非線形システム概論 2006
多次元力学系入門

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門

338–8570 **さいたま市 桜区 下大久保** 255

Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716

Email : tohru@nls.ics.saitama-u.ac.jp

URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

1次元の差分方程式

- ロジスティック写像

$$x(t+1) = Rx(t)(1 - x(t))$$

注　これまでは，$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$ のように，(離散) 時間 t を下付き添字として表わしていたが，今日からは，(t) のように，括弧を用いて表現する．

- 様々な応答
  - 固定点
  - 周期点
  - カオス
- 分岐

2 次元の差分方程式

- ❑ 表現 1

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))$$

  - t
  - $\boldsymbol{x}(t)$:
  - $\boldsymbol{f}$
- ❑ 表現 2
- ❑ 表現 3

なぜ2次元の差分方程式？

- より次元の高い差分方程式の　　　になっている
- 1次元差分方程式では観測されないものがある
  - サドル点 (鞍形)
  - ノイマルク・サッカー分岐など
- 3次元微分方程式の解の性質を，解析するためのツールになる．
- 実際のシステムの　　　として，2次元の差分方程式を考えた方が良いときがある．
- 　　　を含めた多様な解をもつ．

2 次元の線形な差分方程式の例

❑ 表現 1

- t: 離散時間 $t \in \mathbb{Z}$
- $x(t)$: 時刻 t における 2 次元の状態変数
- A: 2×2 (線形な) 行列

❑ 表現 2

❑ 表現 3

2次元の非線形な差分方程式の例

- **エノン写像** (M.Hénon, Communicaton Physics, Vol.**50**, pp.69–77, 1976)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t+1) & = & 1 - ax(t)^2 + y(t) \\ y(t+1) & = & bx(t) \end{array}\right.$$

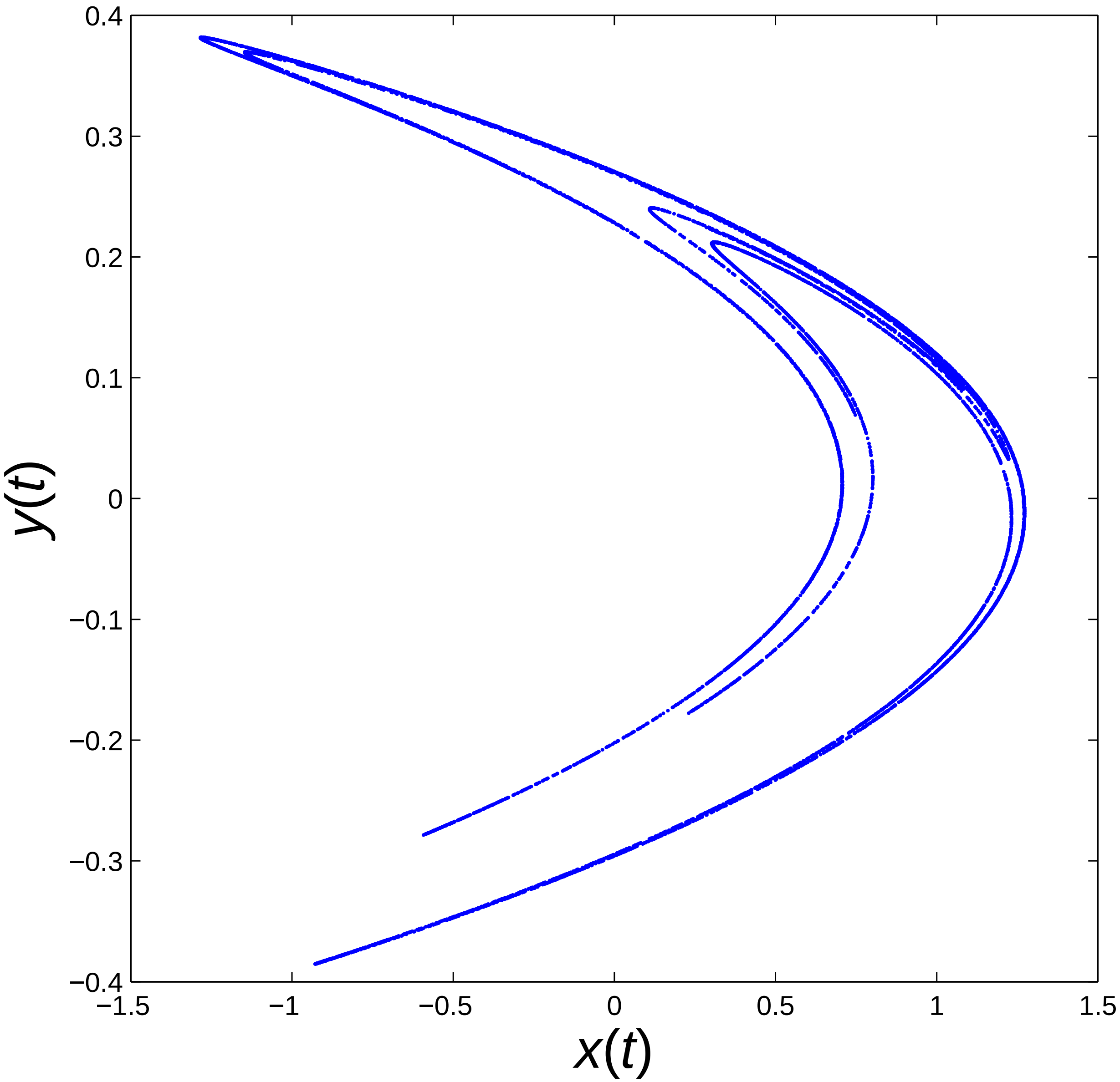
cf **ロジスティック写像**

$$x(t+1) = Rx(t)\,(1 - x(t))$$

- **池田写像 (池田研介，**Optics Communications, Vol.**30**, No.2, pp.257–261, 1979)

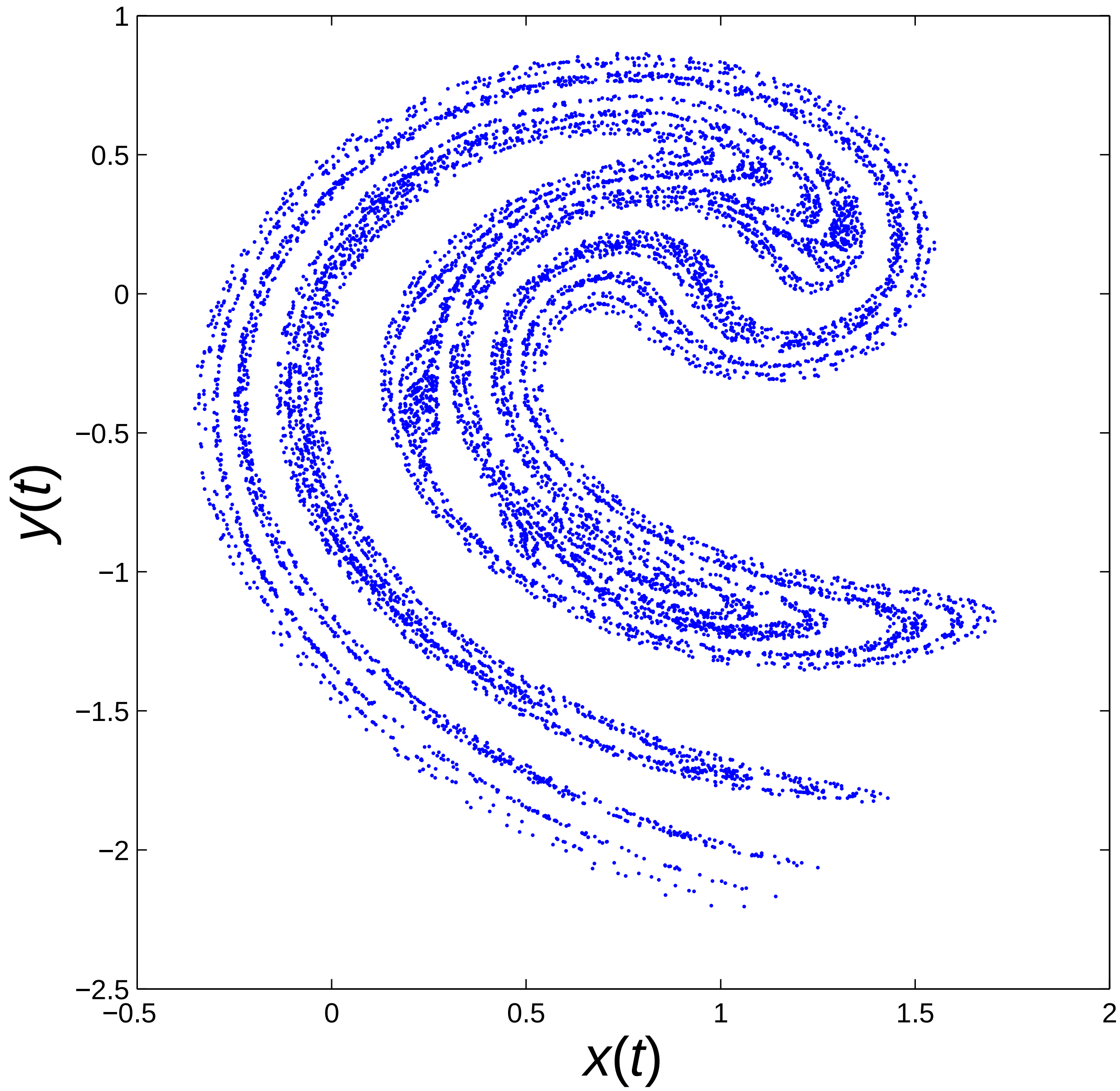
$$\left\{\begin{array}{lcll} x(t+1) & = & q \quad + & b\Big(x(t)\cos\theta(t) - y(t)\sin\theta(t)\Big) \\ y(t+1) & = & & b\Big(x(t)\sin\theta(t) + y(t)\cos\theta(t)\Big) \\ \theta(t) & = & \kappa - \dfrac{a}{1 + x^2(t) + y^2(t)} & \end{array}\right.$$

エノン写像



$a = 1.4, b = 0.3$
10000 点
$t = 0 \sim 1000$ を過渡状態として無視

池田写像



$q = 1.0, b = 0.9,$
$\kappa = 0.4, a = 6$
10000 点
$t = 0 \sim 1000$ を過渡状態として無視

2 次元写像の応答を調べるには

- 1 次元写像と同様に，
  -
  -

  の　　　　，　　　　　　を調べる必要がある．
- 2 次元写像

$$\begin{cases} x(t+1) &= f(x(t), y(t)) \\ y(t+1) &= g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

の固定点を $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ とすると，

演習

- エノン写像の固定点を求めなさい．

$$\begin{cases} x(t+1) &= 1 - ax(t)^2 + y(t) \\ y(t+1) &= bx(t) \end{cases}$$

固定点 の安定性，不安定性

- **一変数の差分方程式**

$$x(t+1) = f(x(t))$$

の場合は，$|f'(x^*)|$ **が** 1 **よりも大きいかどうかを考えた．**

- x^* **を** $x^* + \epsilon$ **に変化させたときに，　を加えた効果がが** f **により，**
  -
  -
- **つまり，**

を考えて，

が 1 **よりも大きききかどうかを議論すればよいということ．**

固定点 の安定性，不安定性

- 右辺をテーラ展開すると，

$$x^*+\epsilon' = f(x^*+\epsilon)$$

- 整理すると

- $\epsilon \ll 1$ なので，

2変数の場合は？

❏ 二変数の差分方程式

$$\begin{cases} x(t+1) &= f(x(t), y(t)) \\ y(t+1) &= g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

に対して，$(x^*, y^*)^T$ を $(x^* + \epsilon_x, y^* + \epsilon_y)^T$ に変化させたときに，　　　が

– 大きくなってしまうのか (　　　),

– 小さくなるのか (　　　)

を考えれば良い．

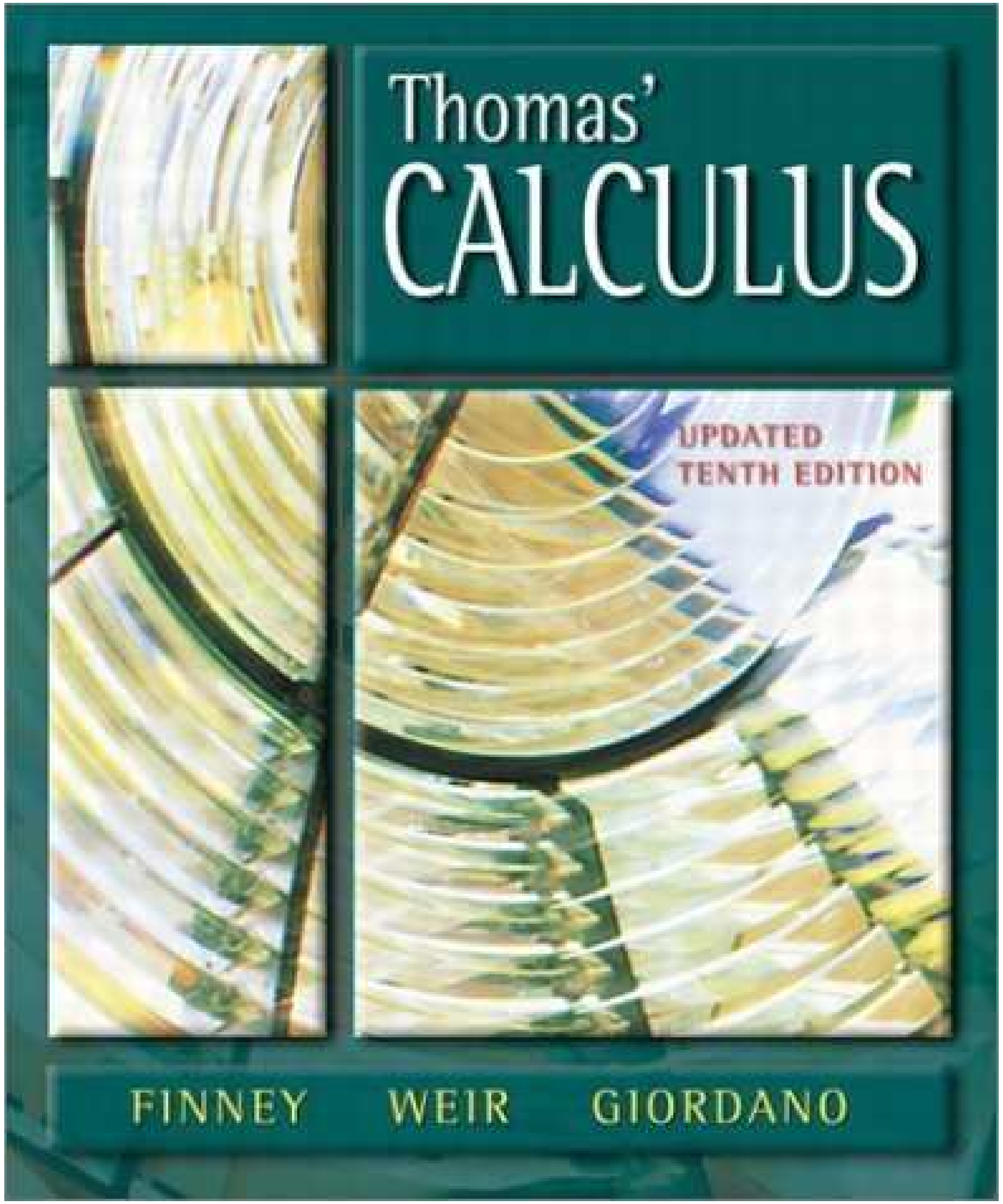
❏ そのためには，　　　　　　　　　　　を用いる．

❏ どこで習ったか？

–

–

参考書籍紹介



Ross L. Finney, Maurice D. Weir, and Frank R. Giordano, "Thomas's Calculus," 10 th Edition, Addison Wesley, 2001.

2変数関数のテーラ展開

- 第一式

$$x^* + \epsilon'_x \quad = \quad f(x^* + \epsilon_x, y^* + \epsilon_y)$$

- 第二式

$$y^* + \epsilon'_y \quad = \quad g(x^* + \epsilon_x, y^* + \epsilon_y)$$

線形写像による近似

- $\epsilon_x \ll 1, \epsilon_y \ll 1$ だから，

- これは，　　　　　　　　　　　　な行列 (写像) ＝
- 「線形な行列による写像により，(ϵ_x, ϵ_y) は，どのような変化を示すか」を考えれば良い．
  $\Longrightarrow$ どこで習ったか?

  –

演習

- 線形な行列による写像の応答は，どのように分類されるか，を考える前に，演習をやりましょう．エノン写像

$$\begin{cases} x(t+1) &= 1 - ax(t)^2 + y(t) \\ y(t+1) &= bx(t) \end{cases}$$

のヤコビ行列を求めなさい．

演習

- 池田写像

$$
\begin{cases}
x(t+1) = q + b\Big(x(t)\cos\theta(t) - y(t)\sin\theta(t)\Big) \\
y(t+1) = b\Big(x(t)\sin\theta(t) + y(t)\cos\theta(t)\Big) \\
\theta(t) = \kappa - \dfrac{a}{1 + x^2(t) + y^2(t)}
\end{cases}
$$

のヤコビ行列を求めなさい。

線形な差分方程式

- 1 次元の場合

$$x(t+1) = Rx(t)$$

これを解くと (　　　　　　　　　　　　　　　　　),

– 　　　　であれば漸近安定
– 　　　　であれば不安定
– 　　　　であればリアプノフ安定

- それでは，2 次元の場合は?
- さらに進んで，一般の K 次元の場合は?

線形な差分方程式

- 2 次元の場合は?

$$\begin{cases} x_1(t+1) = ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2(t+1) = cx_1(t) + dx_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

- もし，1 次元の場合とのアナロジーで，

  などとして，安定性の判定が出来たらうれしい．

「簡単」な線形差分方程式

- 一般的な 2 次元の線形差分方程式

$$\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$$

から，

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(0)$$

を求めるのは容易ではない．

- そこで，まずは簡単にできる例から考えてみよう．以下のような，対角行列の場合はどうか?

対角行列の場合

- 対角行列の場合は簡単である．

- つまり，

  のように，　　　　　　　に考えればよい

- それでは，対角行列でない一般の場合はどうか．
  対角行列のパターンに　　　　できないか？⇒

対角化とは何か (1)

[問題] 以下の具体例を考えよう．

$$\begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

に対して，$x_1(t) = \boxed{}\, x_1(0)$, $x_2(t) = \boxed{}\, x_2(0)$ を求めよ．

- ヒント 1

$$\begin{cases} y_1(t+1) &=& x_1(t+1) + x_2(t+1) \\ y_2(t+1) &=& x_1(t+1) - x_2(t+1) \end{cases}$$

として，$y_i(t+1)$ と $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ の関係を求めよ．

対角化とは何か (2)

- ヒント 2 : $y_1(t), y_2(t)$ を求めよ．

- ヒント 3 : $y_1(t), y_2(t)$ から $x_1(t), x_2(t)$ に戻せ．

対角化とは何か (3)

[問題] 今の問題を行列を用いて翻訳せよ．

- **ヒント**

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \text{ とすれば } \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{x}(t)$$

対角化とは何か (4)

[問題] うまくいった理由を探ぐろう．

- 正則行列　　を用いて，$x(t)$ から $y(t) = Cx(t)$ へと変換．
- 　　　　に関する差分方程式が　　　に関する差分方程式に．
- その結果，$y(t)$ に関する差分方程式は，　　　　　　　　に！
- $y(t)$ を解き，それを　　　に戻した．

うまく解けるかどうかの鍵は，

> $y(t)$ に関する差分方程式が，対角行列版になるような
> ことができるか？

$\boldsymbol{x}(t) \Leftrightarrow \boldsymbol{y}(t)$

単なる表現上の問題だが •••

- $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(t) &= C^{-1}\boldsymbol{y}(t) \end{cases}$$

- $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(t) &= P\boldsymbol{y}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= P^{-1}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

- **理由** $y \to x$ **を使った方が，つまり，行列** P **による表現の方が，後々の解釈には便利だから**

対角化とは何か (5)

- さて， $\boldsymbol{x}(t) = P\boldsymbol{y}(t)$ より， である．

$$\boldsymbol{y}(t+1) \quad = \quad P^{-1}\boldsymbol{x}(t+1)$$

となるので，

- Λ が対角行列ならば， より，

対角化とは何か (6)

元々の変数 $x(t)$ $x(t+1)$

便利な変数 $y(t)$ $y(t+1)$

対角化とは何か (7)

- ❑ $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P をどうやって求めるか．

$$P = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\right)$$

のように考えよう．ここで，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は

- ❑ 求めたいのは，

のように

- ❑

対角化とは何か (8)

- 順次、変形していくと …

$$AP = P\Lambda$$

- 行列 A の　　　　　　　　に帰着してしまった …

  $\Rightarrow$ 行列 A の　　　　$\lambda_i (i = 1, 2)$，　　　　　　　　$\boldsymbol{p}_i (i = 1, 2)$

ここまでのまとめ

線形な 2 次元差分方程式 $x(t+1) = Ax(t)$ を定める行列 A に対して，

- 正則行列　　をうまく選んで，　　　　　により　　　　　　　できれば，$x(t)$ を解くことができる！

  λ_1, λ_2 は A の固有値
  P は A の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を並べた行列

- 安定であるためには，　　　　　．

注　ここまでは，全ての A に対して対角化可能かということは考えていない (対角化できない場合の A についての議論は端折っている)．

固有値，固有ベクトルの意味

- 固有値 λ，固有ベクトル p の定義
  正則な行列 A に対して

- 差分方程式 $x(t+1) = Ax(t)$ のダイナミクスとの関係
  $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{p}$ としたらどうなるか？
  - $\boldsymbol{x}(1) =$
  - $\boldsymbol{x}(2) =$
  - $\boldsymbol{x}(3) =$
  - $\boldsymbol{x}(t) =$
  -

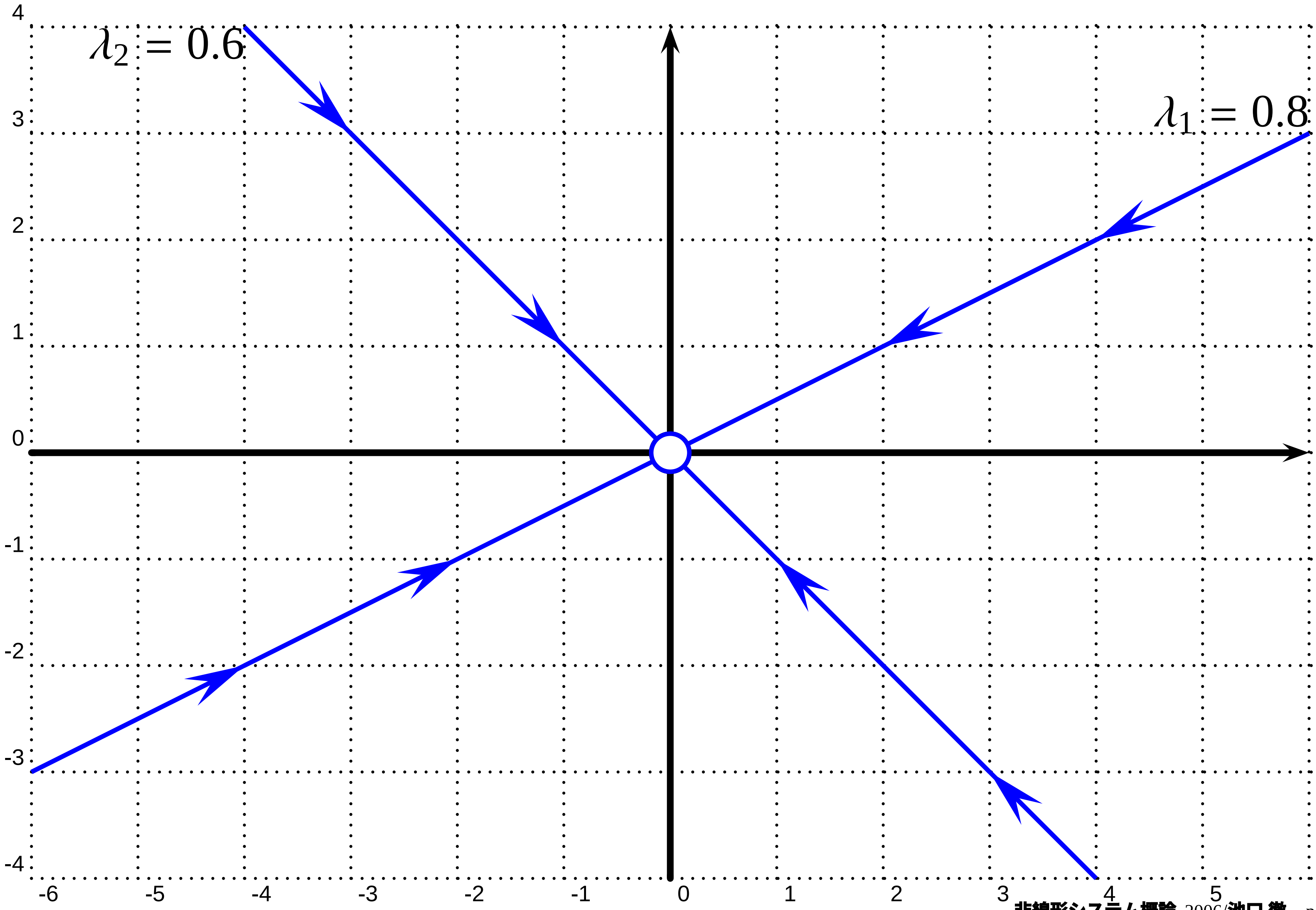
固有値，固有ベクトルの意味

- $\boldsymbol{x}(t) = \lambda^t \boldsymbol{p}$ の意味は？
  - $\boldsymbol{p}$ (A の固有ベクトル) を初期値として与えると，
    で
  - のは ， のは

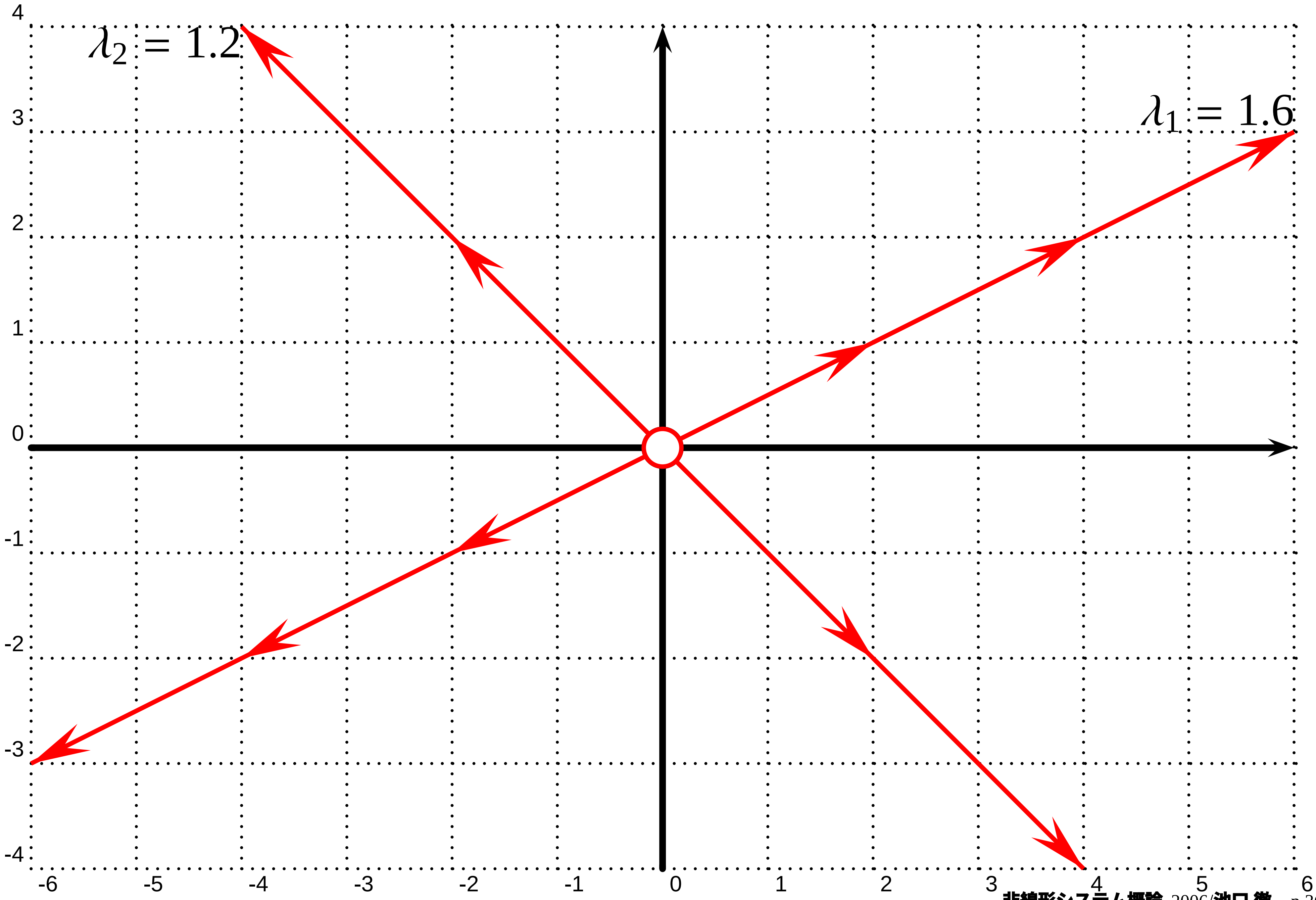
例 2 次元の線形差分方程式 $\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$ の写像行列 A の固有値を λ_1, λ_2，固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ としよう．
この差分方程式の固定点 $\boldsymbol{x}^*$ は， である．以下の場合について，固定点の安定性を議論しよう．但し，$\boldsymbol{p}_1 = (2,1)^T$, $\boldsymbol{p}_2 = (1,-1)^T$ とする．

- $\lambda_1 = 0.8, \lambda_2 = 0.6 \Rightarrow$
- $\lambda_1 = 1.6, \lambda_2 = 1.2 \Rightarrow$
- $\lambda_1 = 2.0, \lambda_2 = 0.5 \Rightarrow$

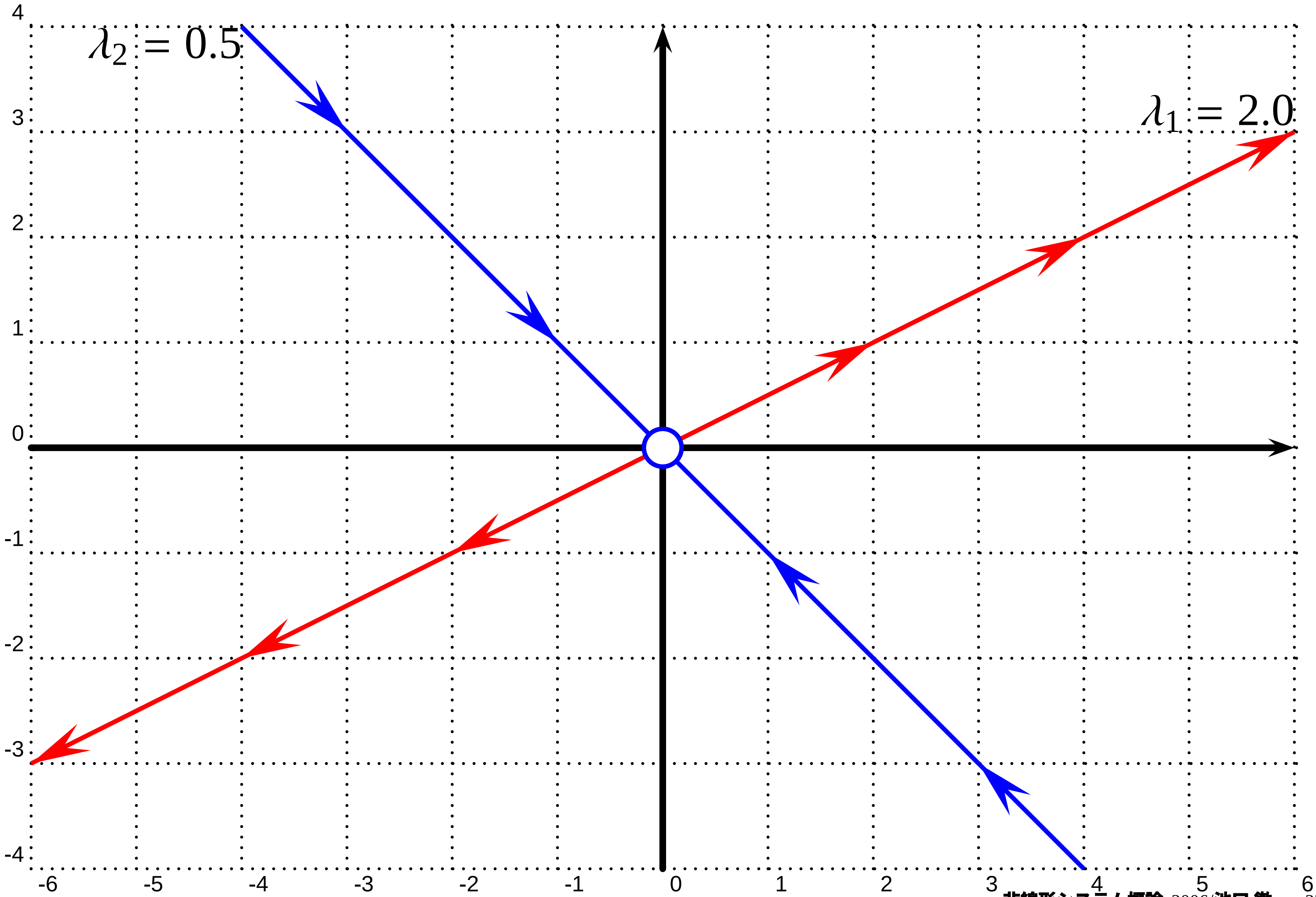
$\lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1$ の場合



$\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$ の場合



$\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1$ の場合



固有値，固有ベクトルを求めるには

- 定義より

$$A\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p}$$

- 移項すると

$$\left(\lambda I - A\right)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$$

- 従って

$$\det\left(\lambda I - A\right) = 0$$

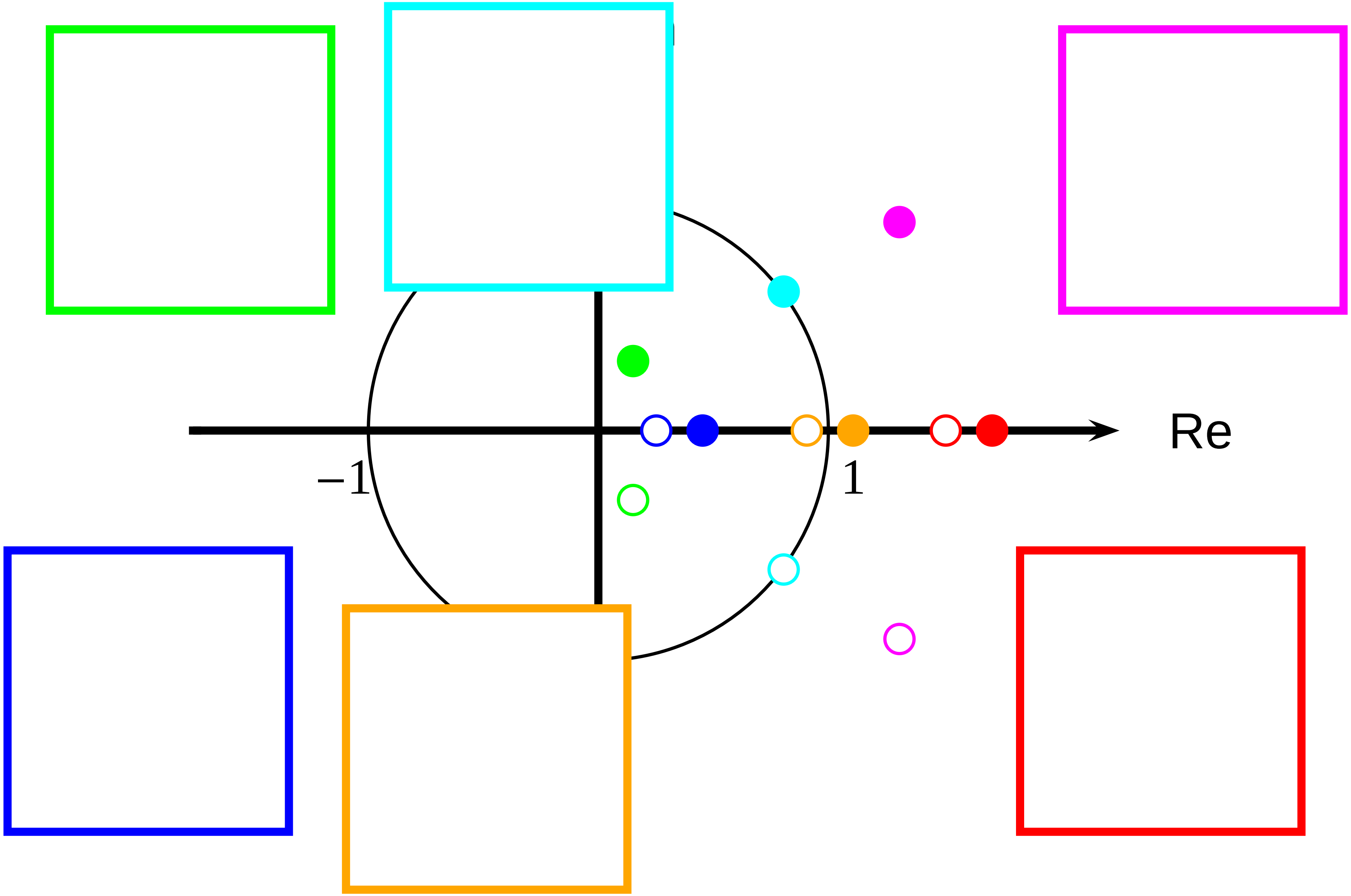
- これを　　　　　　　　　　という．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$

特性方程式の解のパターン

- **実数解**
  - **相異なる二つの実数解** λ_1, λ_2
    - $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$
    - $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$
    - $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$
  - **重解** λ
    - $|\lambda| > 1$
    - $|\lambda| < 1$
- **複素数** $\to \lambda_1, \lambda_2 = \sigma \pm i\omega$ **より**
  - $\sigma^2 + \omega^2 < 1$
  - $\sigma^2 + \omega^2 = 1$
  - $\sigma^2 + \omega^2 > 1$

2 次元線形差分力学系の振る舞い



まとめると …

2 次元の非線形な差分方程式のダイナミクスを調べる

$$x(t+1) = f(x(t))$$

固定点，周期解 …$\left\{\begin{array}{l}\text{安定？}\\ \text{不安定？}\end{array}\right.$

固定点 x^* 回りで　　　　された 2 次元の差分方程式

ヤコビ行列 $Df(x^*)$ の　　　　を解けば，
$x(t+1) = f(x(t))$ の　　　　での挙動が分かる

非線形ダイナミカルシステムの解析

- 非線形ダイナミカルシステムの応答がカオスとなるとき，
  - が存在．
  - 固定点・周期点の安定性，不安定性を議論するための線形化された差分方程式

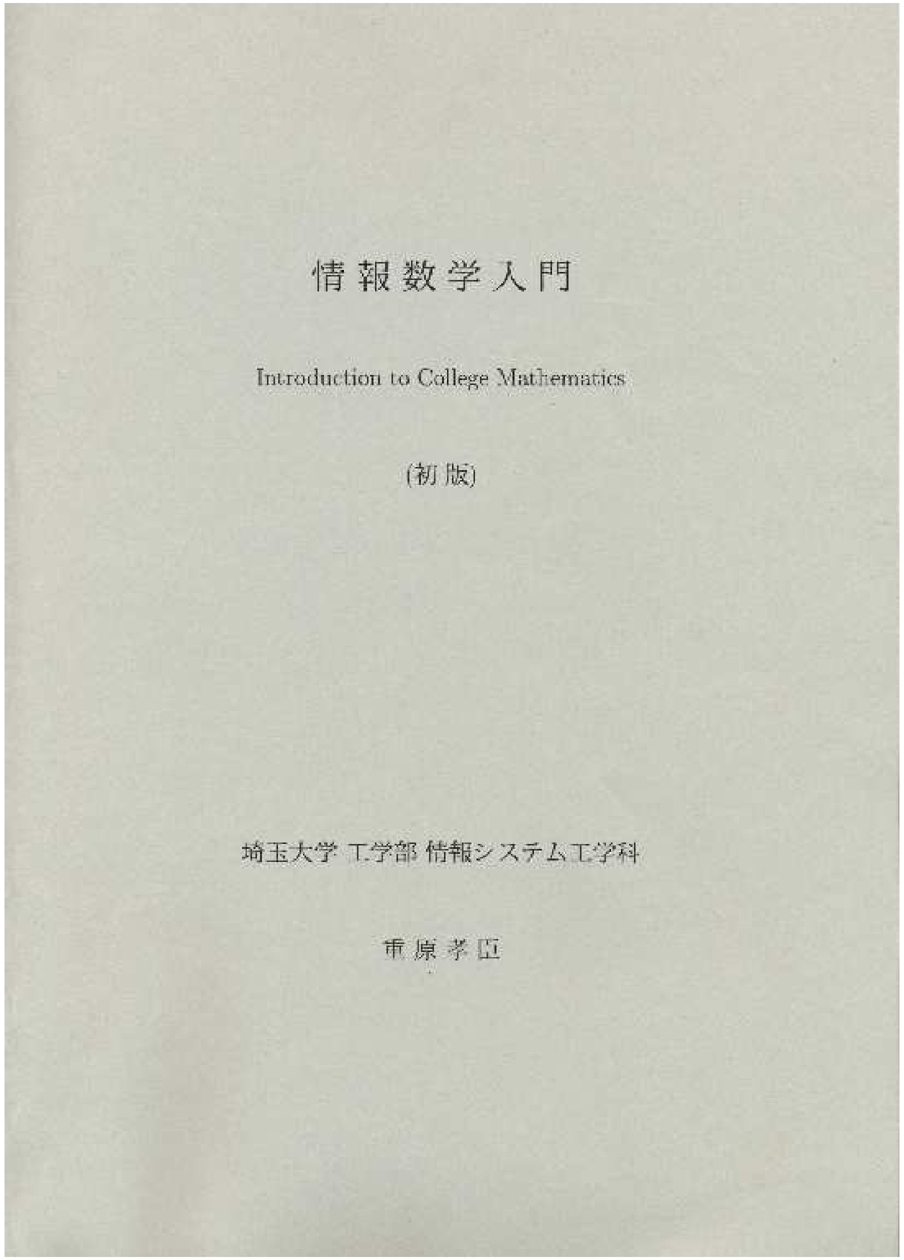
$$\epsilon(t+1) = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\epsilon(t)$$

  - $t \to \infty$ のとき，$\epsilon(0)$ がどのように変化するのかは，

$$\lim_{N\to\infty} \epsilon(N) = \lim_{N\to\infty}\left(\prod_{t=0}^{N-1} D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))\right)^{1/N} \epsilon(0)$$

を考えることになるが，ちょっとアドバンストなので，

参考書籍紹介

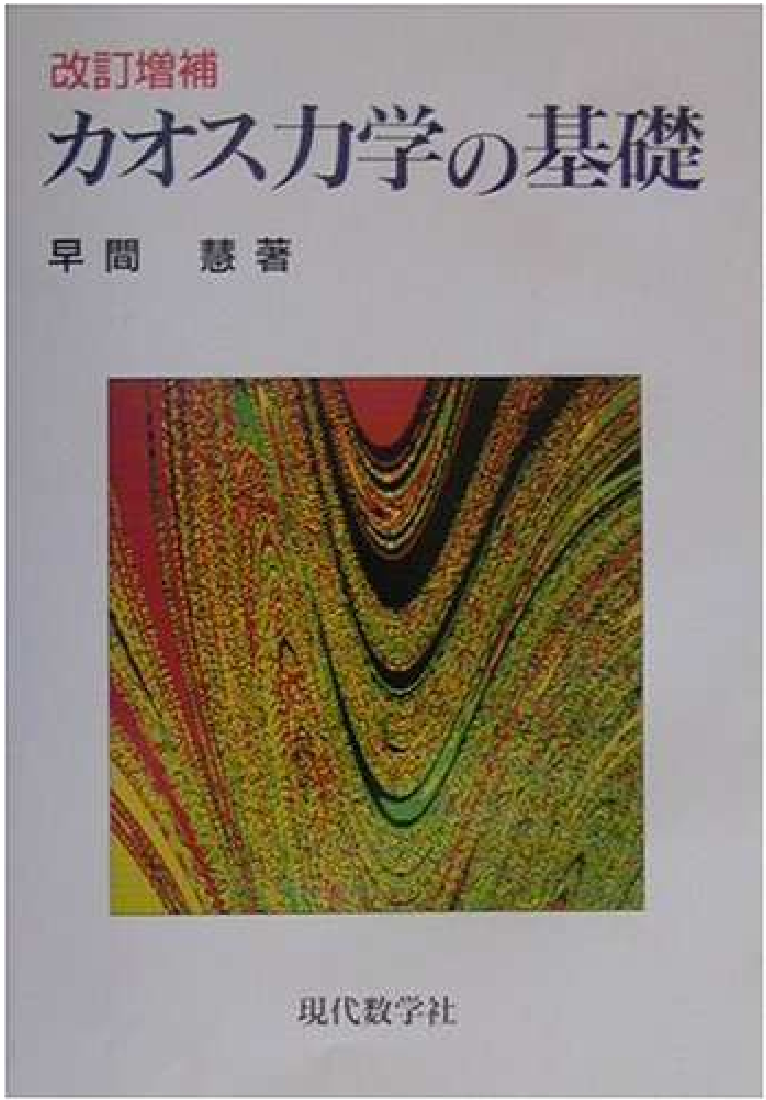


重原 孝臣 著,
“情報数学入門,” 初版,
埼玉大学 工学部 情報システムテム工学科, 2005 **年.**

参考書籍紹介

平岡 和幸，堀 玄 著, **“プログラミングのための線形代数,”** **オーム社**，2004 **年．**

参考書籍紹介



早間 慧 著,
(改訂増補) カオス力学の基礎,
現代数学社,

参考書籍紹介

徳永隆治 著
フラクタルと画像処理
–差分力学系の基礎と応用–，
コロナ社，2002**．**