

非線形システム概論 2006

複雑ネットワーク入門

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門

338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel : 048-858-3577, Fax : 048-858-3716

Email : tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL : <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru>

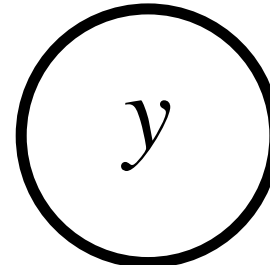
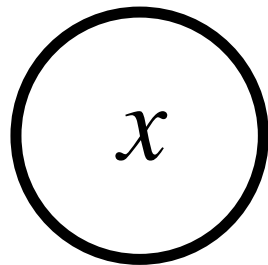
ここまでの内容

- 1次元の非線形差分方程式，2次元の非線形差分方程式
例: ロジスティック写像，エノン写像，池田写像，etc

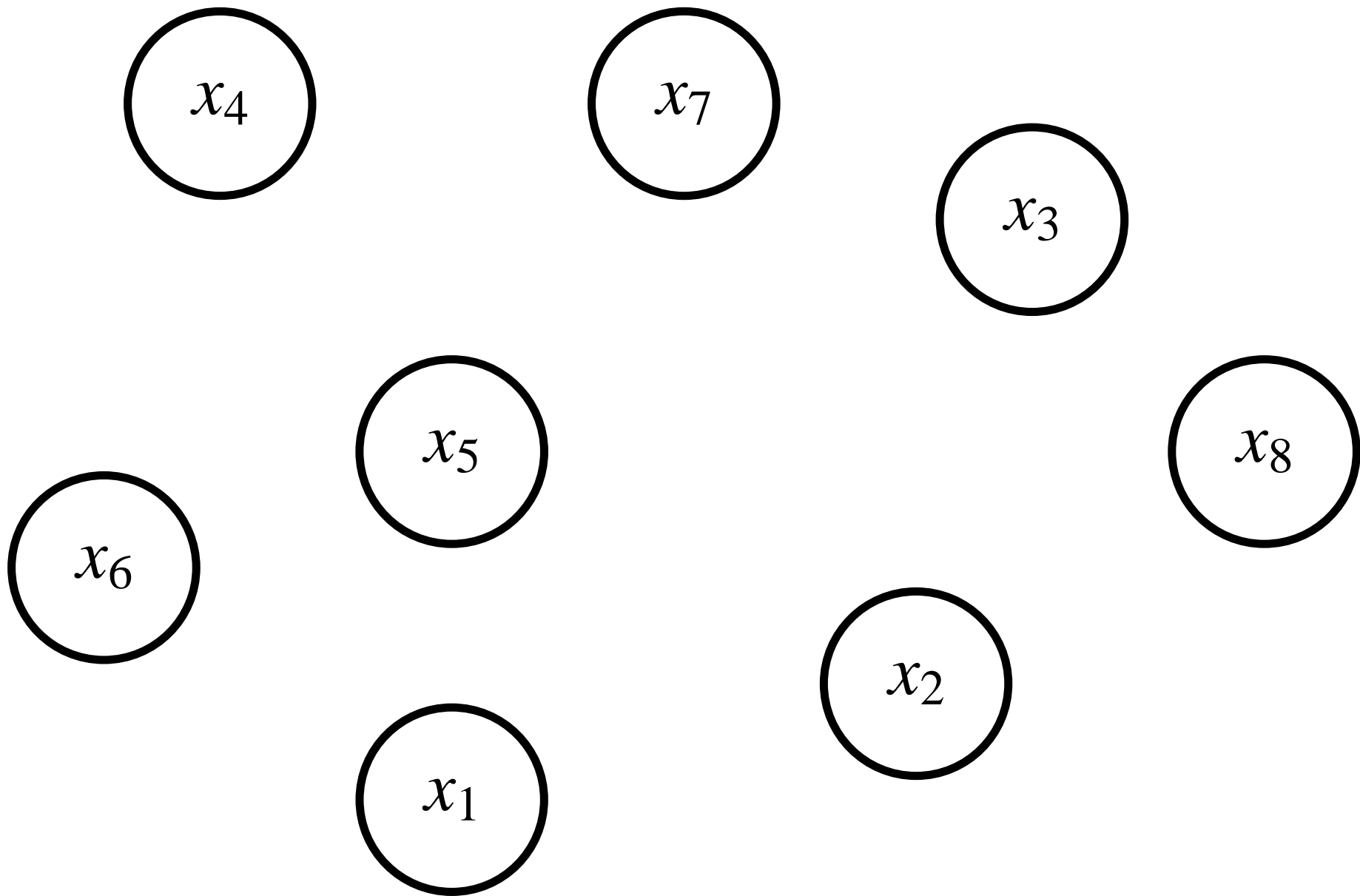
$$\begin{cases} x(t+1) = 1 - ax(t)^2 + y(t) \\ y(t+1) = bx(t) \end{cases}$$

⇒

- 各素子のダイナミクスだけでなく，各素子間の **も重要**



(非線形な)素子が多数結合する ...



ここからの内容

1. 各素子がカオスを含む複雑な応答を示すとして、
それらが したら、何が起きるのだろうか？
2. 各素子はどのように しているのだろうか？
 - ？
 - ？
 - ？
3. 各素子間の結合が特徴あるものとして、
そのような結合が構成された は何だろうか？
4. 各素子間の結合は、各素子の応答に を与える
のだろうか？

我々はネットワークの中に生きている

- 対人関係・友人関係
- 俳優の共演関係
- インターネット [コンピュータが物理的に接続]
- World Wide Web [ハイパーリンク]
- 会社間の取引関係
- 遺伝子ネットワーク
- 伝染病 (ペスト, エボラ出血熱, SARS)
- ウイルス (生物/コンピュータ)
- 脳・神経回路網
- 飛行機・道路・鉄道
- 電力輸送配電網
- 流行・噂・口コミ
- 性交渉ネットワーク

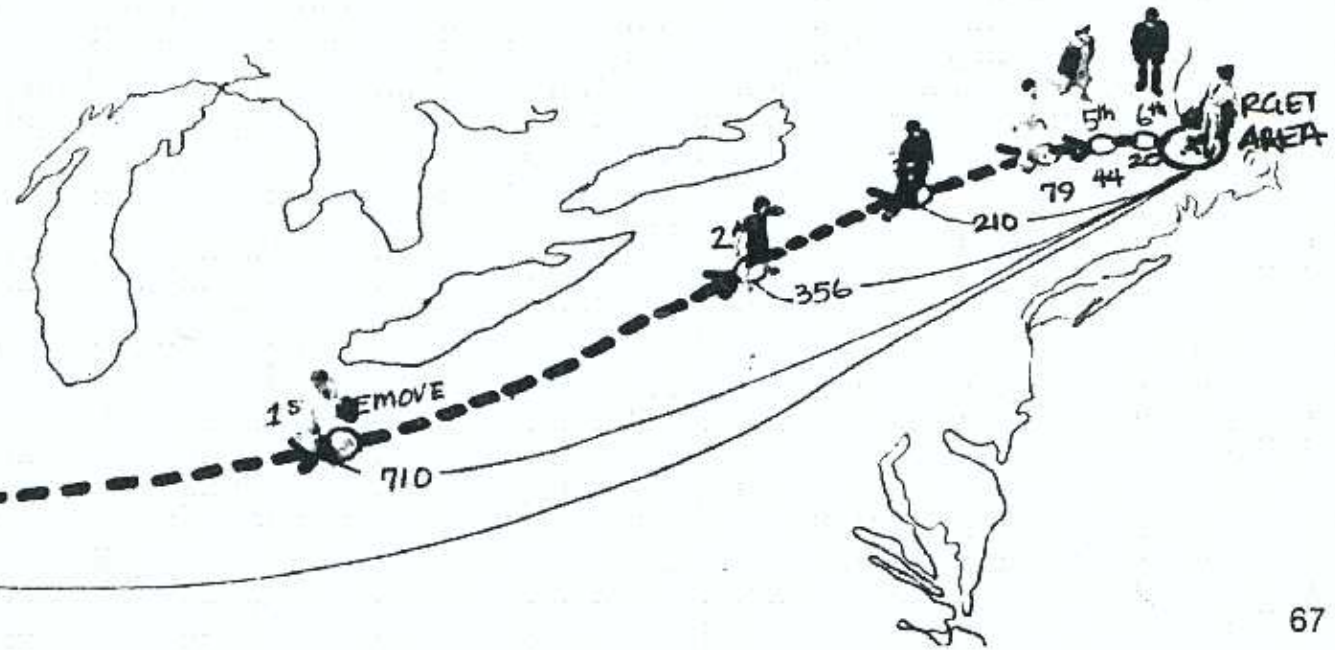
ここらからの内容

- **複雑ネットワークのキーワード**
 - スモールワールドネットワーク
 - スケールフリーネットワーク
 - 平均頂点間距離
 - クラスタ係数
 - ベキ分布
 - ハブ
 - 優先的選択
 - 適応度

- **まずは社会学における有名な実験の紹介から …**

ある実験 …

The chains progress from the starting position (Omaha) to the target area (Boston) with each remove. Diagram shows the number of miles from the target area, with the distance of each remove averaged over completed and uncompleted chains.



67

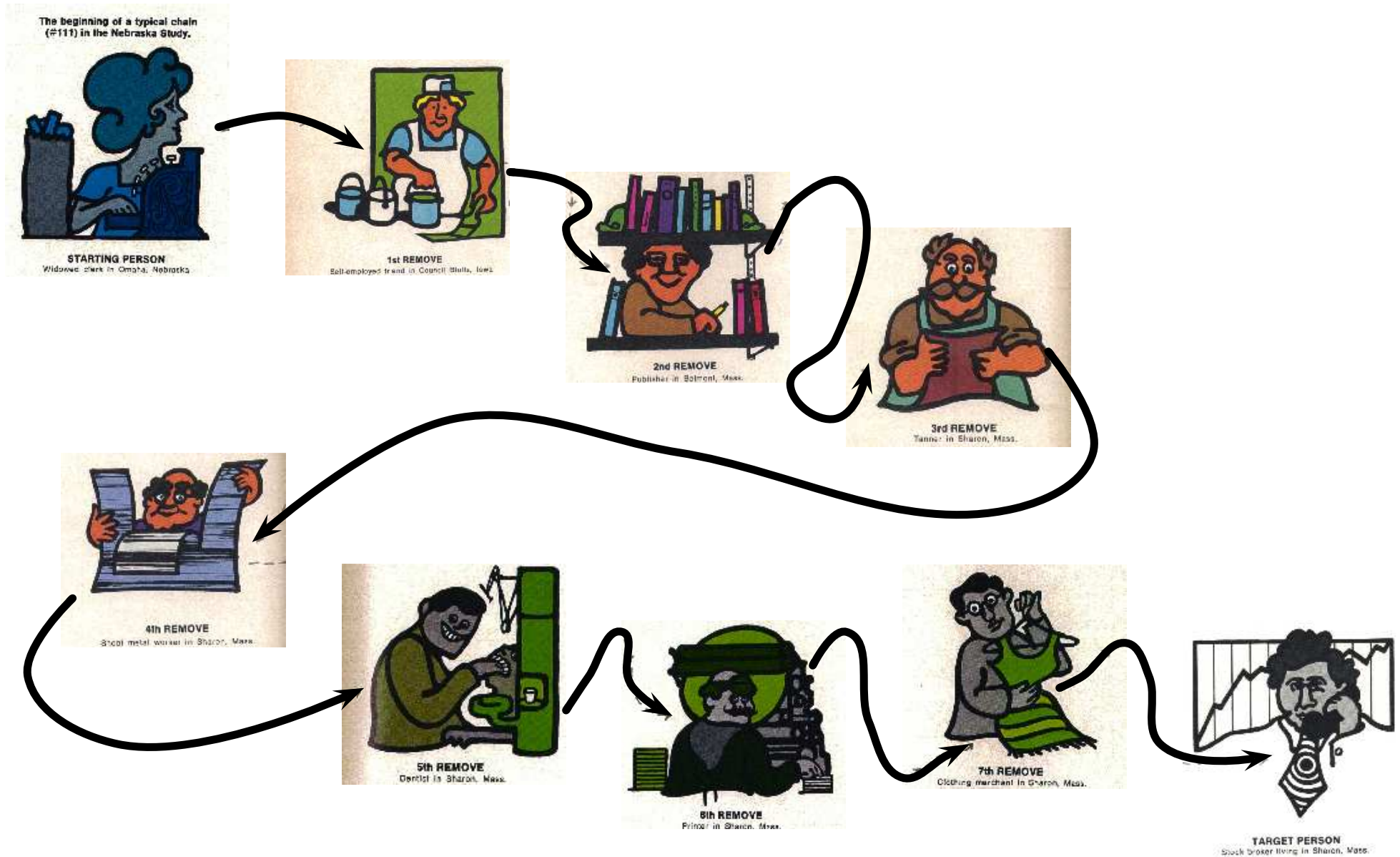
□ Stanley Milgram (アメリカの心理学者)

仮説 世界が知人関係からなるネットワークと考えると、
世界はある意味で小さい。⇒

□ 手紙渡しの実験

- Wichita (Kansas 州) → Boston (Massachusetts 州)
- Omaha (Nebraska 州) → Boston (Massachusetts 州)

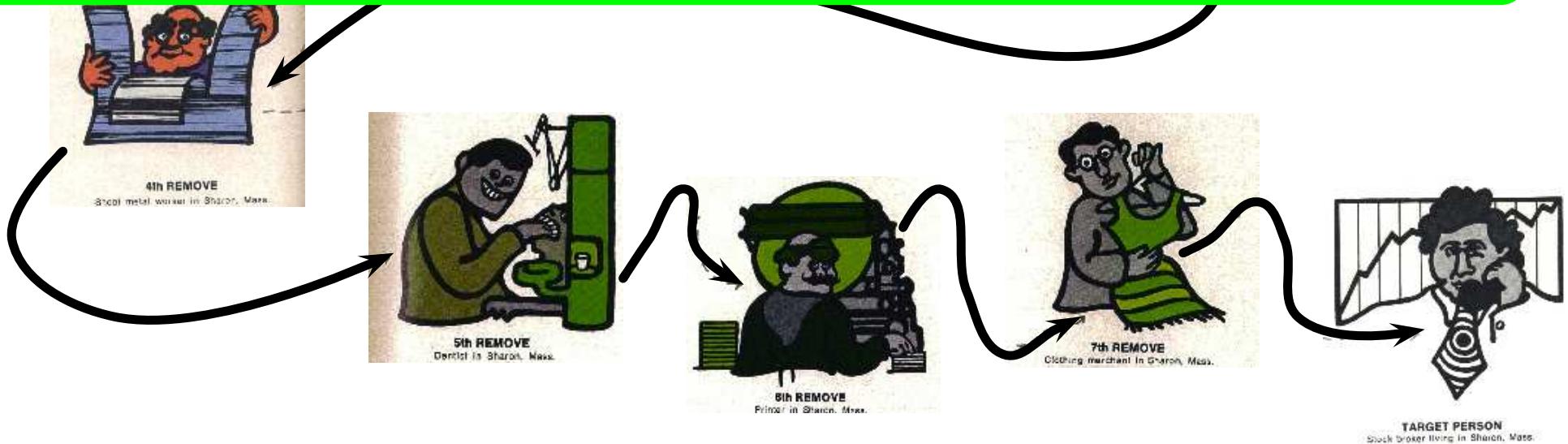
手紙渡しの実験



手紙渡しの実験

The beginning of a typical chain (#111) in the Nebraska Study.

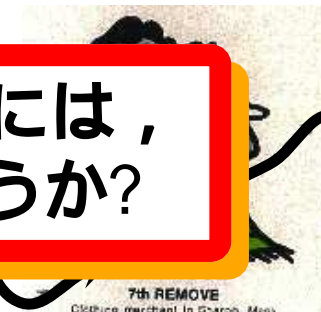
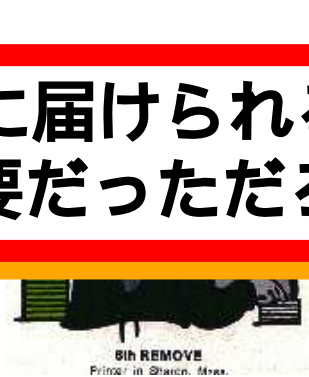
- ❑ 目標人物の名前を知っていたら，直接送付してよい．
 - ❑ 目標人物を知らない場合は，直接連絡をとらずに，目標人物を自分よりよく知っていそうな人に送付する．
- 注 「知っている」 = 「ファーストネームで呼び合う程度」



手紙渡しの実験

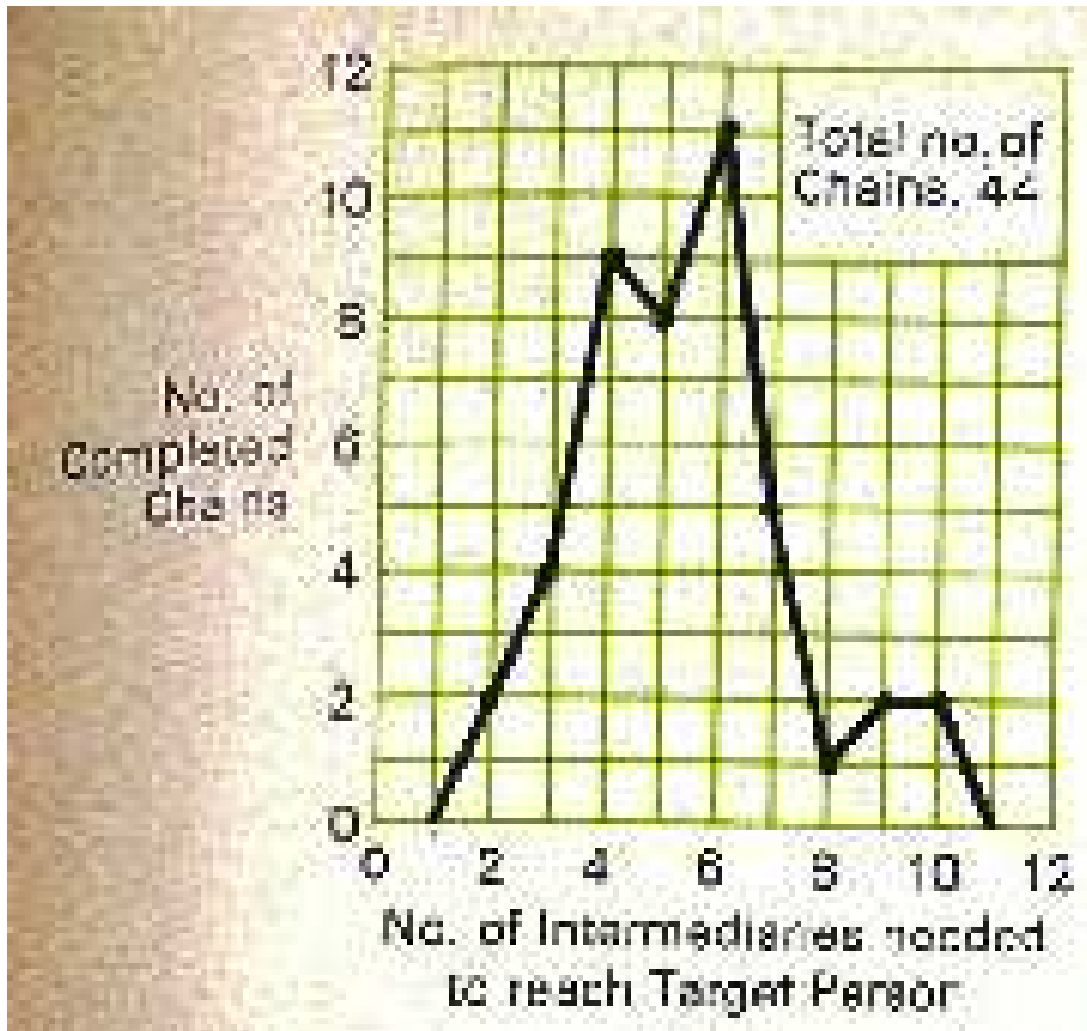
The beginning of a typical chain (#111) in the Nebraska Study.

- ❑ 目標人物の名前を知っていたら，直接送付してよい．
 - ❑ 目標人物を知らない場合は，直接連絡をとらずに，目標人物を自分よりよく知っていそうな人に送付する．
- 注 「知っている」 = 「ファーストネームで呼び合う程度」



手紙が宛先に届けられるには，
平均何人必要だっただろうか？

驚くべき結果



S. Milgram: "The Small-World Problem," Psychology Today, Vol.1, pp.67-67, 1967.

ケビン・ベーコン・ゲーム



□ 俳優の共演関係

- ケビン・ベーコン自身のベーコン数は
- ケビン・ベーコンと共演した俳優のベーコン数は
- ケビン・ベーコンと共演した俳優と共演した俳優のベーコン数は

□ <http://www.cs.virginia.edu/oracle/>

□ 例: ハリソン・フォード

The [Oracle](#) says: [Harrison Ford](#) has a Bacon number of [2](#). [Harrison Ford](#) was in [Clear and Present Danger \(1994\)](#) with [John Lafayette](#). [John Lafayette](#) was in [Loverboy \(2005\)](#) with [Kevin Bacon](#).

ケビン・ベーコン数の分布

ベーコン数	俳優数	累積数
0	1	1
1	1,975	1,976
2	172,390	174,366
3	488,225	662,591
4	117,091	779,682
5	8,192	787,874
6	776	788,650
7	79	788,729
8	3	788,732
平均 2.949	計 788,732 人	

(<http://www.cs.virginia.edu/oracle/> より 2006年7月11日調査)

我々はネットワークの中に生きている

- 対人関係・友人関係
- 俳優の共演関係
- インターネット [コンピュータが物理的に接続]
- World Wide Web [ハイパーリンク]
- 会社間の取引関係
- 遺伝子ネットワーク
- 伝染病 (ペスト, エボラ出血熱, SARS)
- ウイルス (生物/コンピュータ)
- 脳・神経回路網
- 飛行機・道路・鉄道
- 電力輸送配電網
- 流行・噂・口コミ
- 性交渉ネットワーク

現実問題のネットワークは…

□ なぜ、これほどまでに のか？

- 6 次の隔たり (手紙渡しの実験)
- ベーコン数の平均値 2.949

□ 注意

- 6 や 2.949 という
→ ネットワークの ということが大重要
- WWW の場合、平均 (クリック) と言われている
もあまり意味はない (ケビン・ベーコンでなくても良い)
- 他の俳優・女優を中心にした数でも OK



数



数



数



数



数



数

現実世界のネットワークには

- **があるのだろうか？**
- **もしあるとしたら、 だろうか？**
- **それは されるのだろうか？**
- **このようなことを考えると できるのか？**
- **と関係があるのか？**

↓ **方法論**



グラフ理論

□ 純粋数学の一分野 (1736 年以降)

- Euler, Cauchy, Hamilton, Cayley, Kirchhoff ...
- Erdős, Rényi (random network, 1950's)

□ 応用への拡がり (1998 年以降)

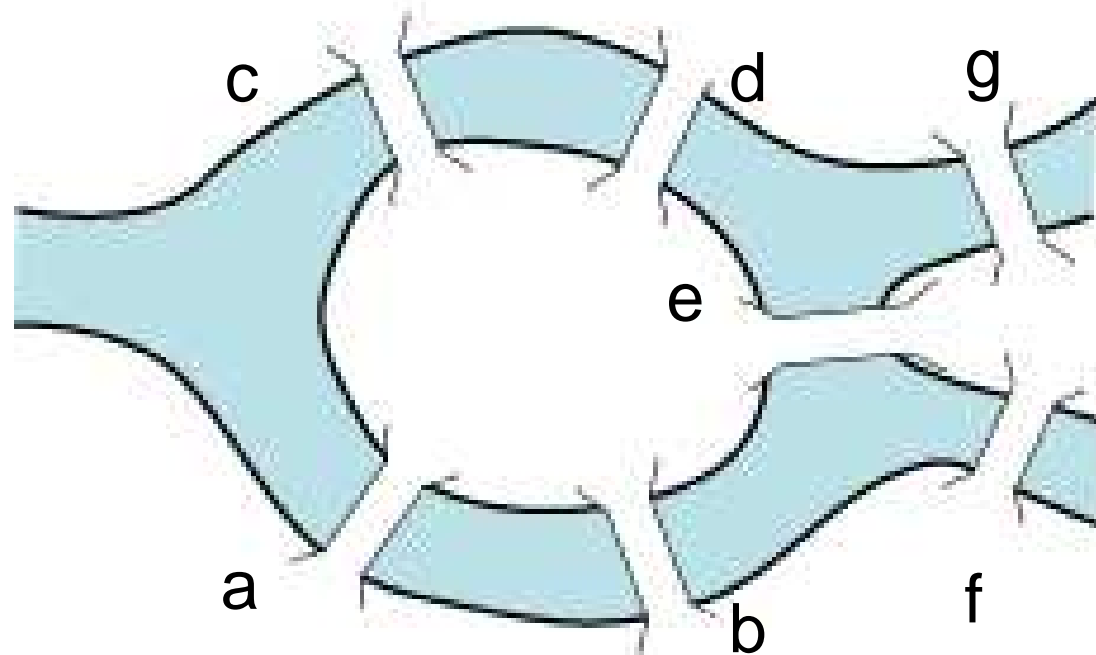
- Watts and Strogatz (small world network, 1998)
- Barabási and colleagues (scale free network, 1999)

□ グラフ (graph) とは？

- 繋がりを V と E で表現 .
例えば, 人を V すると, 友人関係は E で表される .
- 人と友人関係に限らず, いろいろなネットワークにおける
繋がりを V したものの

グラフ理論のはじまり (1736)

ケーニヒスベルグ (プロイセン) の橋 (1875 年以前)



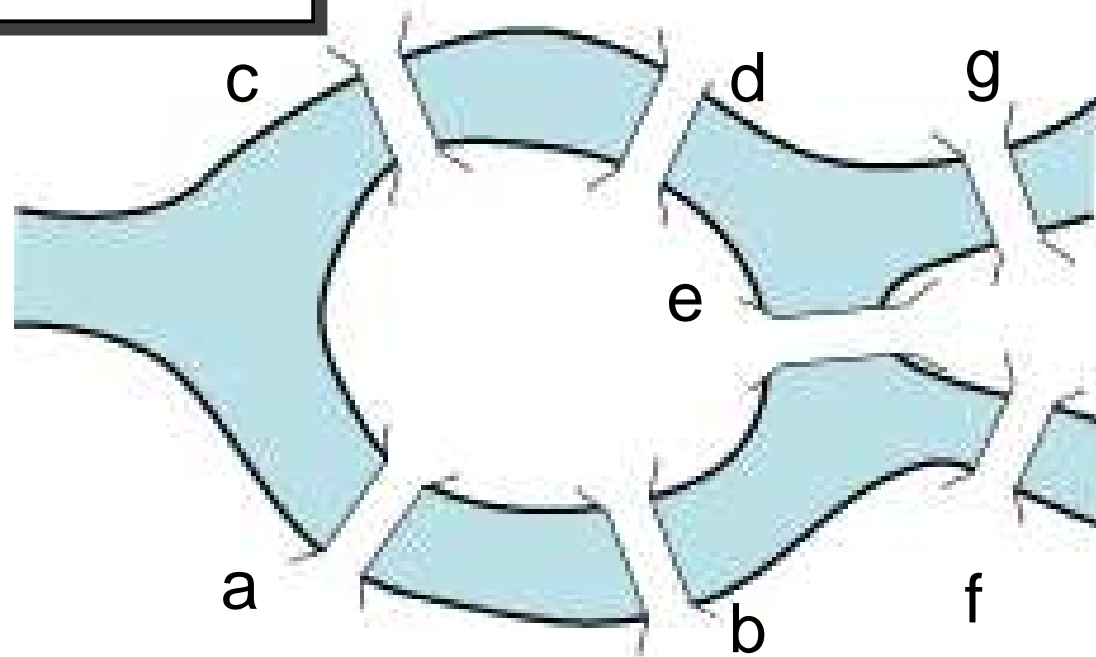
どの橋も二度渡ることなく、全ての橋を渡ることにはできるか？

⇒ 一筆書きできるか、ということ。

Euler の証明 (1736)

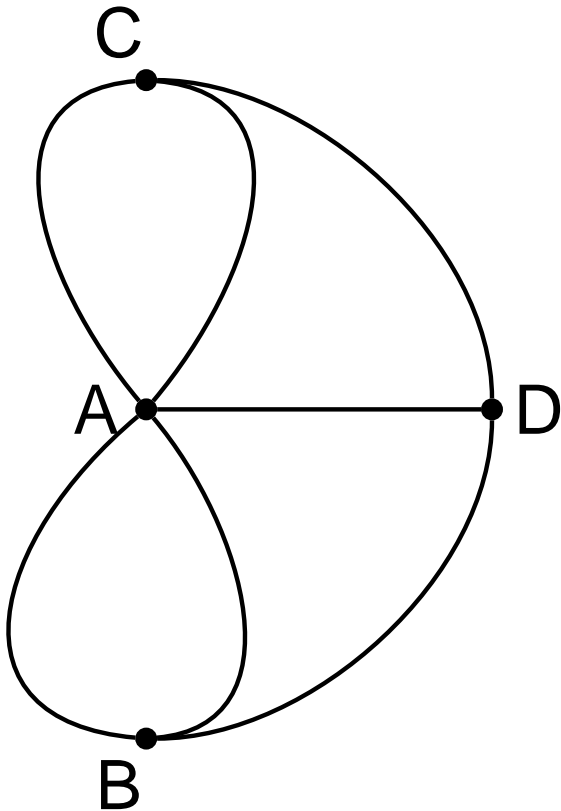
□ 中州, 島 ⇒

□ 橋 ⇒



演習

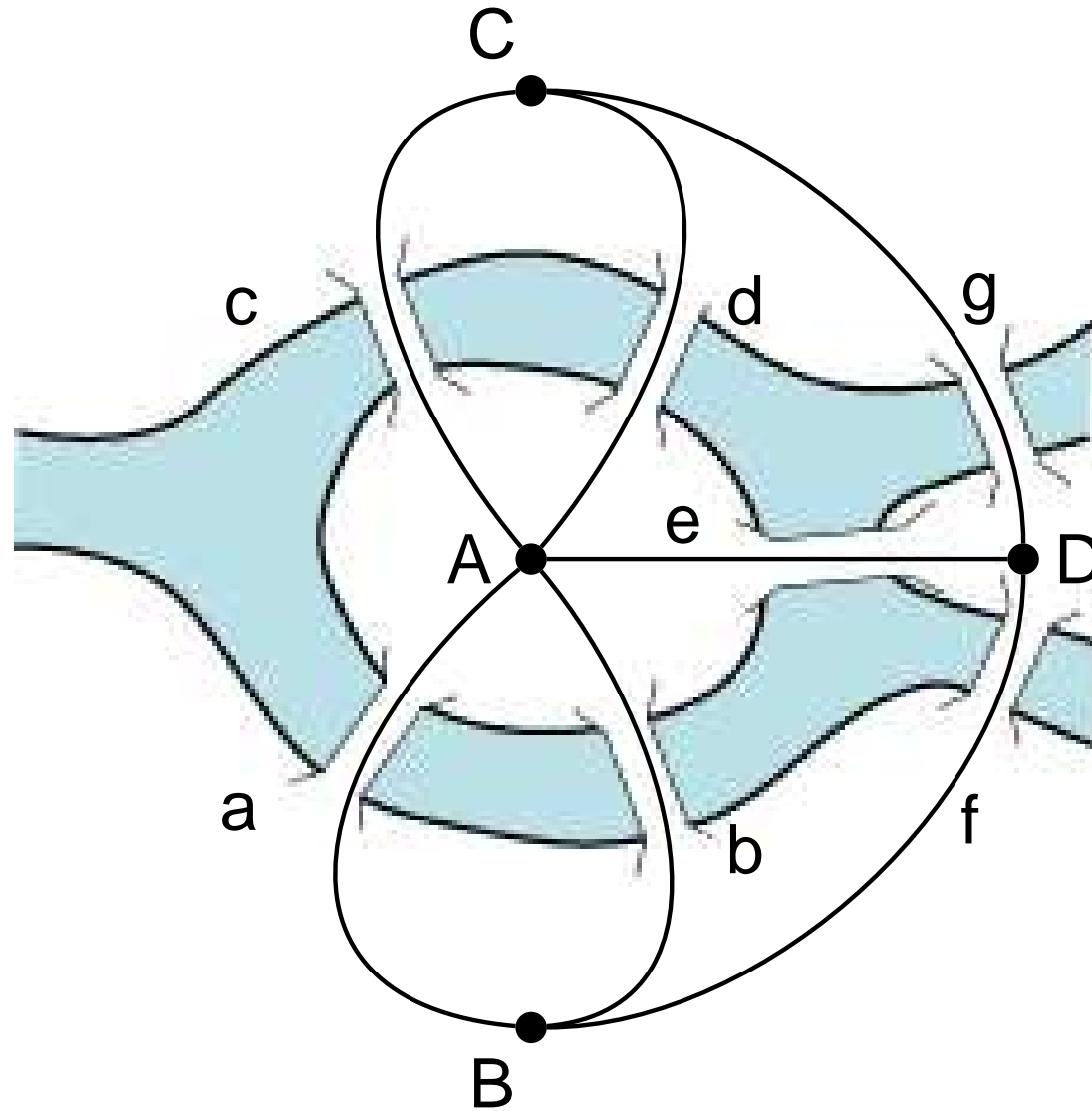
- ケーヒニスベルグの橋問題において，一筆書きの解は存在しないことを証明しなさい．



Euler の証明 (1736)

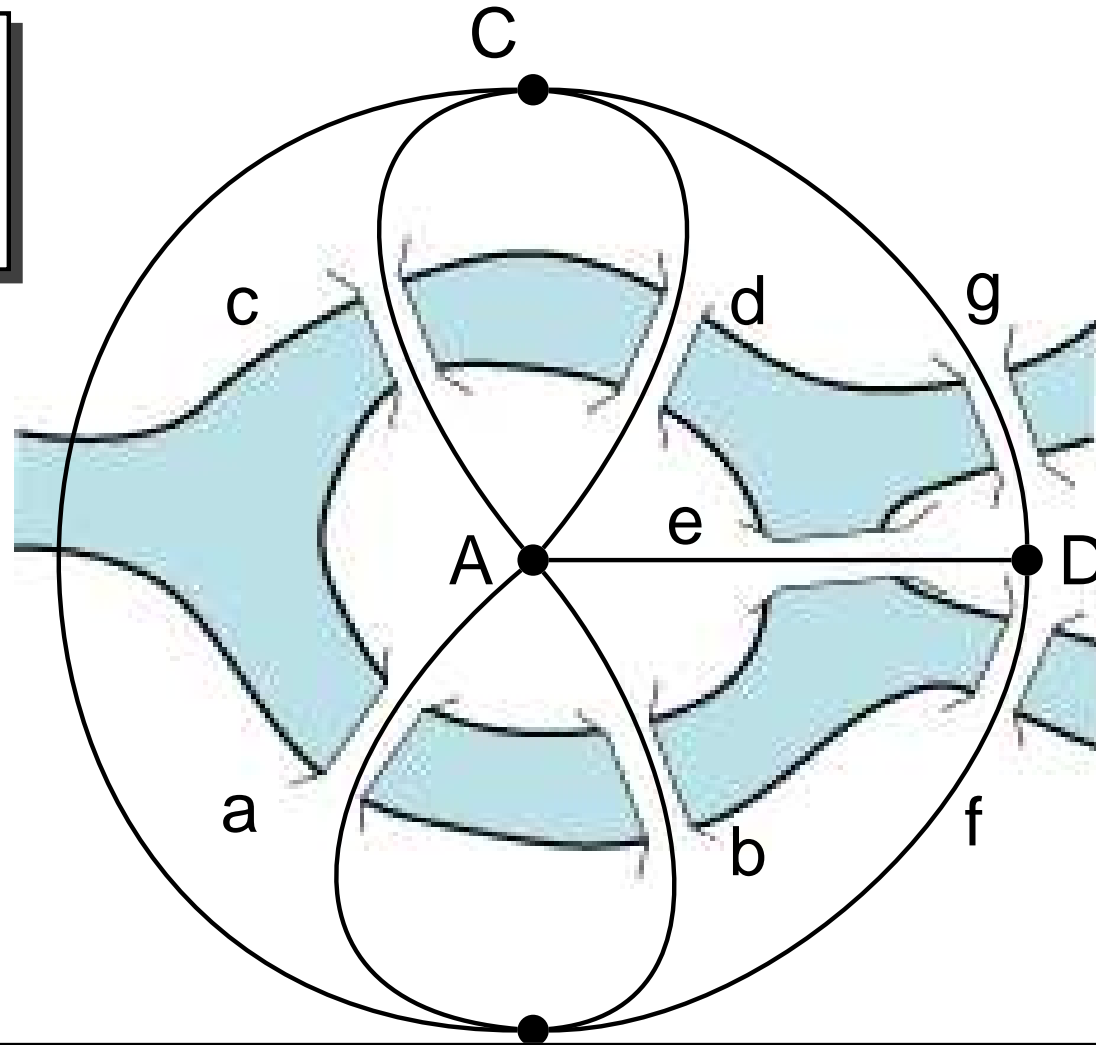
- 接続された枝数が奇数である頂点は、
か で
あるべき。
- 一筆書きで全ての橋を一度だけ通る経路には、出発点と終着点がつづ。
- 従って、次数が奇数の頂点をあ
るグラフには、望み
(一筆書き) の経路は
.

1875年に新しい橋が...



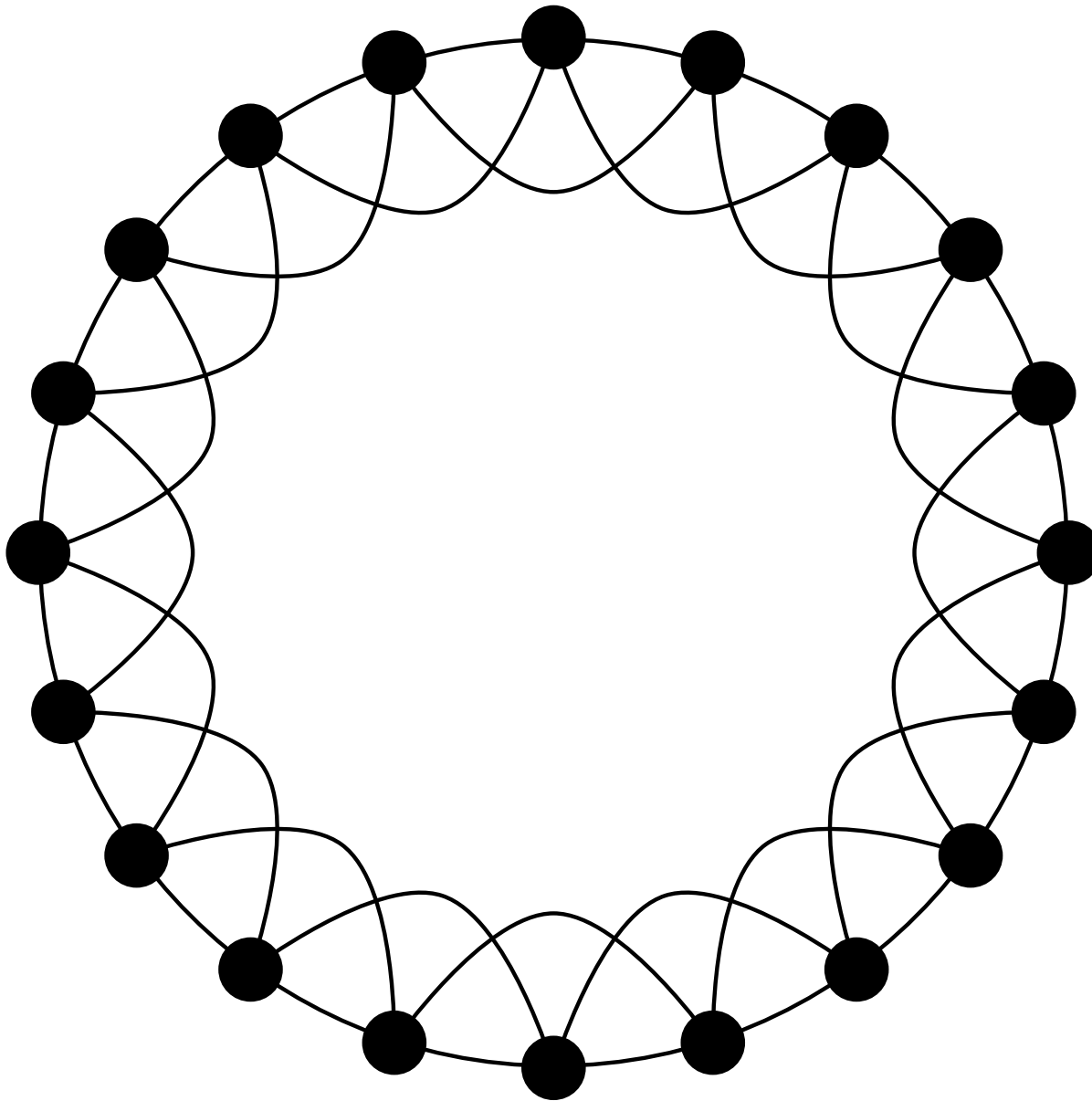
グラフを用いた抽象化により …

我々が住む世界を
理解するための鍵
になり得る

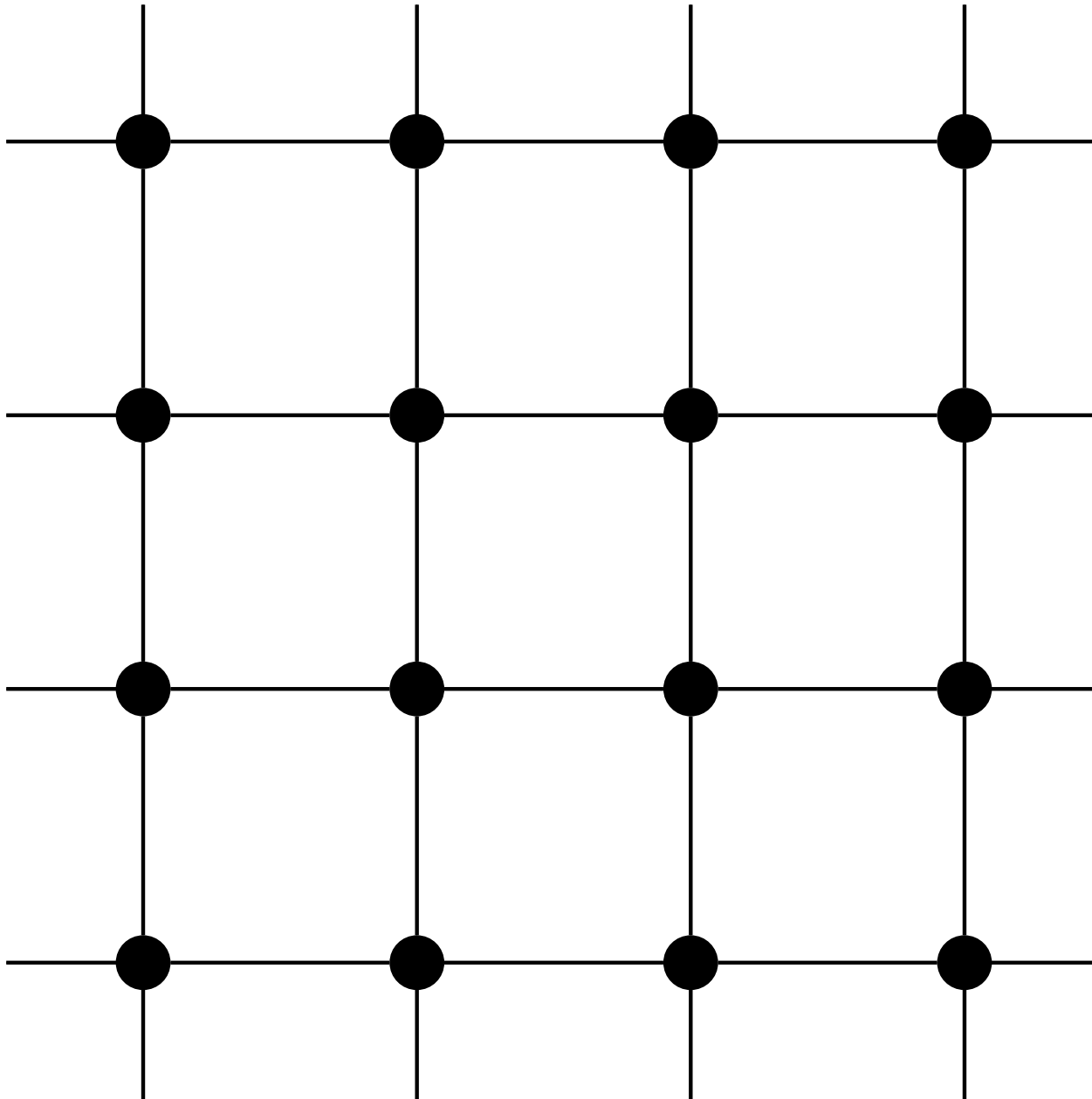


構造に加えられた小さな変化が、
それまで隠されていた新たな可能性を生み出す

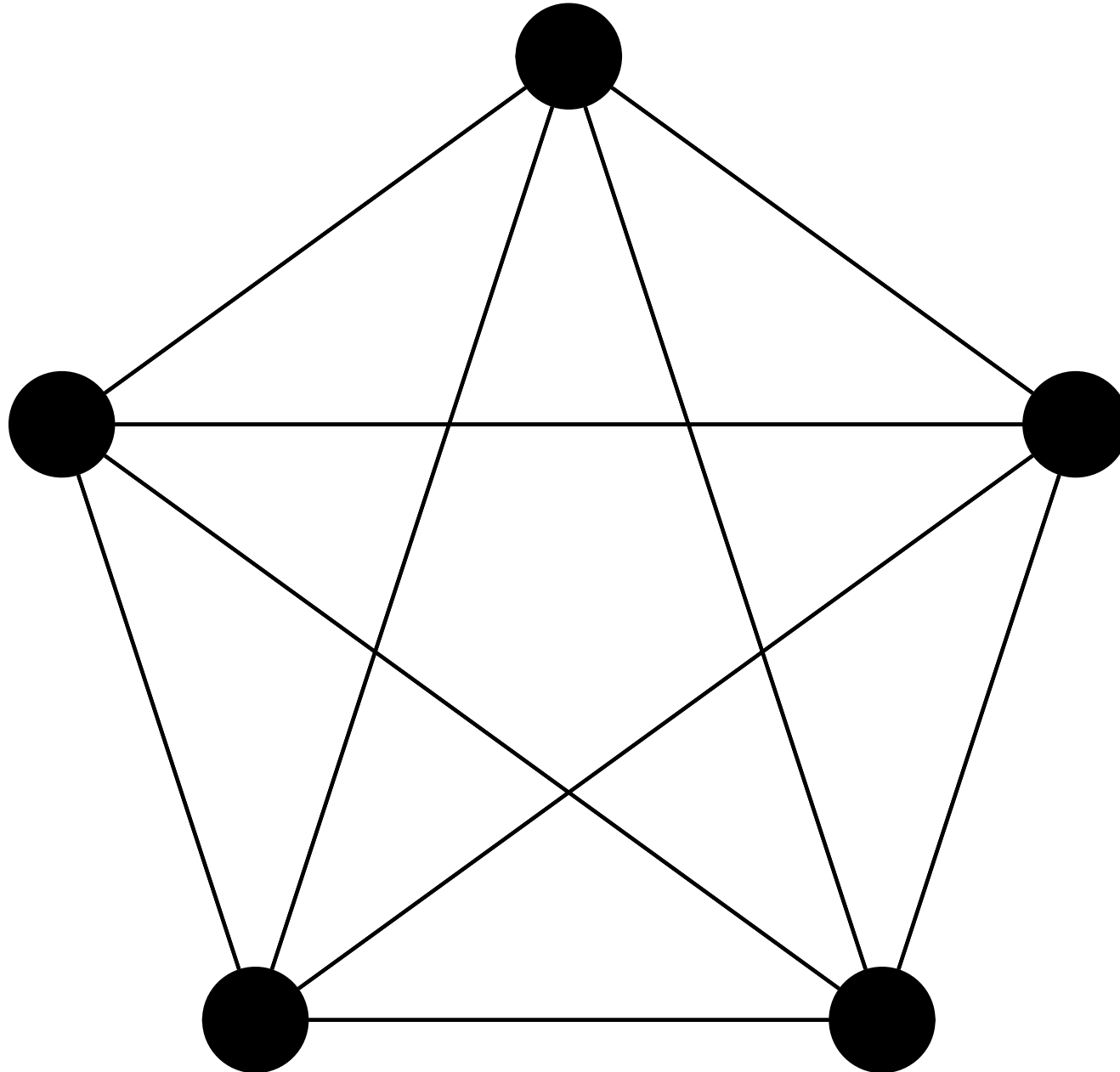
規則的なグラフの例1



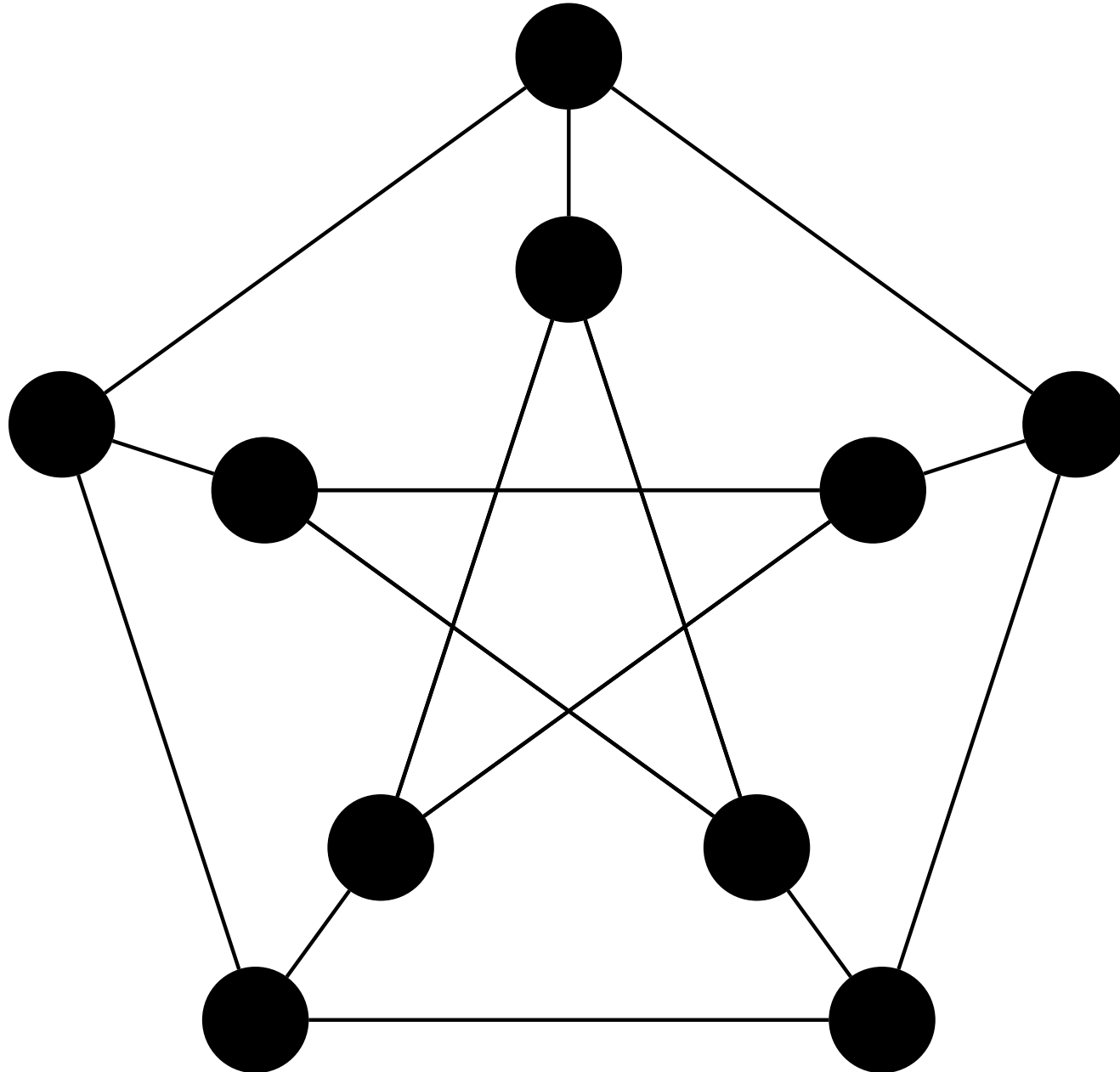
規則的なグラフの例2



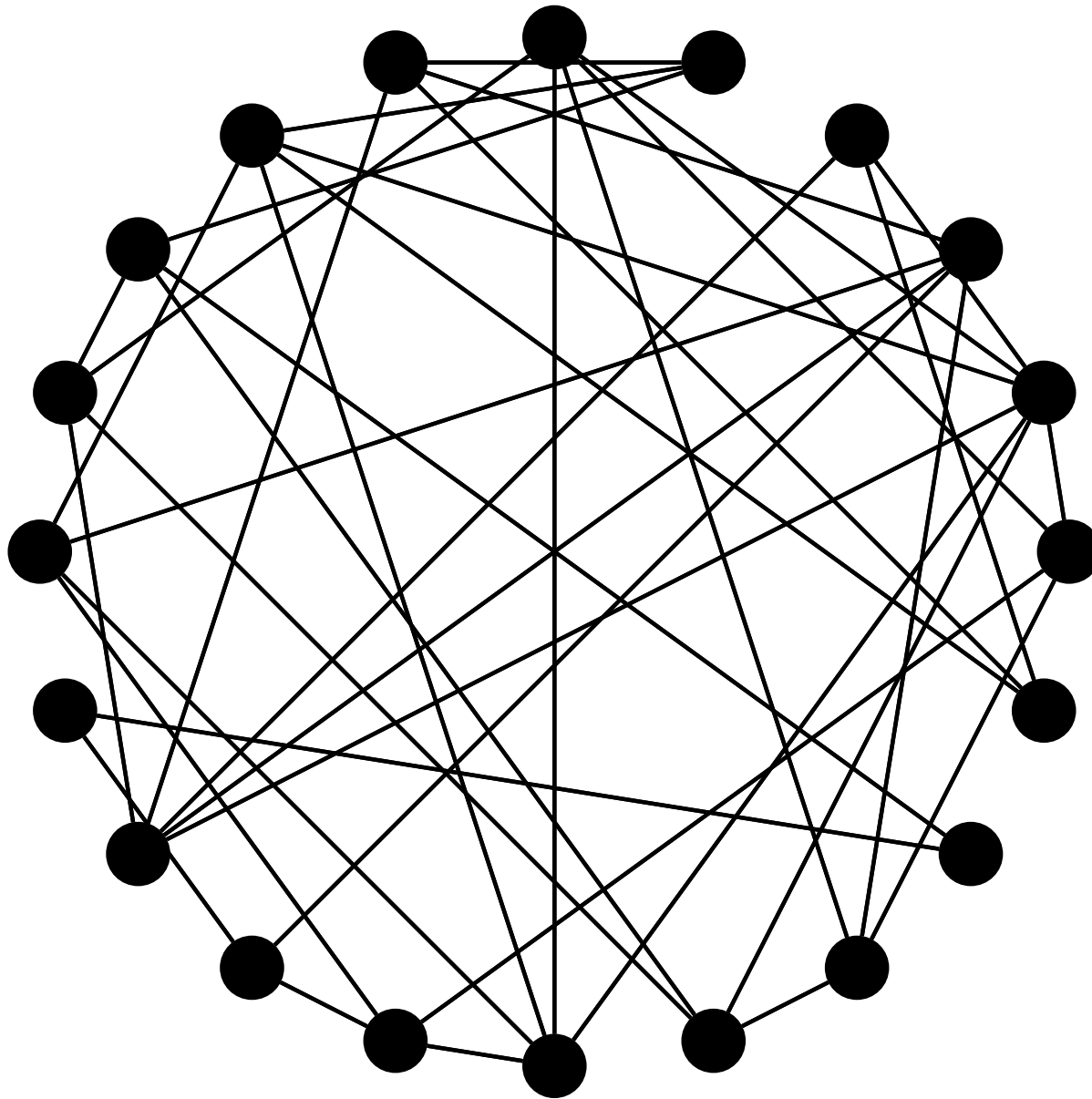
完全グラフ



ピーターセングラフ



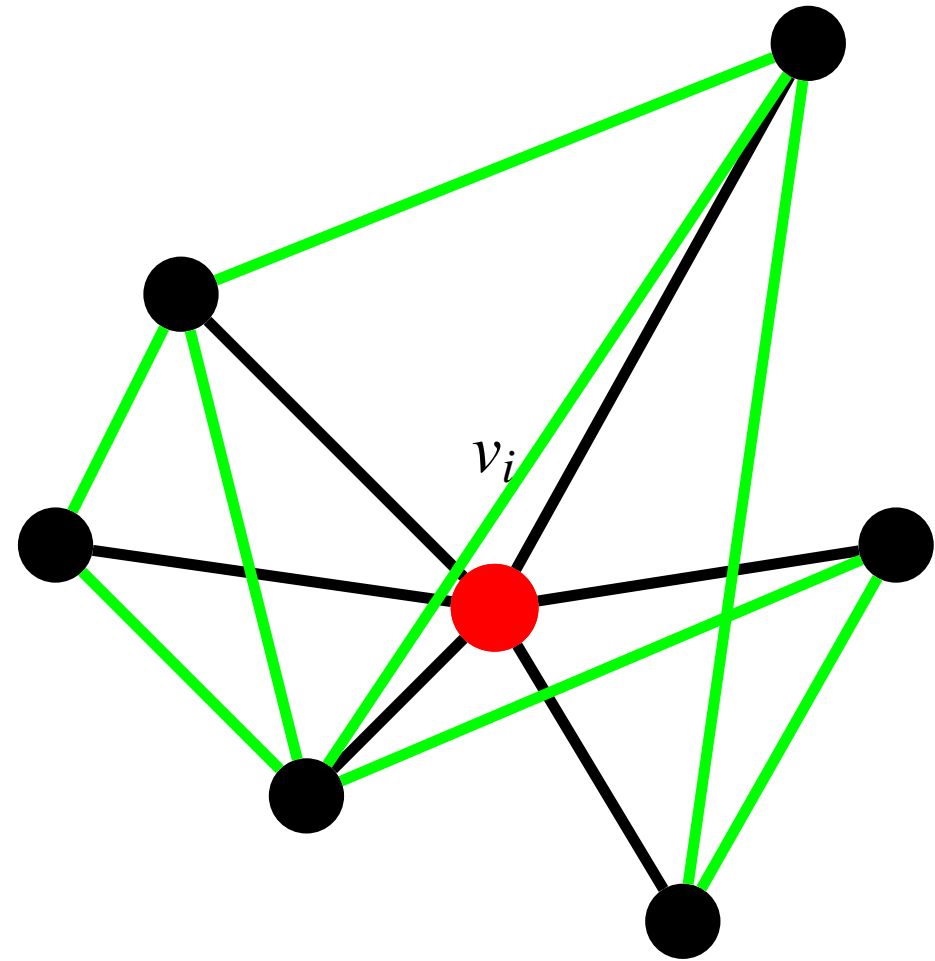
ランダムグラフ (20世紀半ば以降)



ネットワークの構造を特徴づける指標

- **頂点数** (the number of vertices) $N \rightarrow$ ネットワークサイズ
- **次数** (degree) $k_i (i = 1, 2, \dots, N)$
 \rightarrow 頂点 v_i から出ている枝数 = 頂点 v_i に **頂点数**
- **次数分布** (degree distribution) $p(k)$
- **平均次数** (degree) $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k p(k)$
- **平均頂点間距離** (average path length) L
ある頂点から別の頂点に行くために通過しなければならない
の枝数を距離とする
- **クラスタリング係数** (clustering coefficients) C
友達と友達は、 **である** ()

クラスタリング係数



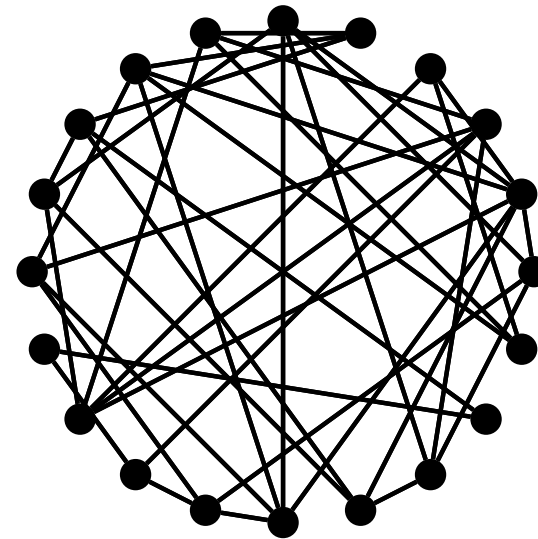
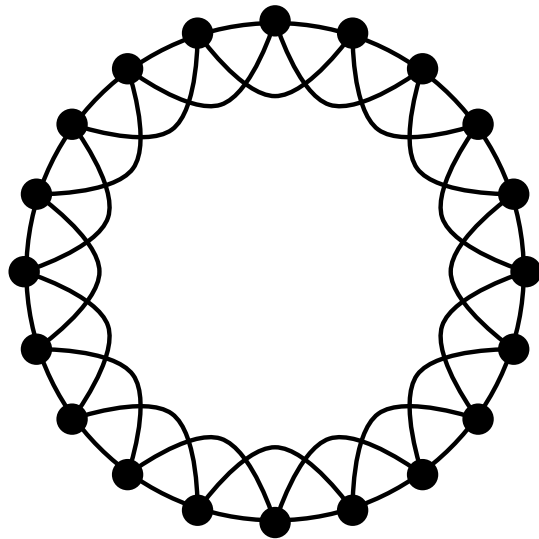
- 頂点 v_i の隣接頂点数は
 - v_i の隣接頂点が全て結合した場合の枝の数は
 - この例では、実際には 本
 - v_i のクラスタリング係数 C_i
-
- グラフ全体のクラスタリング係数 C は

演習

- 以下のグラフの頂点数，平均次数，平均頂点間距離，クラスタリング係数を求めなさい。
 - 規則的なグラフの例 1
 - ピーターセングラフ
 - 完全グラフ

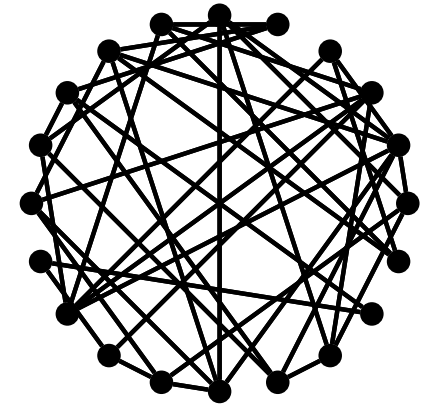
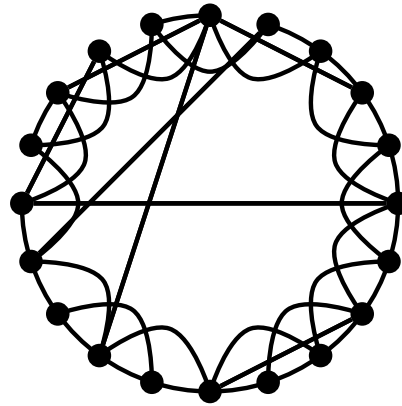
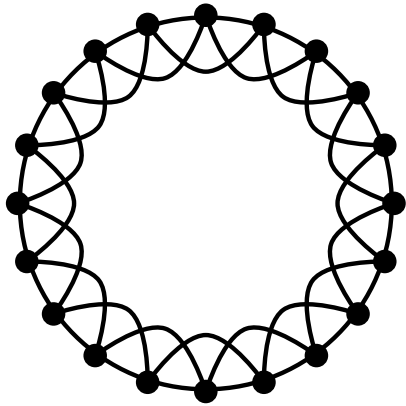
現実世界のネットワーク構造は？

- 『規則的』ではない。∴ 規則的なネットワークでは、
– 平均頂点間距離が \Rightarrow でない
- 『ランダム』でもない。∴ ランダムネットワークでは
– クラスタリング係数は \Rightarrow 友達と友達が、 \Rightarrow になってしまう



Random Rewiring によるスモールワールド化

(Watts and Strogatz, 1998)



$p = 0$

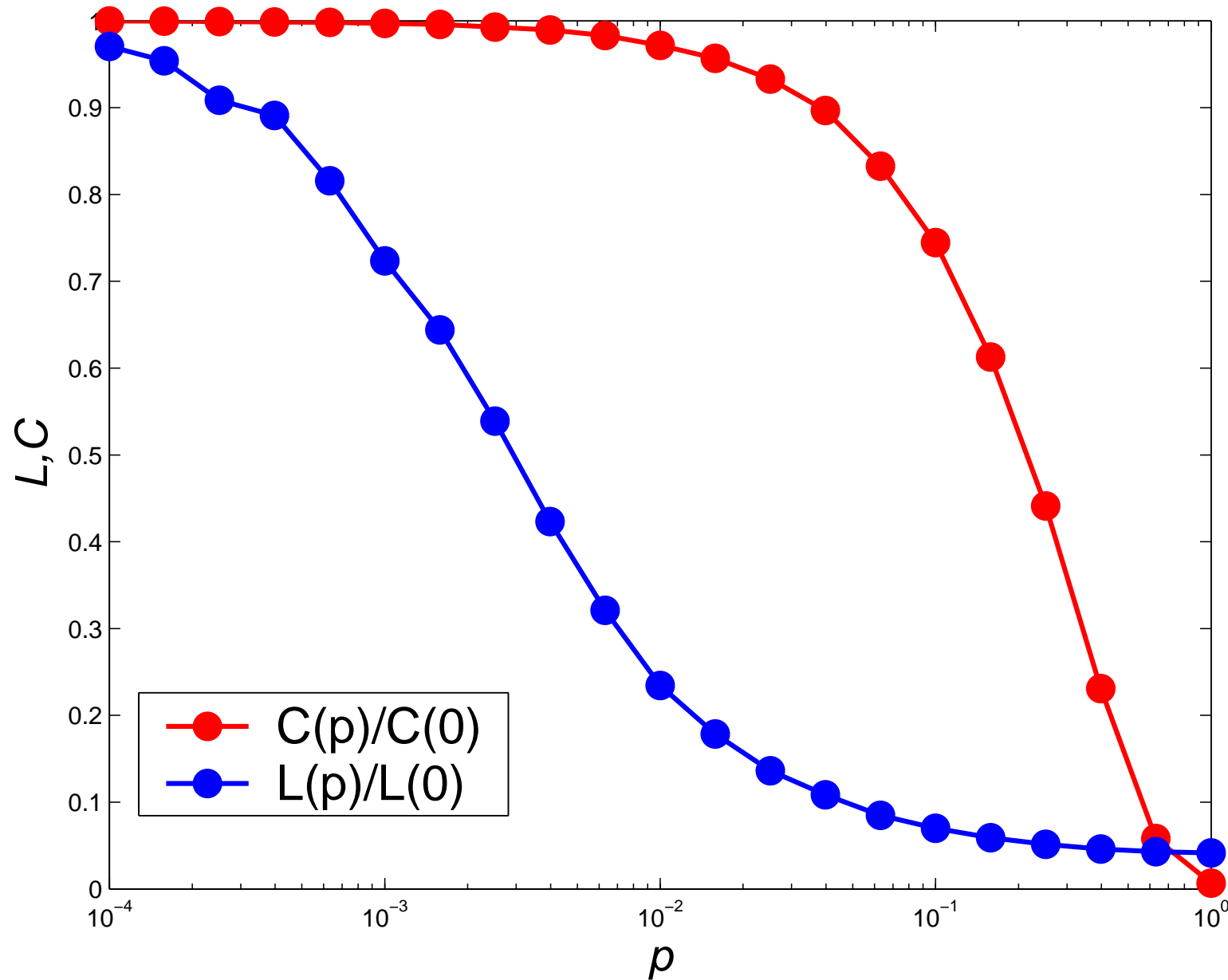
各枝を確率 p で繋ぎ変える

$p = 1$

random rewiring

規則的でもランダムでもない
を有するネットワーク

Random Rewiring によるスモールワールド化



現実世界のスモールワールドネットワーク

□ 平均頂点間距離 L が

→

と同じ

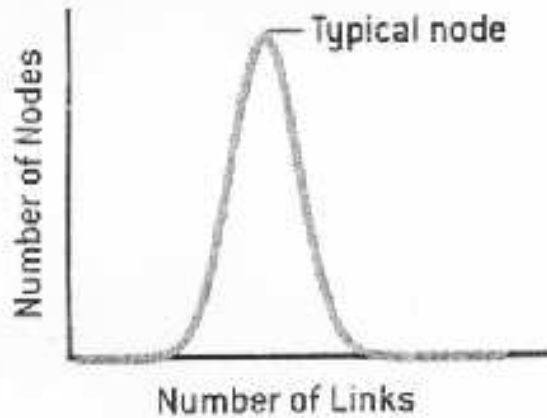
□ クラスタ性 C がランダムネットワークに比べて

→

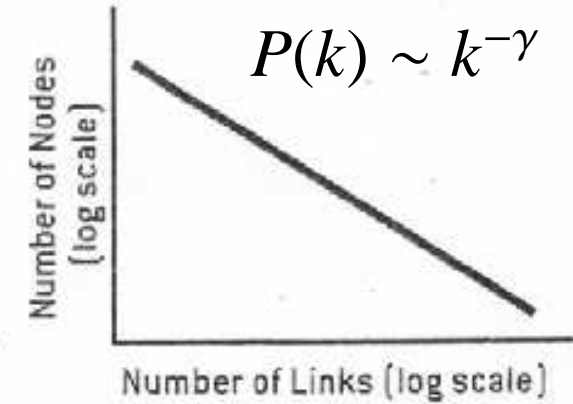
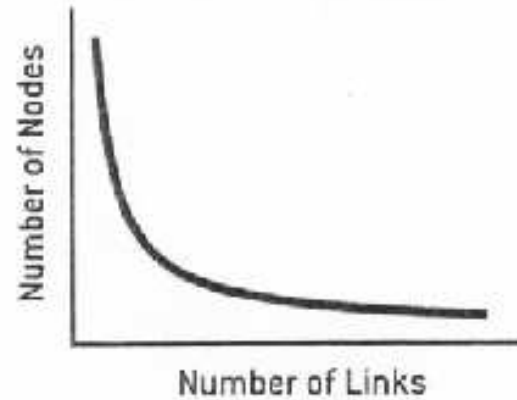
	L	L_R	L/L_R	C	C_R	C/C_R
映画俳優	3.65	2.99	1.22	0.79	0.00027	2926.0
送電網	18.7	12.4	1.51	0.080	0.005	16.0
線虫	2.65	2.25	1.18	0.28	0.05	5.6

ところが、次数分布は …

ここまでのネットワーク



実際のネットワーク

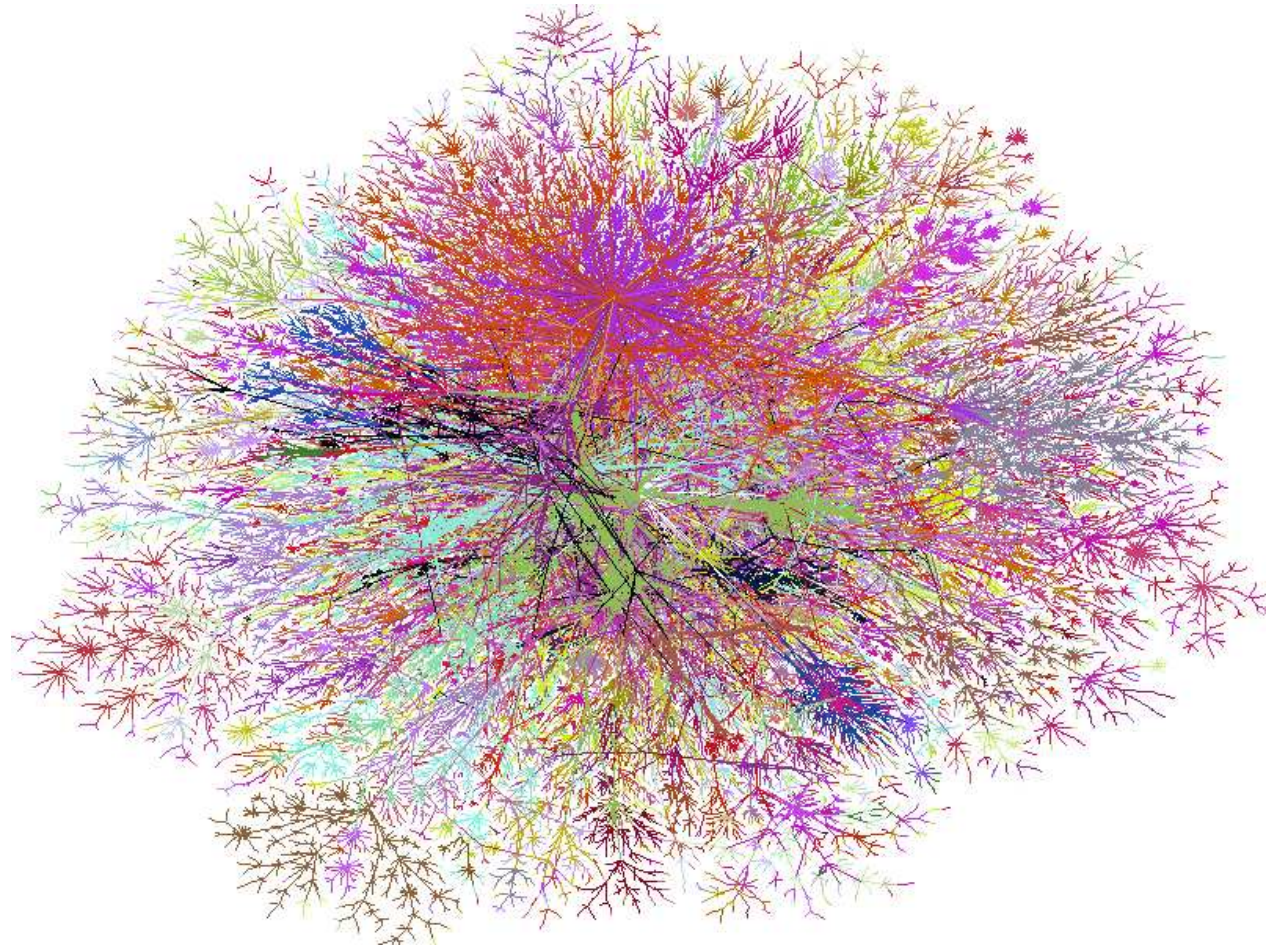


- ❑ (多数のリンクを持つ) の存在
- ❑ (になることが多い)



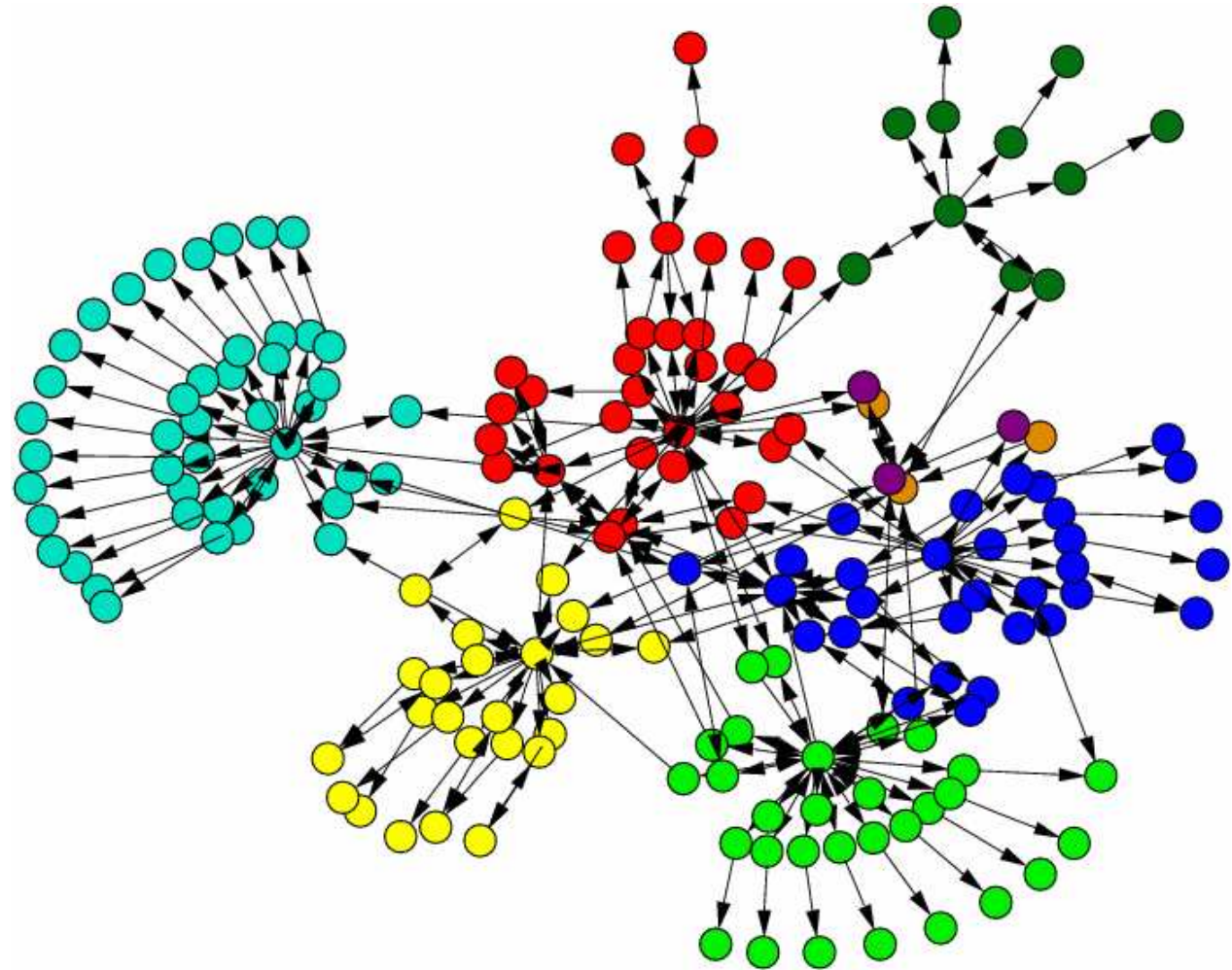
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



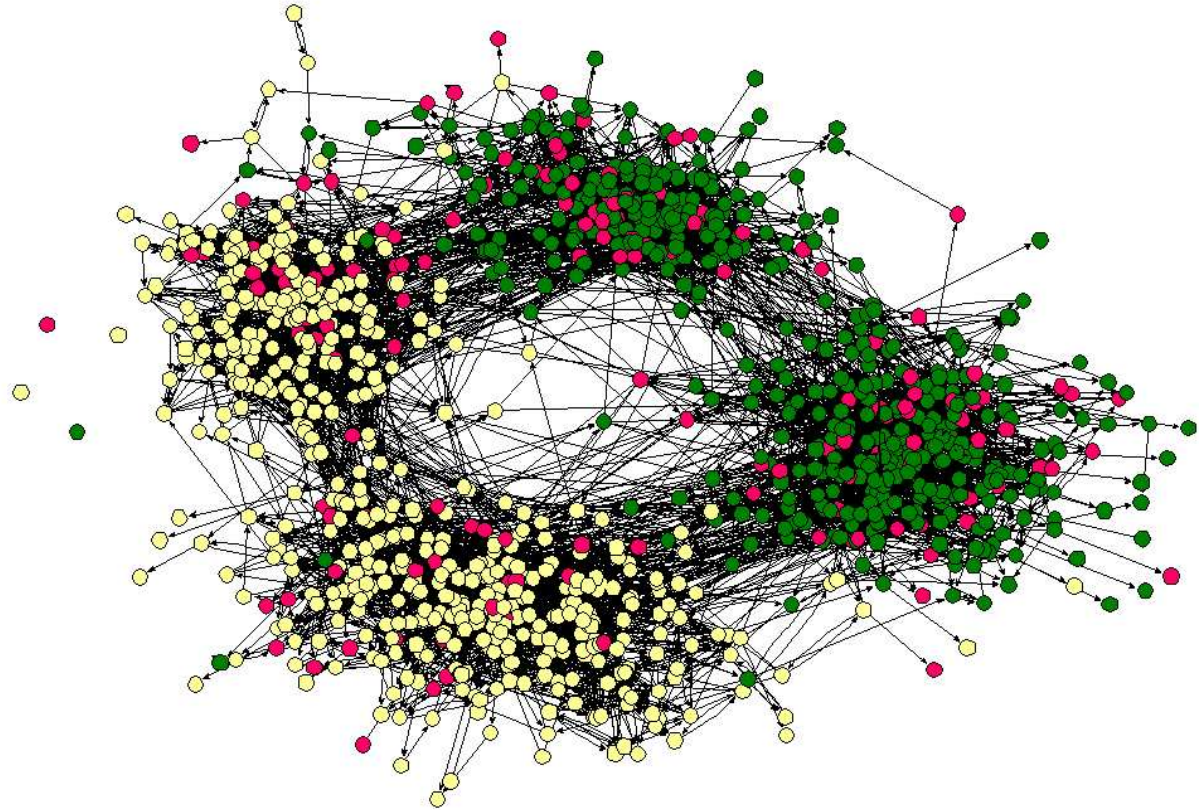
実際のネットワーク構造

- インターネット
- **ウェブページ**
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



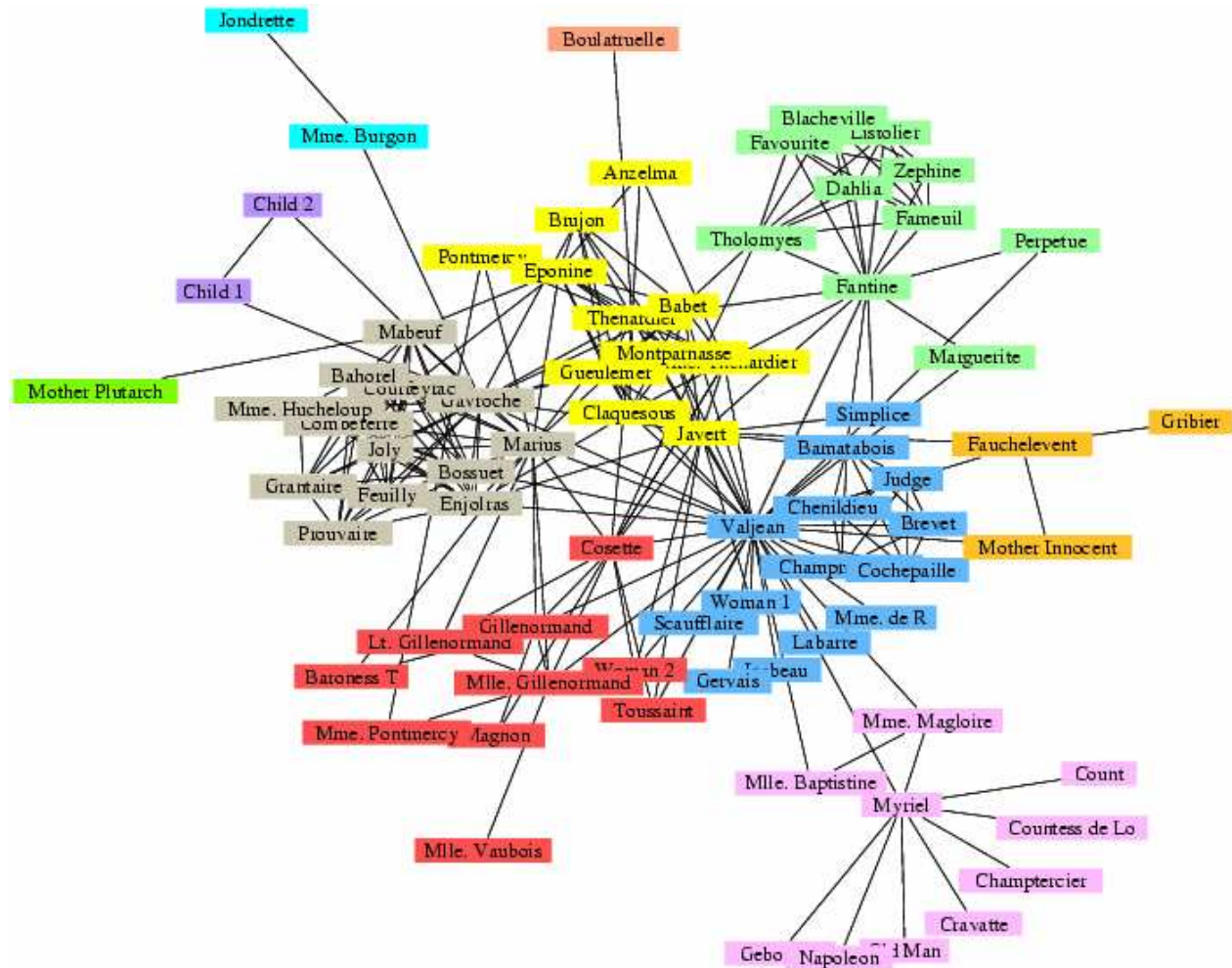
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- **友人関係**
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



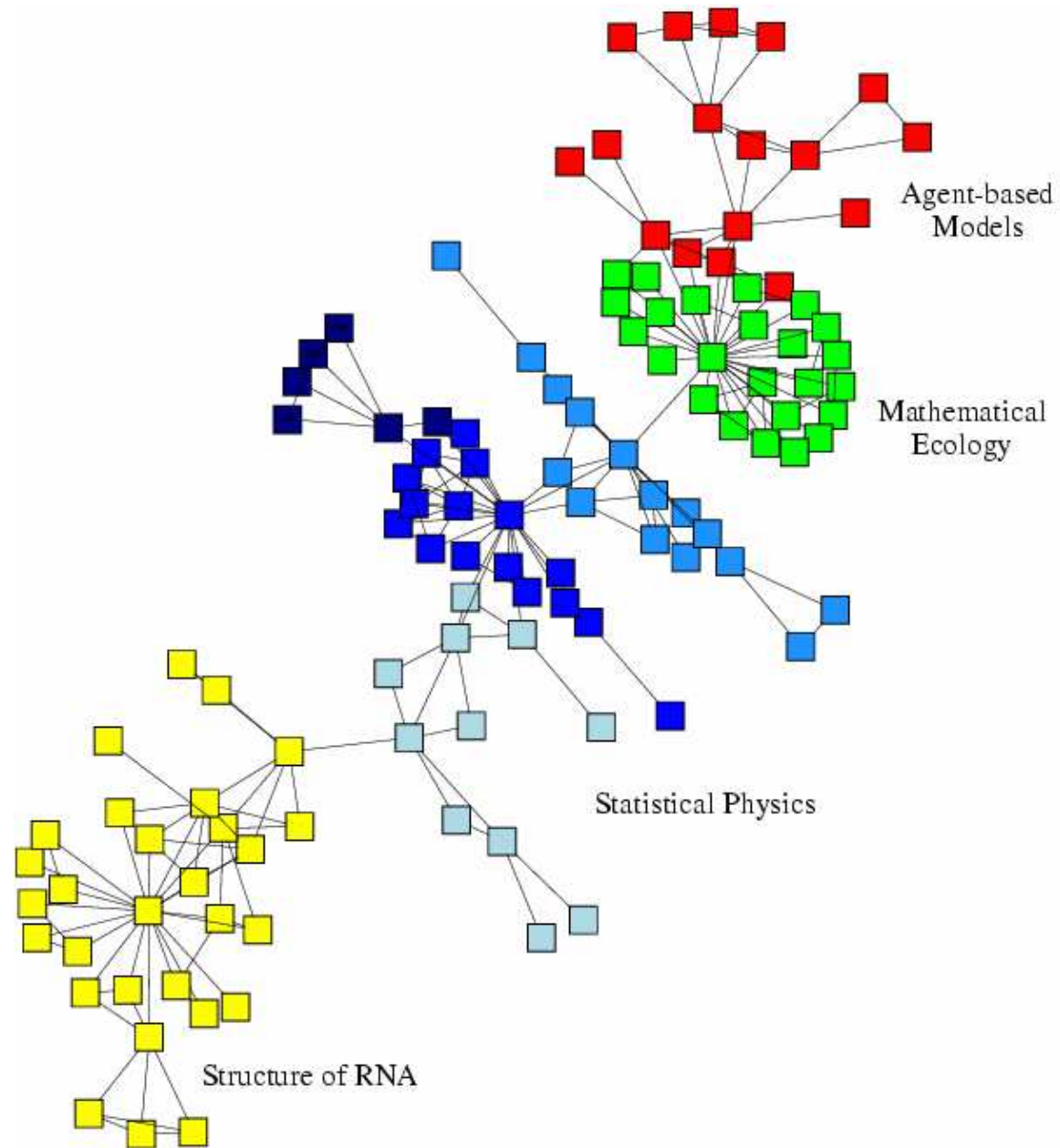
実際のネットワーク構造

- ❑ インターネット
- ❑ ウェブページ
- ❑ 友人関係
- ❑ **ああ無情**
- ❑ 共同研究
- ❑ 結核感染
- ❑ 性交渉



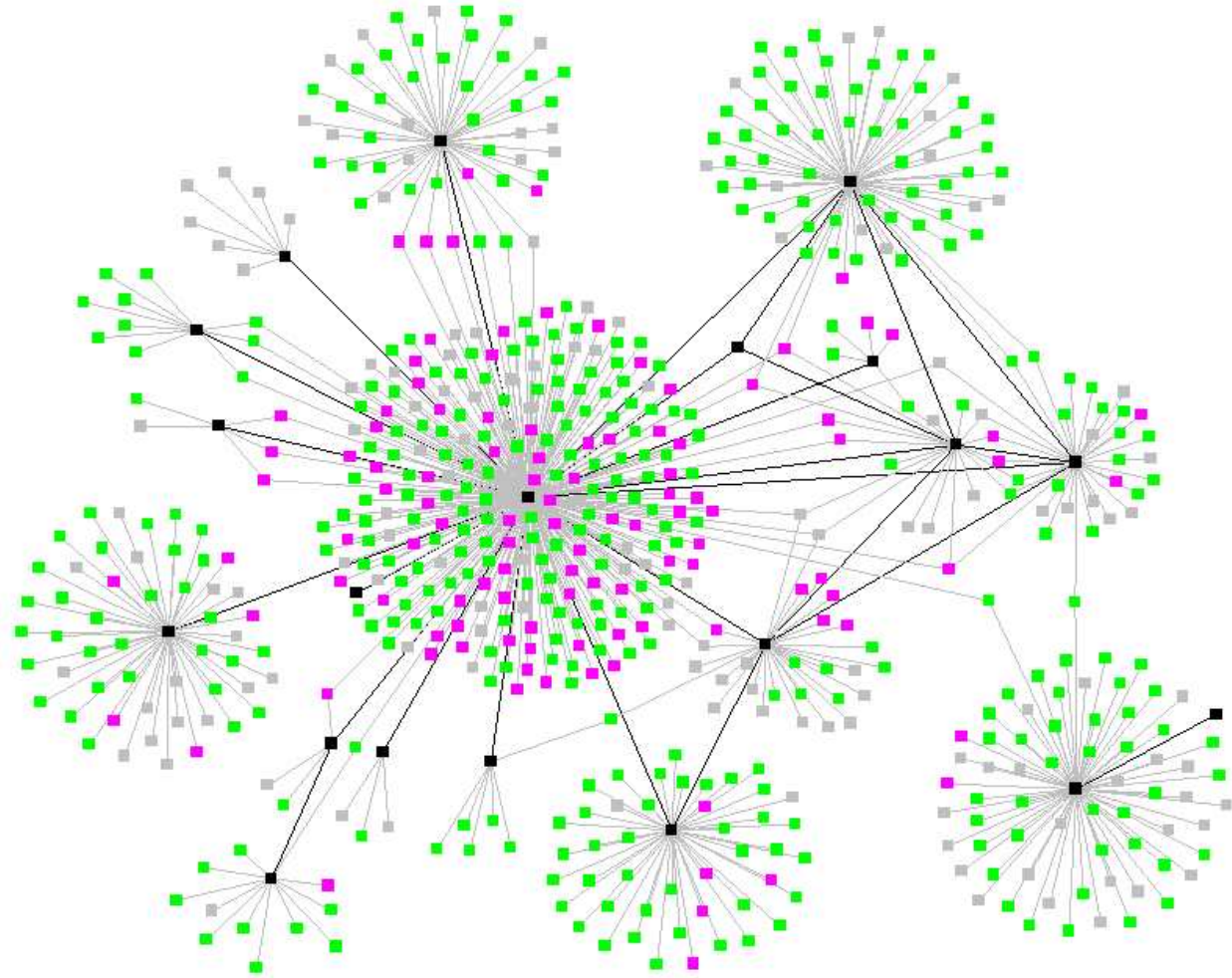
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉



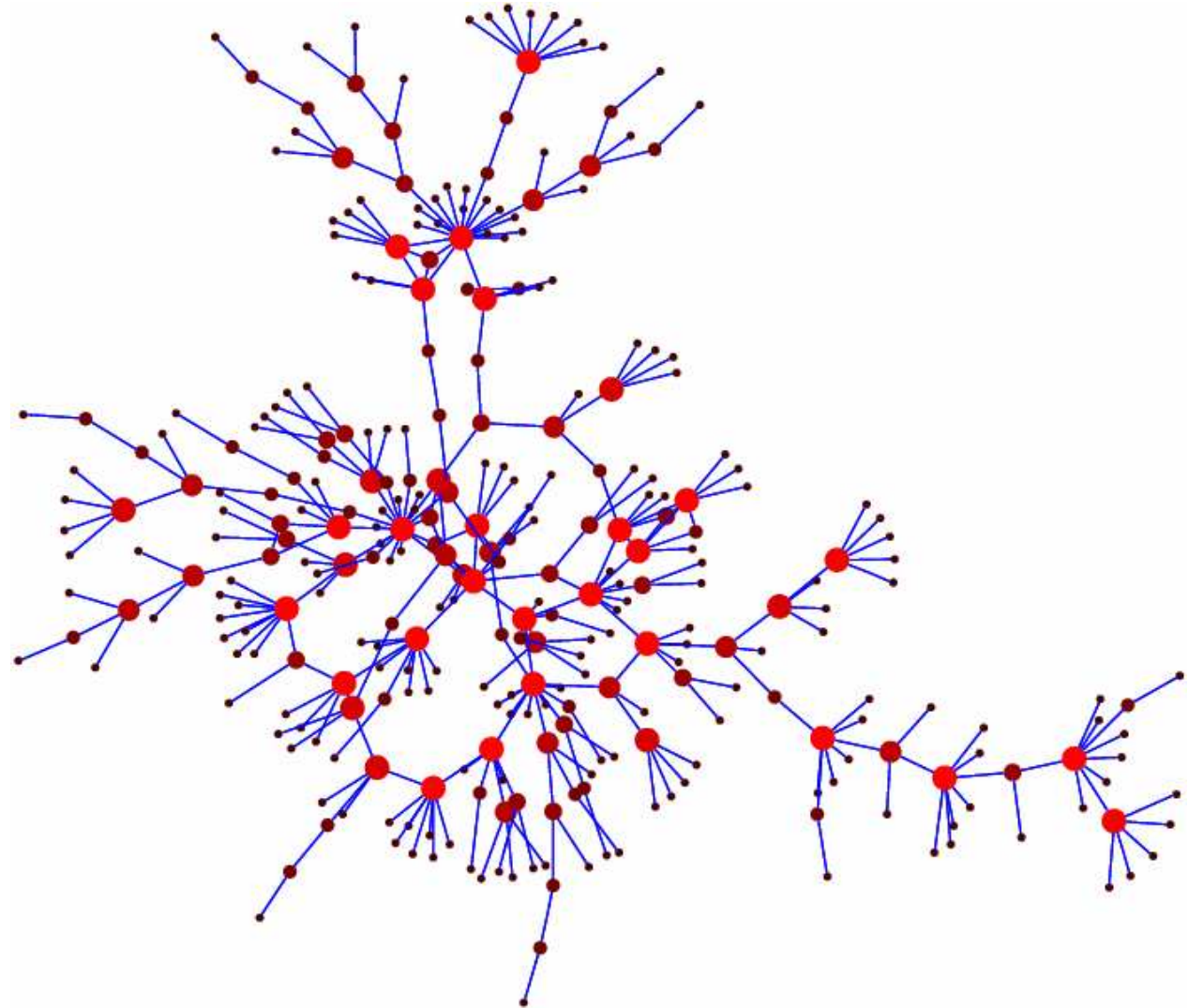
実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- **結核感染**
- 性交渉



実際のネットワーク構造

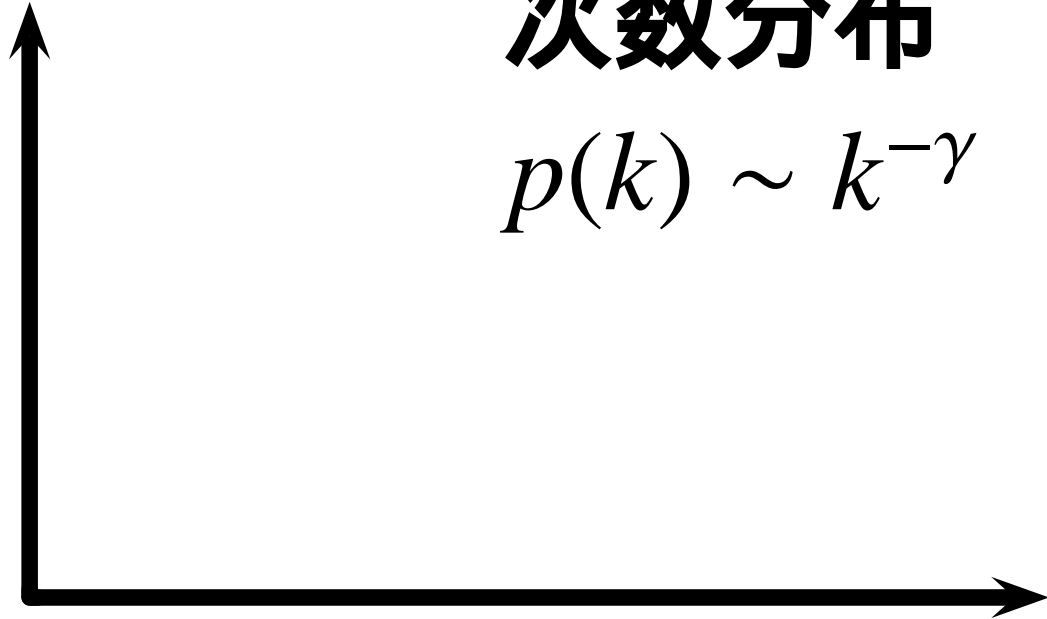
- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- **性交渉**



実際のネットワーク構造

- インターネット
- ウェブページ
- 友人関係
- ああ無情
- 共同研究
- 結核感染
- 性交渉

頂点数 $p(k)$ (対数軸)



次数分布

$$p(k) \sim k^{-\gamma}$$

度数 k (対数軸)



スケール・フリー性を生み出すには？

- ネットワークは **している**
 - ⇒ ネットワークに **頂点が加えられていく**
 - インターネット
 - WWW

- **頂点は** **頂点に接続する傾向がある**
 - ⇒
 - Yahoo
 - Google

スケールフリーネットの作り方

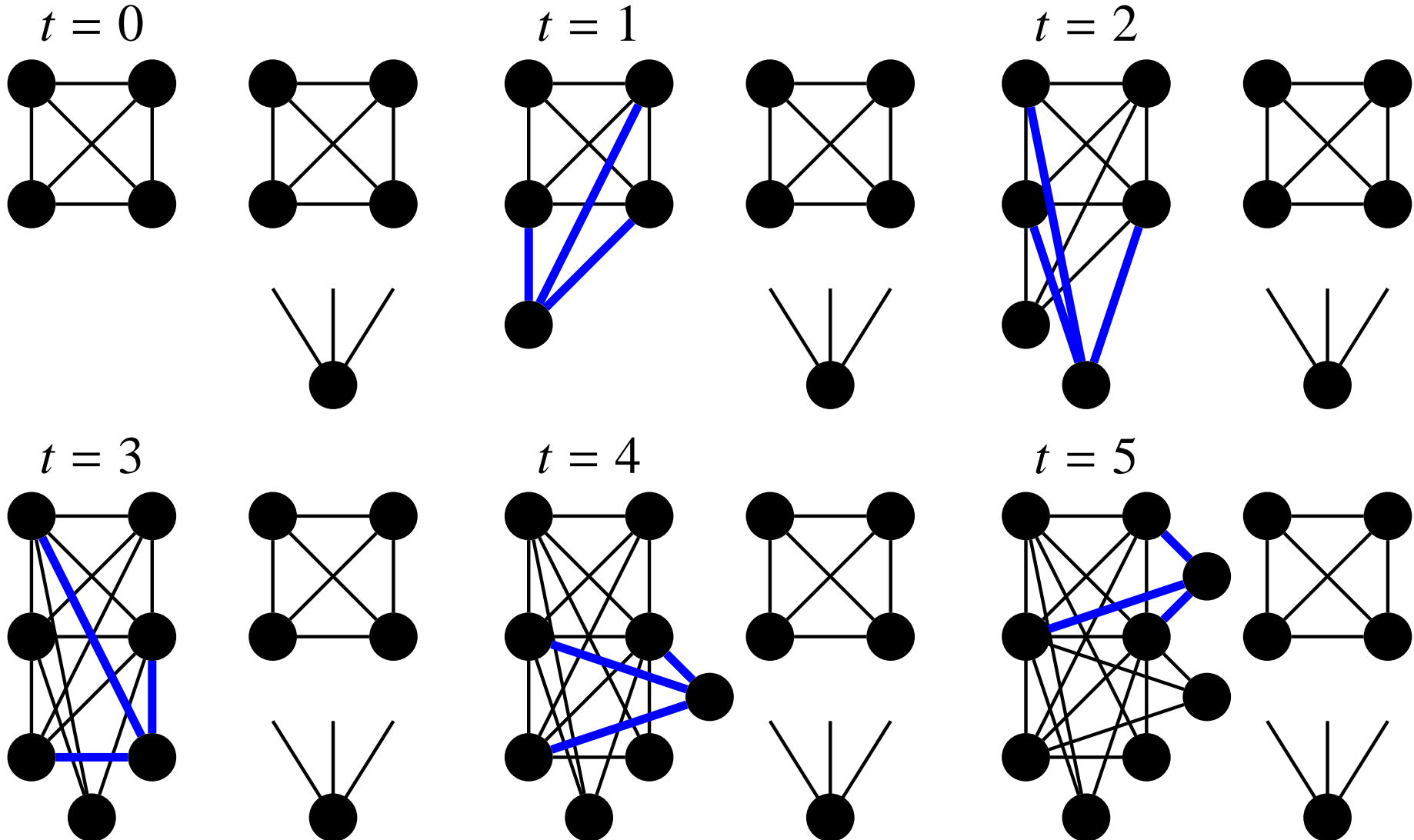
1. m_0 個の完全グラフを初期状態とする
2. $m (< m_0)$ 本の枝を持つ新しい頂点を一つずつ付加する
3. 新しい枝が結合する頂点を v_i で決める
⇒ 既存の頂点 v_i の次数を k_i とすると新しい枝が v_i に結合する確率は

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^n k_i}, \quad (1 \leq i \leq n)$$

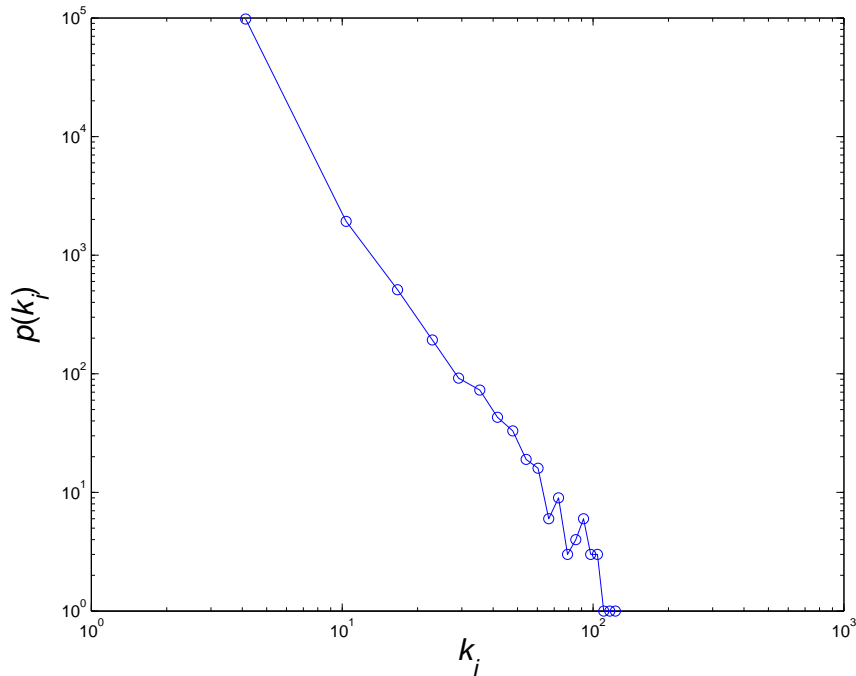
となる

4. これにより $\Pi(k_i)$ が出現

スケールフリーネットの作り方

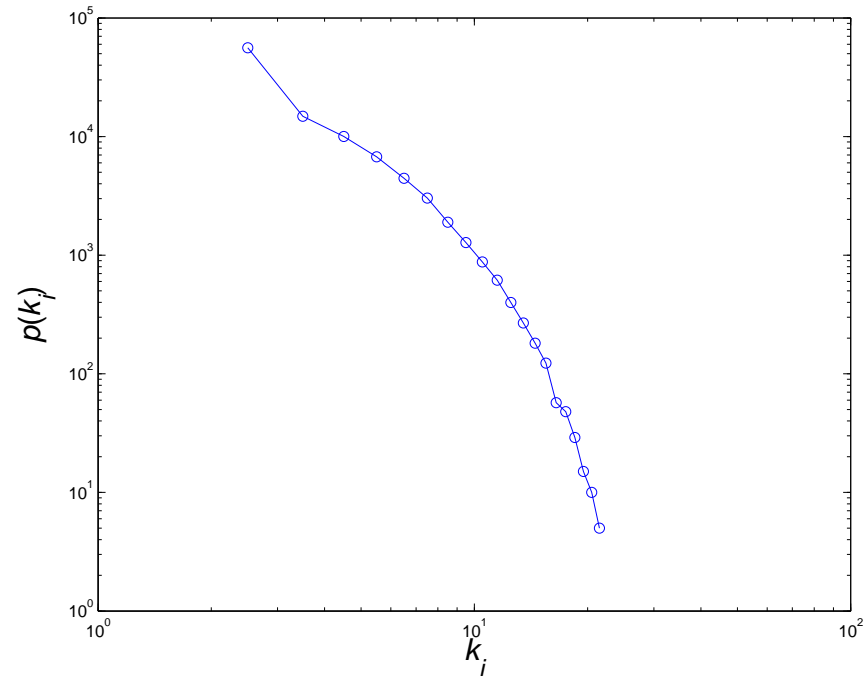


ベキ則の出現



成長 + 優先的選択

$$p(k) \sim k^{-3}$$



成長のみ

- ❑ 成長 + 優先的選択のみがベキ則を導く訳ではない
- ❑ このモデルでのクラスタ性は小さくなることにも注意

アルゴリズムの拡張

- 適応度モデル

⇒ ボーズ・アインシュタイン凝縮との関連



- 頂点非活性化モデル

- 階層的モデル

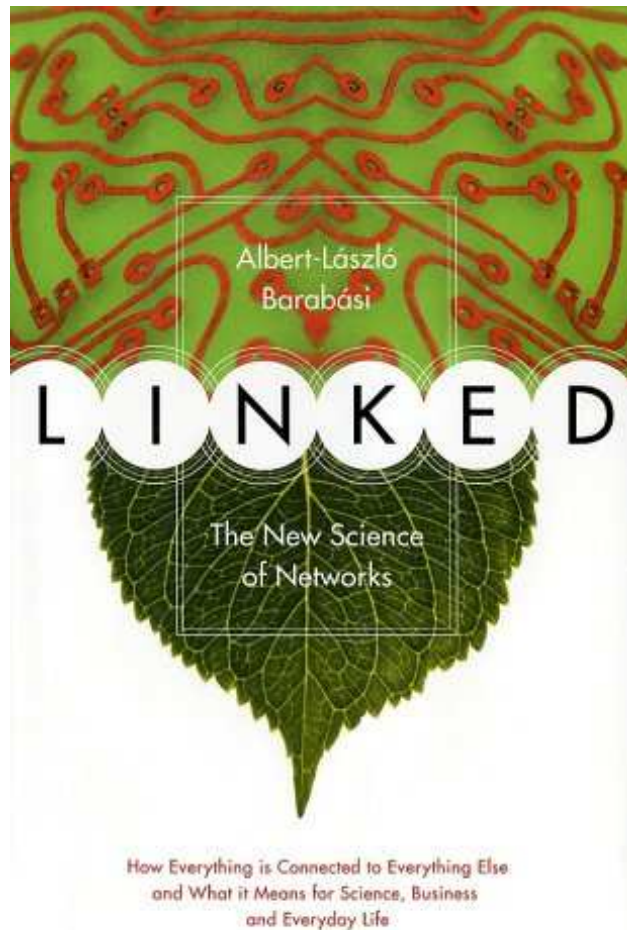
- 閾値モデル

- etc

現実問題との関わり …

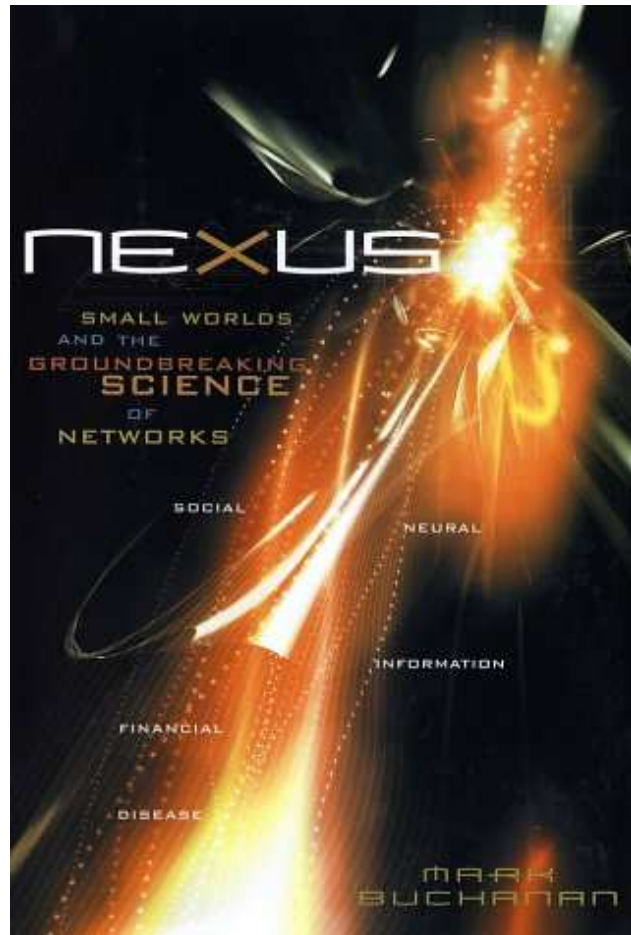
- ❑ なぜインターネットはルータの故障に対して頑健なのか？
一日平均約百台のルータが故障している。
- ❑ なぜ金持ちはますます金持ちになるのか？
80 対 20 の法則 (パレートの法則)
- ❑ 金持ちがますます成功する社会で、
新参者はどうすれば生き残れるのか？
- ❑ なぜマイクロソフトは一人勝ちしたのか？
- ❑ 有限な予算で病気の感染拡大を防ぐにはどうすべきか？
- ❑ ブラックアウトを防ぐ手立てはあるのか？

書籍紹介



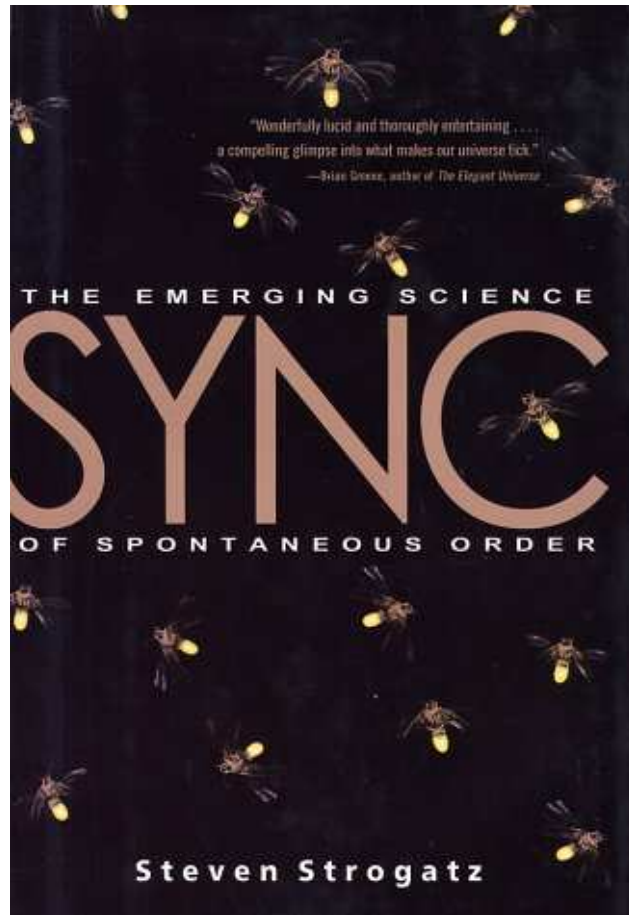
アルバート=ラズロ・バラバシ 著，青木薫 訳：
新ネットワーク思考～世界のしくみを読み解く～，NHK 出版，
2002 .

書籍紹介



マーク・ブキャナン 著，阪本芳久 訳：
複雑な世界，単純な法則，-ネットワーク科学の最前線-，草思社，
2005 .

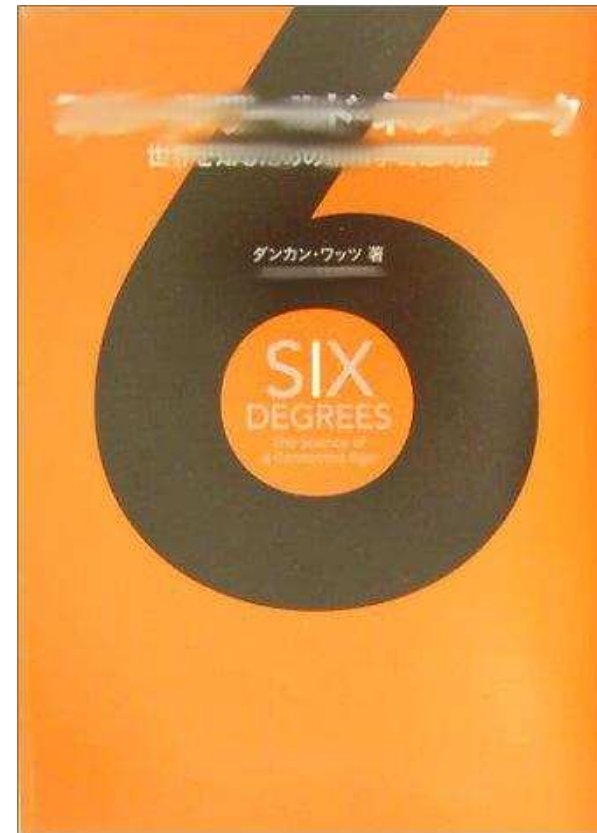
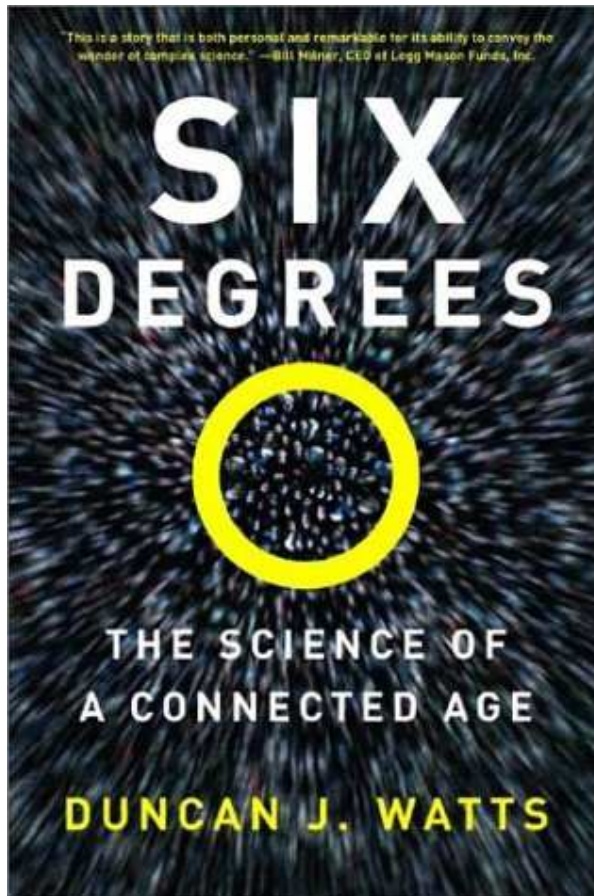
書籍紹介



早川書房

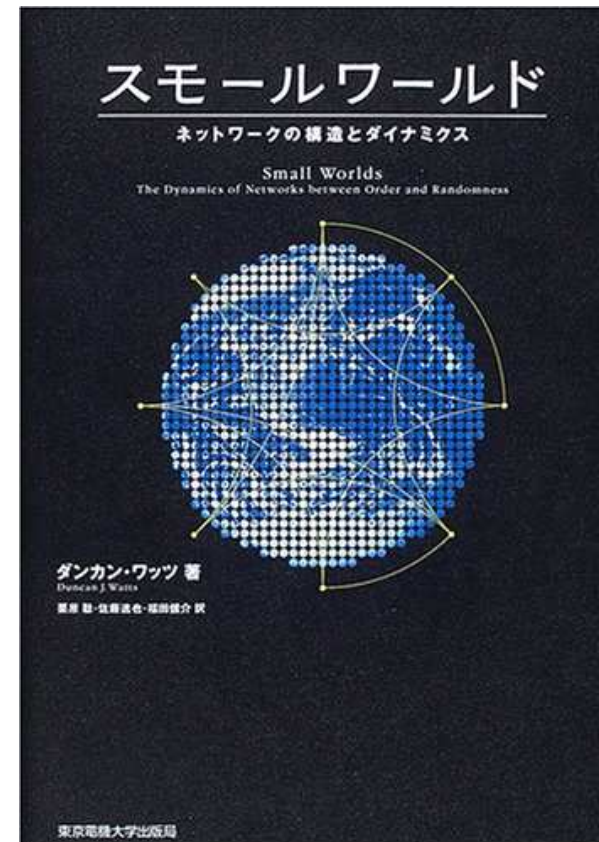
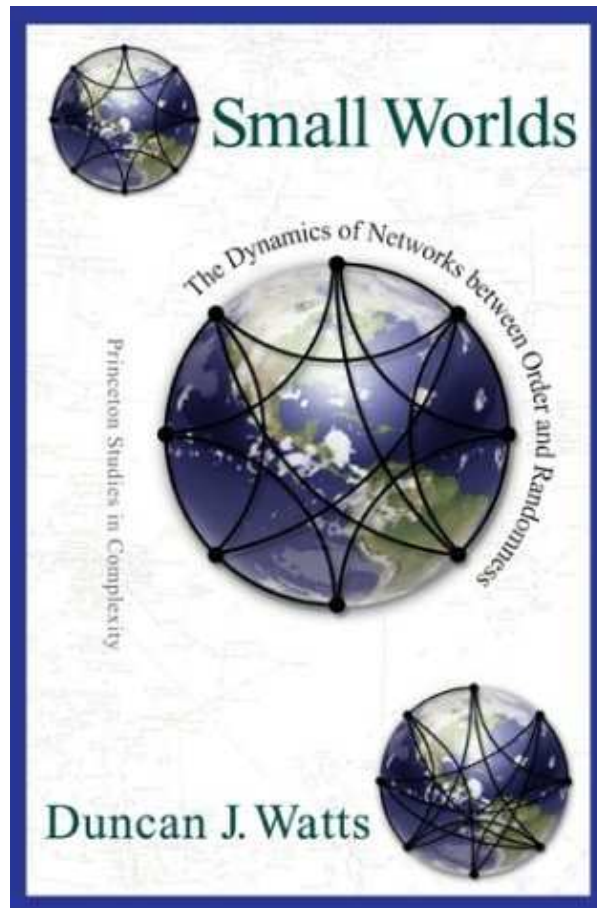
スティーブン・ストロガッツ 著，蔵本由紀 監修，長尾 力 訳：
シンク
SYNC，—なぜ自然はシンクロしたがるのか—，早川書房，2005。

書籍紹介



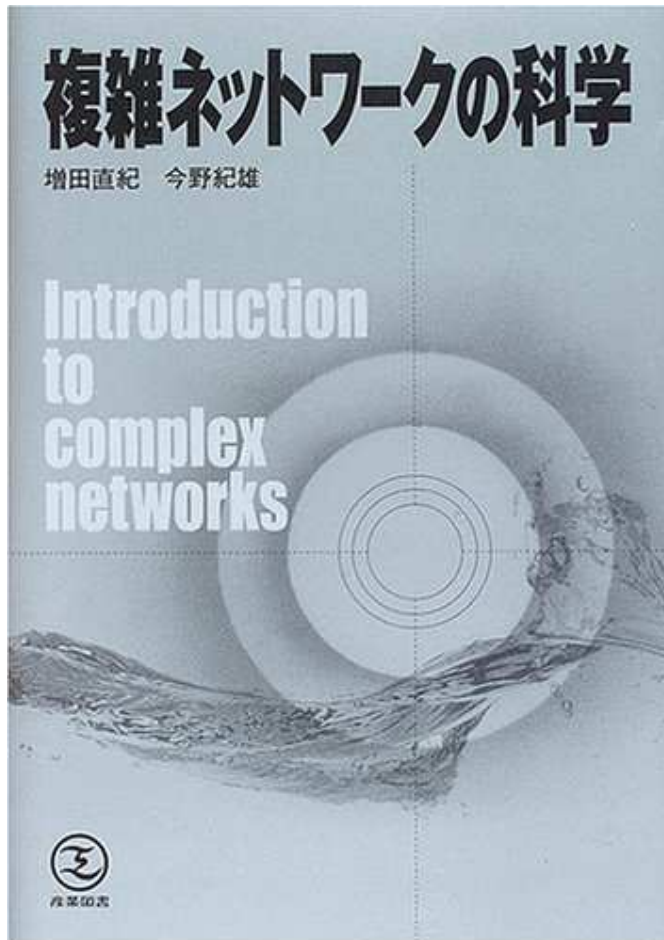
Duncan J. Watts, Six Degrees, The Science of a Connected Age, W. W. Norton & Company, 2003 .

書籍紹介



Duncan J. Watts, *Small Worlds, The Dynamics of Networks between Order and Randomness*, Princeton University Press, 1999; **ダンカン・ワッツ著，栗原ほか訳: スモールワールドーネットワークの構造とダイナミクスー，東京電機大出版局，2006**

書籍紹介



増田 直紀, 今野 紀雄 著: 複雑ネットワークの科学, 産業図書, 2005; 増田 直紀, 今野 紀雄 著: 「複雑ネットワーク」とは何か, 講談社ブルーバックス, 2006