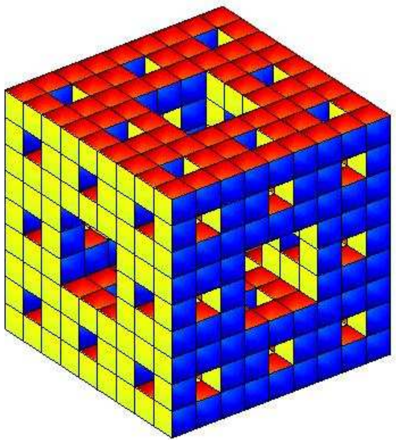
シェルピンスキーのギャスケット

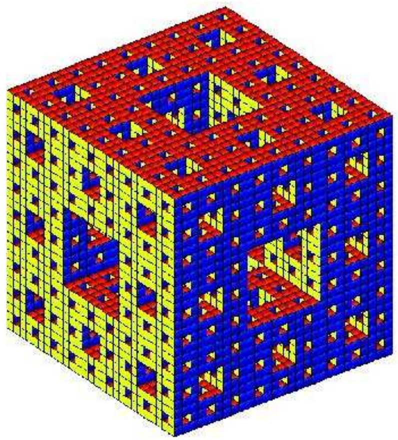
- 正三角形から始める.
-
-



メンジャースポンジ

- 立方体 から始める.
-
-





フラクタル図形の「複雑さ」を測ろう

$\boxed{\text{演習}}$ カントール集合の長さを求めなさい．

初項 a 公比 r の等比数列の和

カントール集合の長さは?

操作を無限回繰り返すと，取り除かれる長さは，

初項　　，公比　　の等比数列の和の極限

つまり，カントール集合の長さは，

カントール集合の長さ

カントール集合の長さが

↓

カントール集合は

↓

直観に反する奇妙な結果...

なぜなら，

- ❑ カントール集合を作るときには，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　ので
  はなく，
- ❑ これは，

$\Longrightarrow$ それでは，カントール集合の　　　　　は？

カントール集合上の点の数 (濃度) は?

- $[0, 1]$ 区間の実数を 3 進法で表現してみよう $\cdots$

$$0.z_1z_2z_3z_4\cdots\text{，但し } z_i = \{0, 1, 2\}$$

10進法で整数を表現する

- 10進法とは?
  整数を $0 \sim 9$ の 10 種類の自然数で表す表現法.

  例 : 0, 2, 4, 7, 32, 128, 2012. . .

- 128 という整数は, 100 が 1 個, 10 が 2 個, 1 が 8 個.

$$
\begin{aligned}
128 &= 100 \times 1 + 10 \times 2 + 1 \times 8 \\
&= 10^2 \times 1 + 10^1 \times 2 + 1 \times 8 \\
&= 10^2 \times 1 + 10^1 \times 2 + 10^0 \times 8
\end{aligned}
$$

10^0 の位

10^1 の位

10^2 の位

2進法で整数を表現する

- 2進法とは，どのような表現法か?

整数を $\boxed{\text{2 種類の自然数}}$ で表す表現法．

0, 1

例：0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, . . .

- 例えば，2進法での $111_{(2)}$ という整数は，

$$111_{(2)} = 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$$

と考えることになる．

2進法での整数の表現

- 2進法での $111_{(2)}$ という整数は，

$$111_{(2)} = 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1$$

2^2 の位

2^1 の位

2^0 の位

- つまり，2進法での $111_{(2)}$ は，

  $2^2 = 4$ が 1 個，$2^1 = 2$ が 1 個，$2^0 = 1$ が 1 個

  ということ．

2進法と10進法の関係

- 2進法での $111_{(2)}$ という整数は，

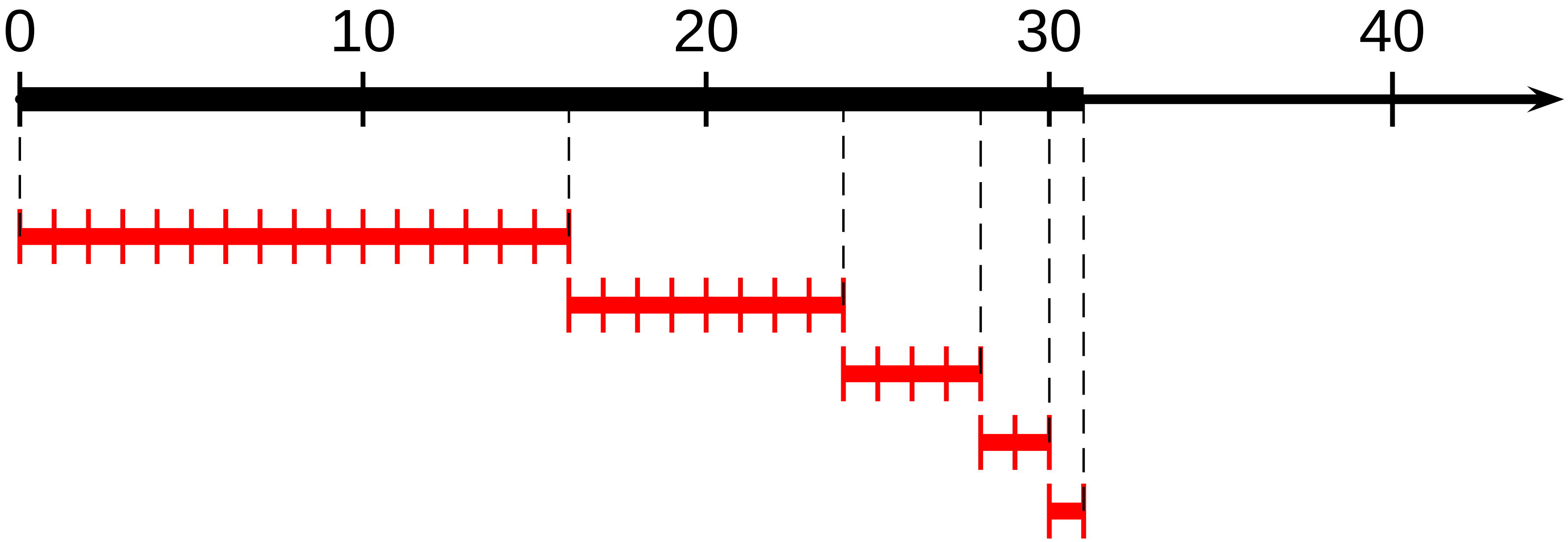
$$111_{(2)} = 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 = 7$$

- 逆に

$$\begin{aligned} 31_{(10)} &= 16 + 8 + 4 + 2 \\ &= 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 1 + 2^0 \times 1 \\ &= 11111_{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60_{(10)} &= 32 + 16 + 8 + 4 \\ &= 2^5 \times 1 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0 \\ &= 111100_{(2)} \end{aligned}$$

10 進法から 2 進法へ



16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31

10進法，2進法

- 10 進法では，ある整数 Z は，

$$
\begin{aligned}
Z &= \ldots D_4 D_3 D_2 D_1 D_0 \\
&= \ldots + 10^4 D_4 + 10^3 D_3 + 10^2 D_2 + 10^1 D_1 + 10^0 D_0 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} 10^i D_i \quad (D_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
\end{aligned}
$$

- 2 進法では，ある整数 Z は，

$$
\begin{aligned}
Z &= \ldots B_4 B_3 B_2 B_1 B_0 \\
&= \ldots + 2^4 B_4 + 2^3 B_3 + 2^2 B_2 + 2^1 B_1 + 2^0 B_0 \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} 2^i B_i \quad (B_i = 0, 1)
\end{aligned}
$$

それでは，3進法は?

- 整数を $\boxed{\text{3 種類の自然数}}$ (0,1,2) で表す表現法．

例 : 0, 1, 120, 211, 222 . . .

- 例えば，3 進法において，$122_{(3)}$ は，

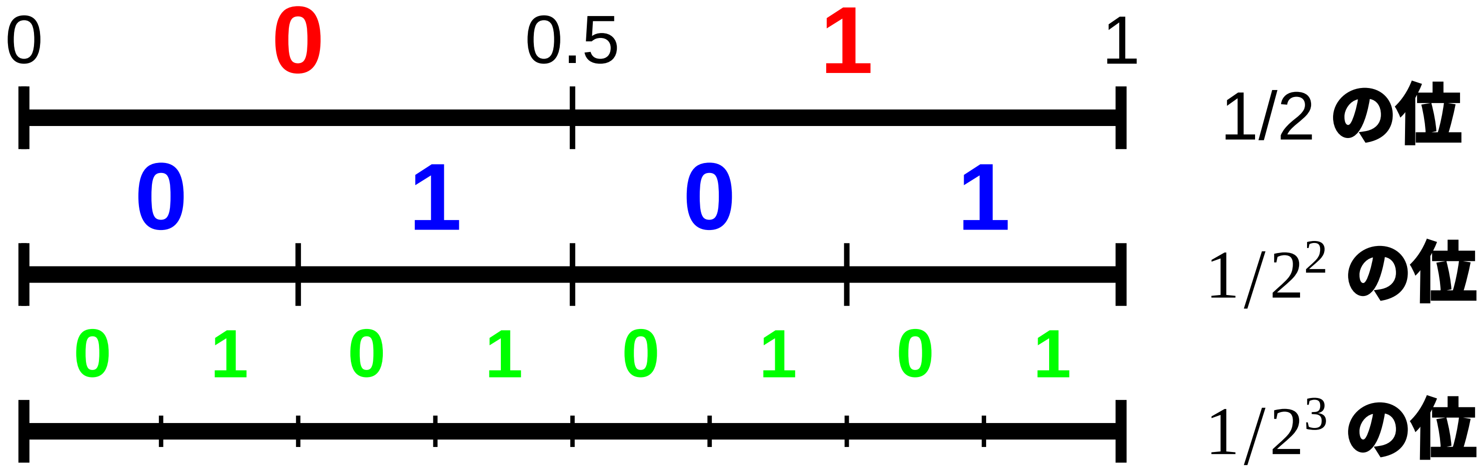
$$122_{(3)} = 3^2 \times 1 + 3^1 \times 2 + 3^0 \times 2 = 17$$

- 一般的に 3 進法において，ある整数 Z は，

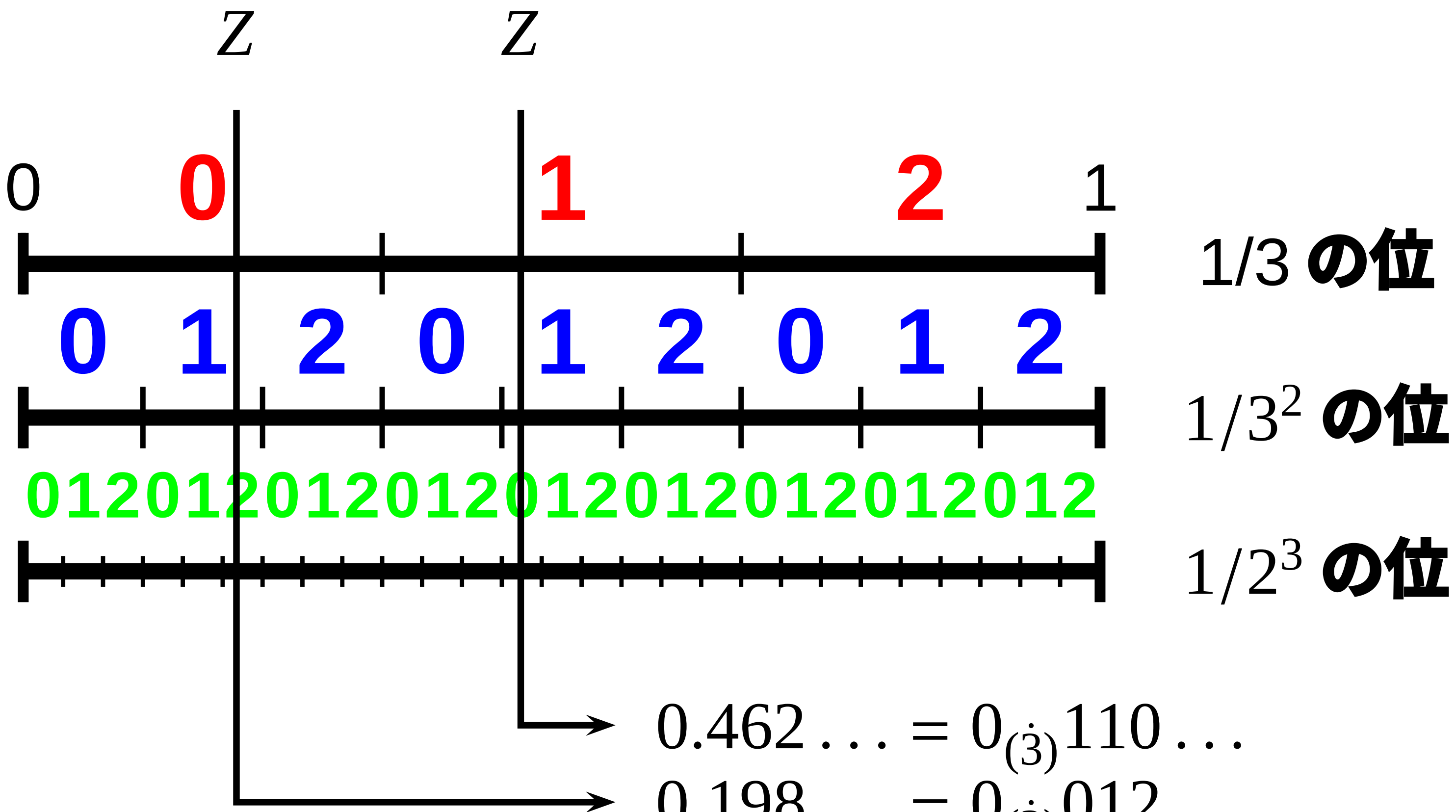
$$\begin{aligned} Z &= \ldots T_4 T_3 T_2 T_1 T_0 \\ &= \ldots + 3^4 T_4 + 3^3 T_3 + 3^2 T_2 + 3^1 T_1 + 3^0 T_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} 3^i T_i \quad (T_i = 0, 1, 2) \end{aligned}$$

区間 $[0,1]$ における実数の 10 進法表現

区間 $[0,1]$ における実数の 2 進法表現



区間 $[0,1]$ における実数の 3 進法表現



$$0.462\ldots = 0_{(\dot{3})}110\ldots$$
$$0.198\ldots = 0_{(\dot{3})}012\ldots$$

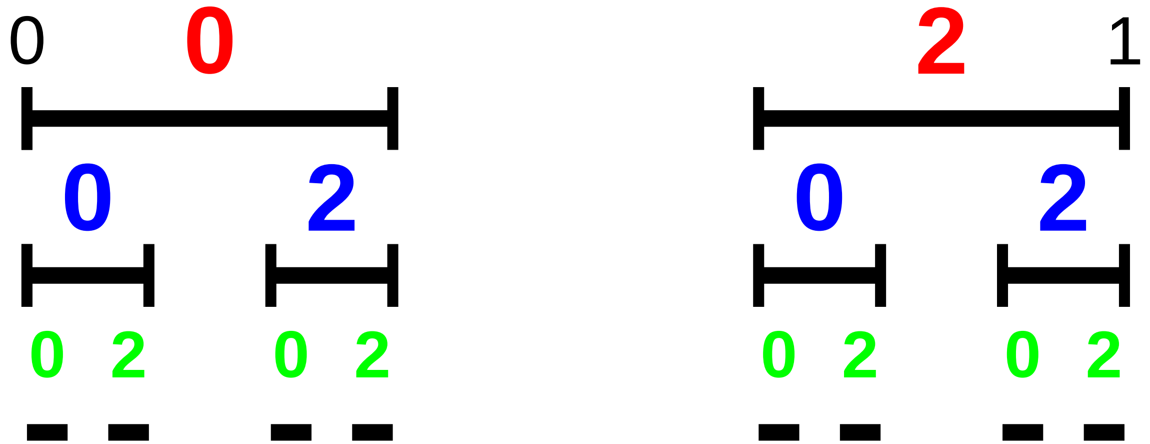
カントール集合上の点の数 (濃度) は?

- [0, 1] 区間の実数を 3 進法で表現すると $\cdots$

$$0.z_1z_2z_3z_4\cdots$$，但し

- カントール集合では中央部分が無いので，
  $z_i = 1$ という値はとらず，z_i は　　　　　　　である．

- $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えると　　　　　　となる．



カントール集合上の点の数 (濃度) は?

- $z_i = 0 \to 0, z_i = 2 \to 1$ と置き換えると となる.
- $[0, 1]$ 区間上の実数の 2 進法表現と がつく.

カントール集合上の点の数は, ,
つまり カントール集合上にもビッシリ点が存在する

$L_n \to 0$ という結果は
今までの …

点と線分とカントール集合と ･･･

	濃度 (点の数)	長さ	面積	体積
点	N (有限値)	0	0	0
カントール集合				
線分	∞	L	0	0

- 点
  - 濃度を測れば　　　　　　　　　　　　する.
  - 長さを測れば　　になる.
- 線分
  - 濃度を測れば　　　　　　する.
  - 長さを測れば　　　　　　　する.
  - 面積を測れば　　　　　する.
- カントール集合は?

演習 $(+\alpha)$ の結果は?

- カントール集合の長さを測ると　　であるのに，
  点の数を数えると　　　　　　という おかしな結果となった．
- シェルピンスキーのギャスケットについて，
  1. 　　　$\rightarrow$
  2. 　　　$\rightarrow$

  を求めなさい．
- メンジャースポンジについて，
  1. 　　　$\rightarrow$
  2. 　　　$\rightarrow$

  を求めなさい．
- コッホ曲線ついて，
  1. 　　　$\rightarrow$
  2. 　　　$\rightarrow$

  を求めなさい．

点，線分，正方形，立方体

	次元	濃度	長さ	面積	体積
(個数 N の) 点					
(長さ L の) 線分					
(面積 S の) 正方形					
(体積 V の) 立方体					

❑ 濃度は　　　　　　　　　　を測るための尺度

❑ 長さは　　　　　　　　　　を測るための尺度

❑ 面積は　　　　　　　　　　を測るための尺度

❑ 体積は　　　　　　　　　　を測るための尺度

☞ 各図形の次元にあっている尺度で測ると，　　　　　　　　している．

☞ 各図形の次元にあっていない尺度で測ると，　になるか　　　　　している．

点，線分，正方形，立方体とフラクタル

	次元	濃度 (0 次元での尺度)	長さ (1 次元での尺度)	面積 (2 次元での尺度)	体積 (3 次元での尺度)
点	0	N	0	0	0
カントール集合					
線分	1	∞	L	0	0
コッホ曲線					
ギャスケット					
正方形	2	∞	∞	S	0
スポンジ					
立方体	3	∞	∞	∞	V

フラクタル図形を特徴付けるには?

- 濃度・長さ・面積・体積などの尺度では，うまく測れない．
- いや，むしろ，濃度・長さ・面積・体積りも，自然な尺度がありそうだ．

$$\Downarrow$$

- とすると，その「自然な尺度」を用いて，フラクタル図形の特徴を数値化することは出来ないだろうか？
  - $\Longrightarrow$
  - $\Longrightarrow$

次元とは? –直観的には–

線は　次元，面は　次元，立体は　次元

↓

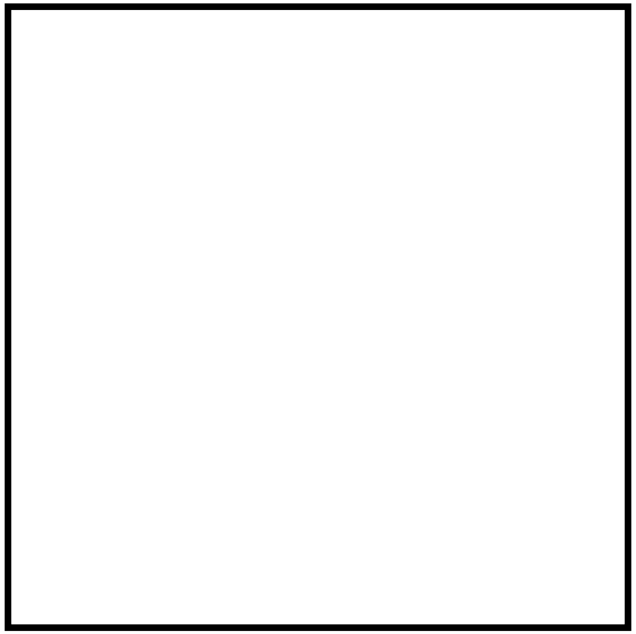
「　　　」という方法で確かめてみよう

線分を被覆する

被覆に必要な小線分 (縮小比) の数 ＝

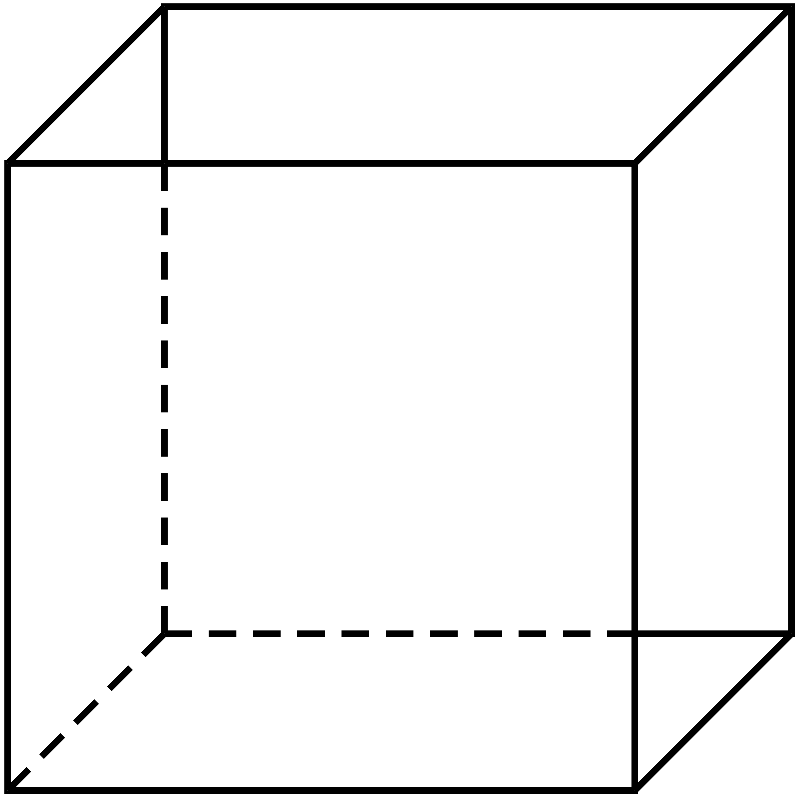
但し， に被覆する．

正方形を被覆する



被覆に必要な小正方形 (縮小比) の数 =

立方体を被覆する



被覆に必要な小立方体 (縮小比　　　) の数 =

被覆により次元を測る

	縮小比	個数
線 分	1/2	
正方形	1/2	
立方体	1/2	
一般化		

被覆による次元の定義

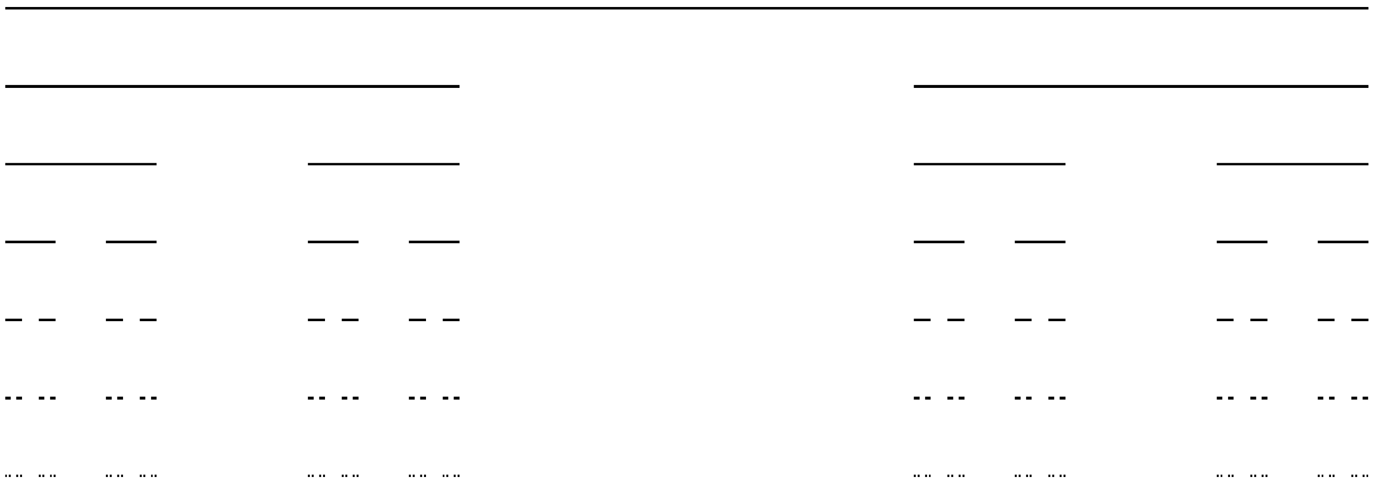
- ある図形を，　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　で，
  元の図形を　　　　　　　　　　　　　　　　　　　により，

  と定義する．すなわち，

- この次元の定義を用いて，カントール集合の次元を測るとどうなるだろうか?

カントール集合のフラクタル次元

❑ カントール集合の次元 D_C を求めなさい．



$\dfrac{1}{\epsilon} =$ ，$N(\epsilon) =$ なので，

$\longrightarrow$

非整数次元の意味

	D	濃度	長さ	面積	体積
点	0	N	0	0	0
線分	1	∞	L	0	0
正方形	2	∞	∞	S	0
立方体	3	∞	∞	∞	V

1. 各図形の次元に対応した尺度 $\rightarrow N, L, V, S$ に収束
2. それ以外は 0 あるいは ∞ に発散

$$=$$

カントール集合の複雑さ

	D	濃度	自然な尺度	長さ	面積	体積
点	0	N		0	0	0
カントール集合	$0.6309\ldots$	∞		0	0	0
線分	1	∞		L	0	0
正方形	2	∞		∞	S	0
立方体	3	∞		∞	∞	V

- カントール集合にとって 0 にも ∞ にもならない，
  が存在する．
- その尺度の大きさが 次元
- 複雑さが
- 自然な尺度＝

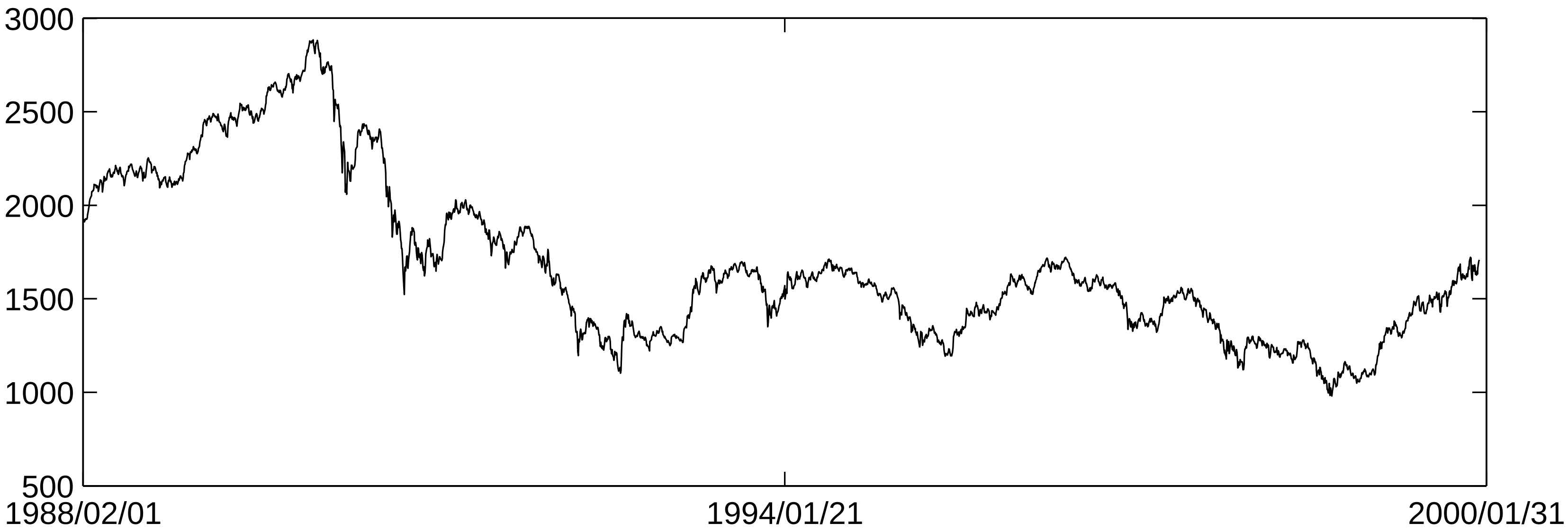
演習

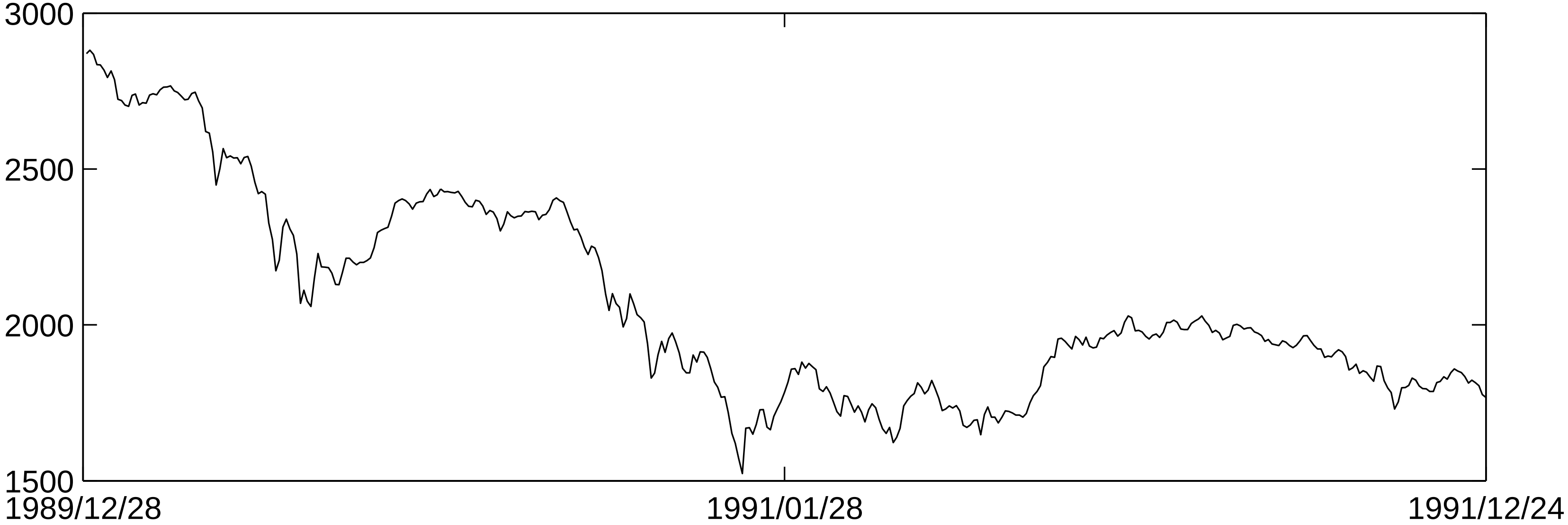
- コッホ曲線のフラクタル次元を求めなさい．
- シェルピンスキーのギャスケットのフラクタル次元を求めなさい
- メンガースポンジのフラクタル次元を求めなさい．

フラクタルの応用

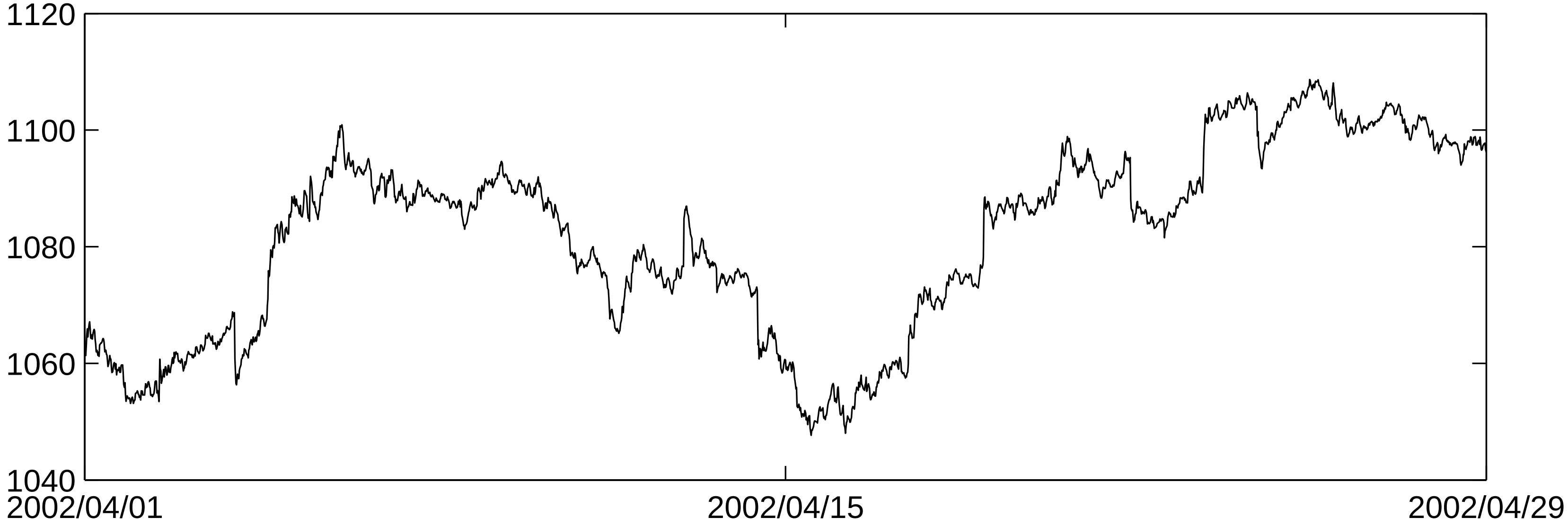
1. **経済指標の解析**
2. **通信路，パケットトラフィック**
3. **コンピュータ・グラフィックス** (CG)
4. **画像処理，映画・ゲームへの応用**
5. **画像符号化 (情報圧縮)**
6. **フォトニック・フラクタル**

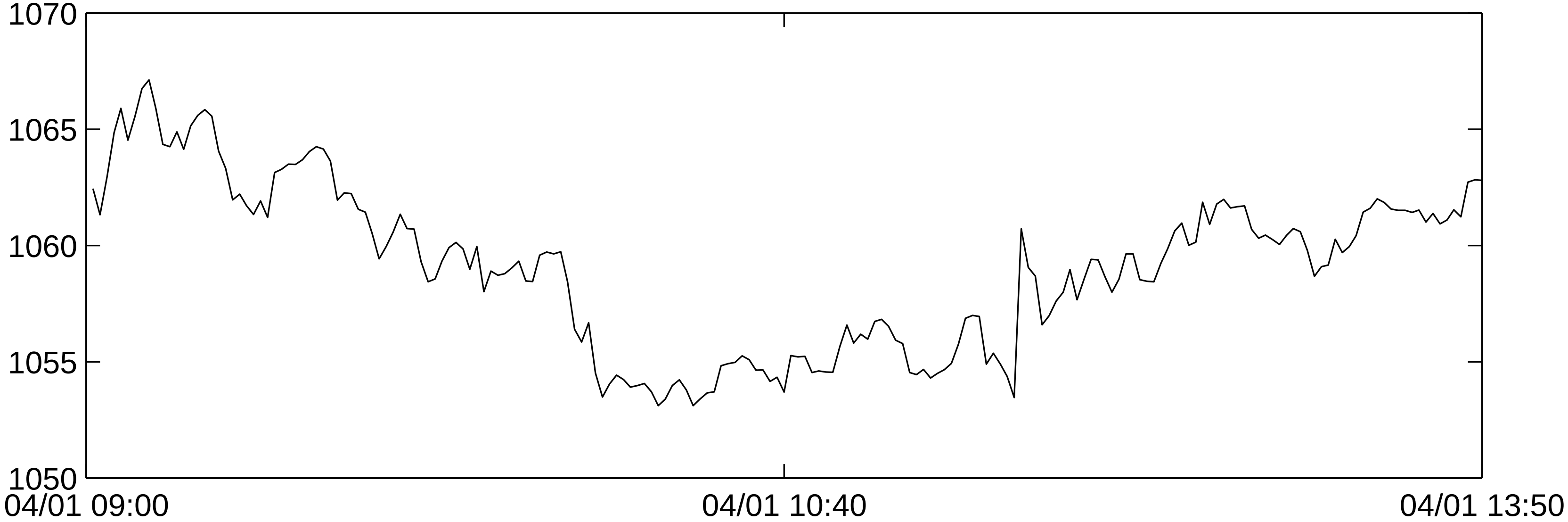
経済指標 (TOPIX) のフラクタル性



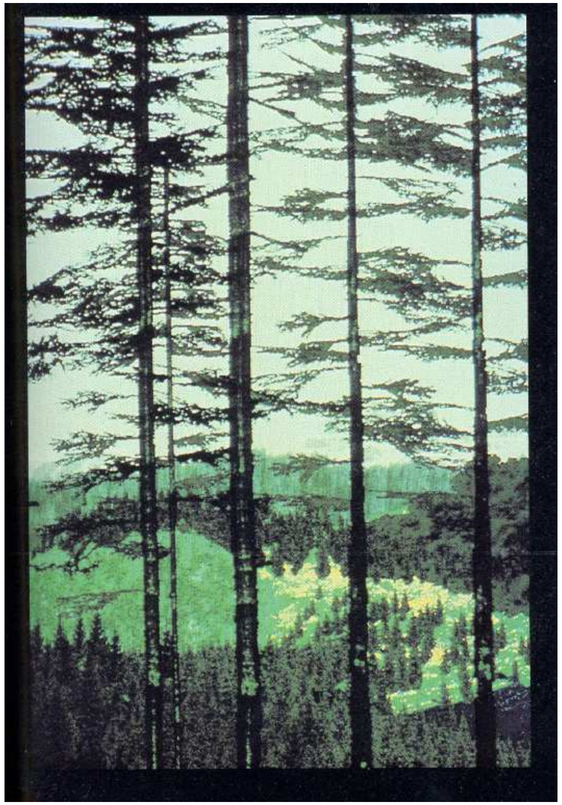


経済指標 (TOPIX) のフラクタル性





フラクタルを用いたCG

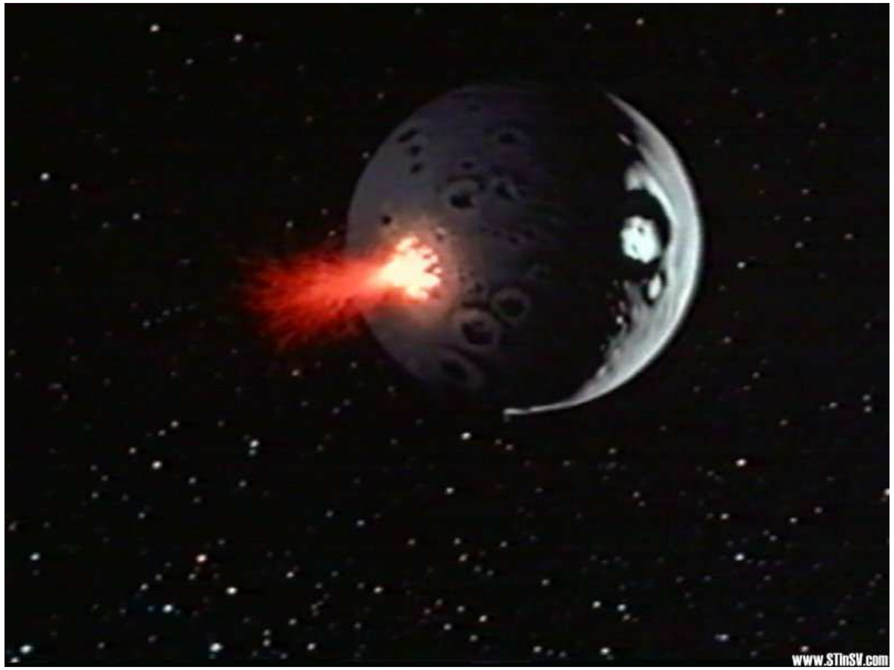


B. Mandelbrot:“Fractal Geometry of Nature,” Academic Press.

フラクタルを用いたCG

Star Trek II – The Wrath of Kahn – (1982)






参考: http://www.startrek.com/

(ディジタル) 画像の符号化

- ディジタル画像では，
  - –　　　　　　と呼ばれる基本要素が横 N 個，縦 M 個に並んでいる．
  - – 各　　　の　　　は，何段階かの　　　　で表現する．

符号化とは？

- 例えば，横に 256 画素，縦に 256 画素のディジタル画像
- 各画素の濃淡は 8 ビット＝　　　　階調 で表わされている．
- 画像全体で考えると，
- もし，一画素あたりのビット数が減らせたら …
- 画像の符号化とは，画像の　　　　　　　　　　　　　　　　，
　　　　　　　　　　　　　　　　なるように変換すること．
    –
    –
    –
    –

参考文献

徳永隆治:
フラクタルと画像処理
–差分力学系の基礎と応用–，
コロナ社，2002．