What’s Nonlinear?

—それって非線形？—

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科 数理電子情報部門 情報領域

338–8570 埼玉県 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel: 048–858–3577, Fax: 048–858–3716

Email: tohru@nls.ics.saitama-u.ac.jp

URL: http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru

自己紹介から

- 池口 徹 (いけぐち とおる)
- 所属等
  - 大学院 理工学研究科 研究部 数理電子情報部門 情報領域
    数理情報学分野 教授

  ⟹ 大学院 理工学研究科 理工学専攻 (博士後期課程)
  大学院 理工学研究科 数理電子情報系専攻 (博士前期課程)
  工学部 情報システム工学科

- 連絡先
  - Email: tohru@ics.saitama-u.ac.jp
  - URL: http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru/
  - Tel 048–858–3577, 内線 4752
  - 居室: 総合研究棟 5F506 室 (or 505 室)
  - オフィスアワー : 随時
    出来ればメールなどで時間帯の相談をしてほしい。

ホームページコンテストについて

- (社) 埼玉県情報サービス産業協会主催
  第 11 回ホームページコンテスト
  ⟹ 是非応募してください !!
  - 埼玉県知事賞 20 万円
  - さいたま市長賞 10 万円
  - 協会長賞
  - 各部門賞，他
- パンフレットを配布しました．
- 審査委員長は？→

さて，今日の内容は…

- ❏ 「　　　　とは何か？」ということについて．

  $\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad (\qquad\qquad\qquad) \\ \qquad\qquad (\qquad\qquad\qquad) \end{array} \right.$

  と併せて考えたい (実はこちらが主体)．

  → 　　　　　　　　　　　　という．

  ⟶ $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$

- ❏ なぜ，皆さんに紹介したいのか？
  - もちろん　　　だと思うから．
  - なぜ　　　なのか？

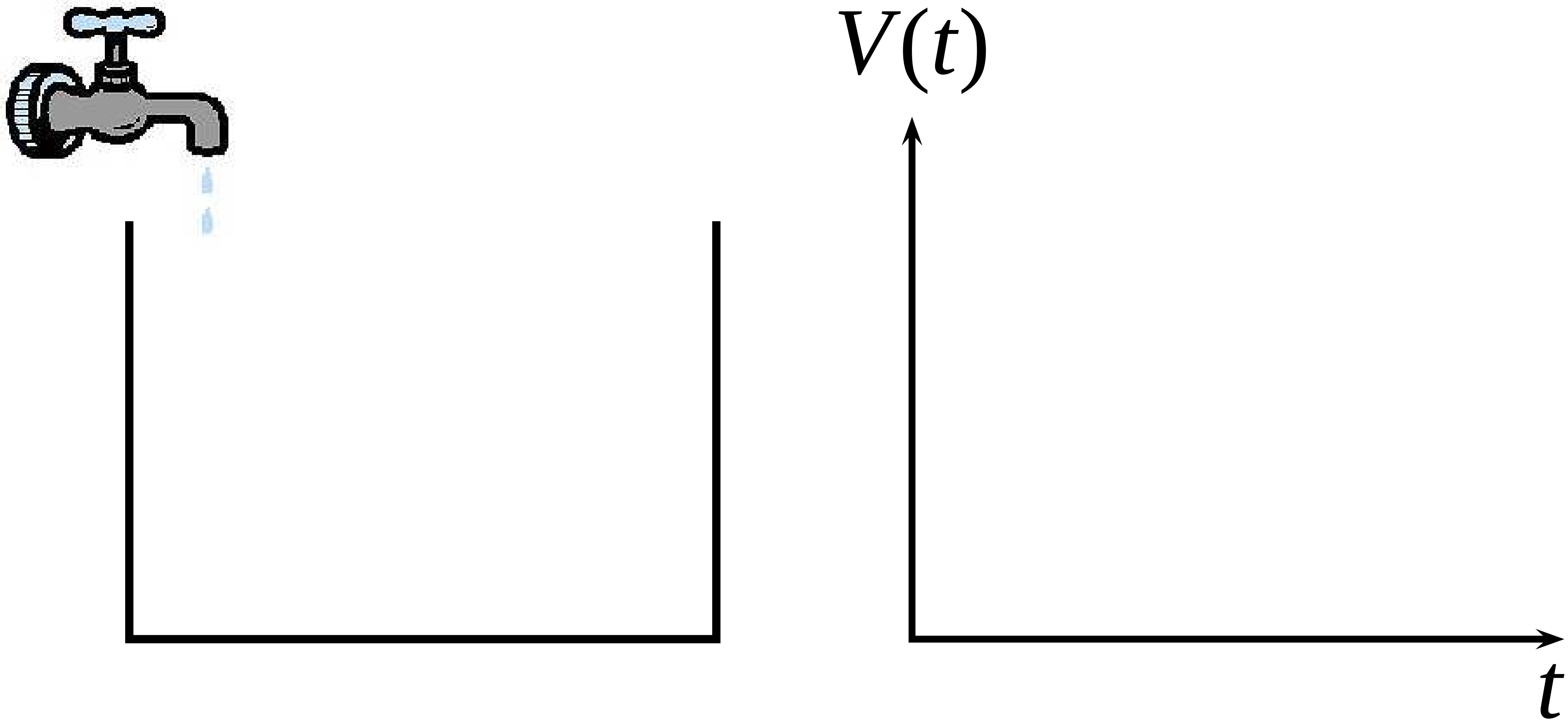
    ⟹ この世の物事・事象・全てが，

    なカラクリに従いながら　　　　　　　　から…

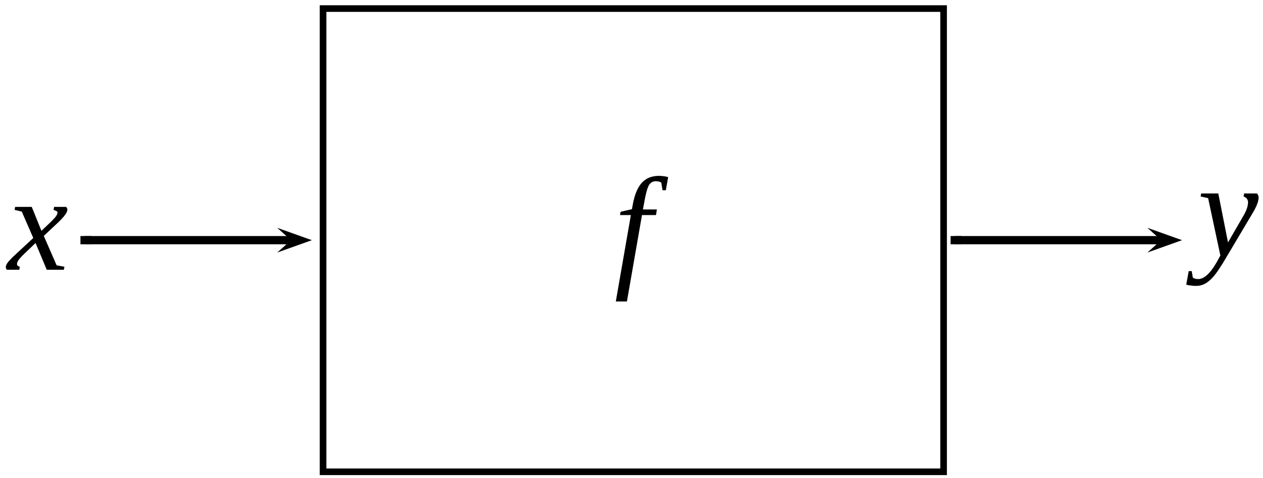
- ❏ 情報システム工学との関係は？
  - もちろん　　　．
  - 他には，

    → 　　　　，　　　　　　にも関連する．

線形な関係とは？



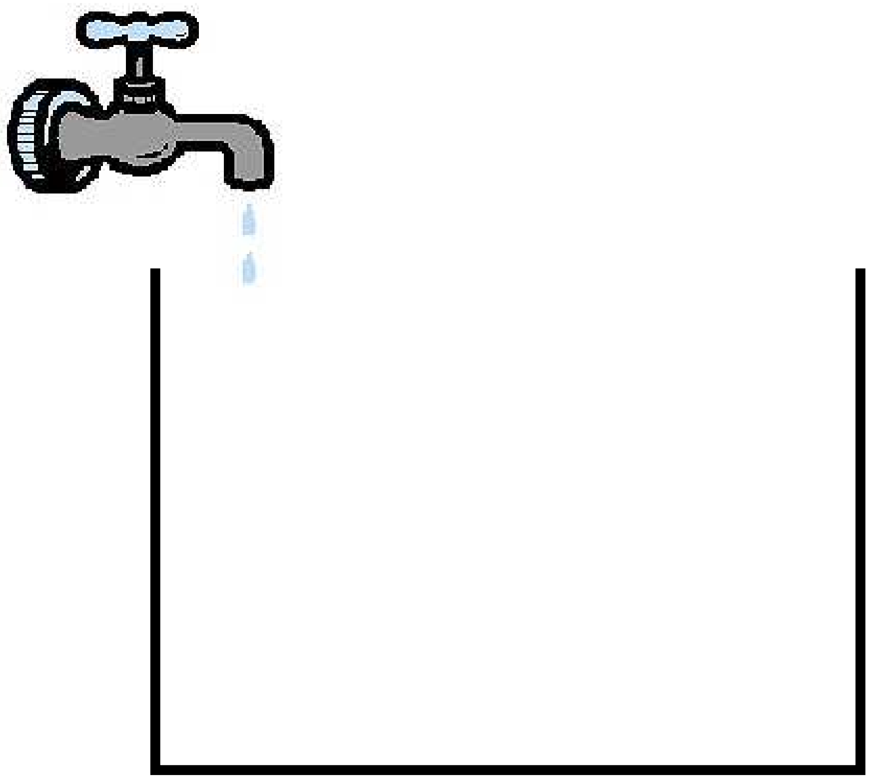
線形な関係とは？

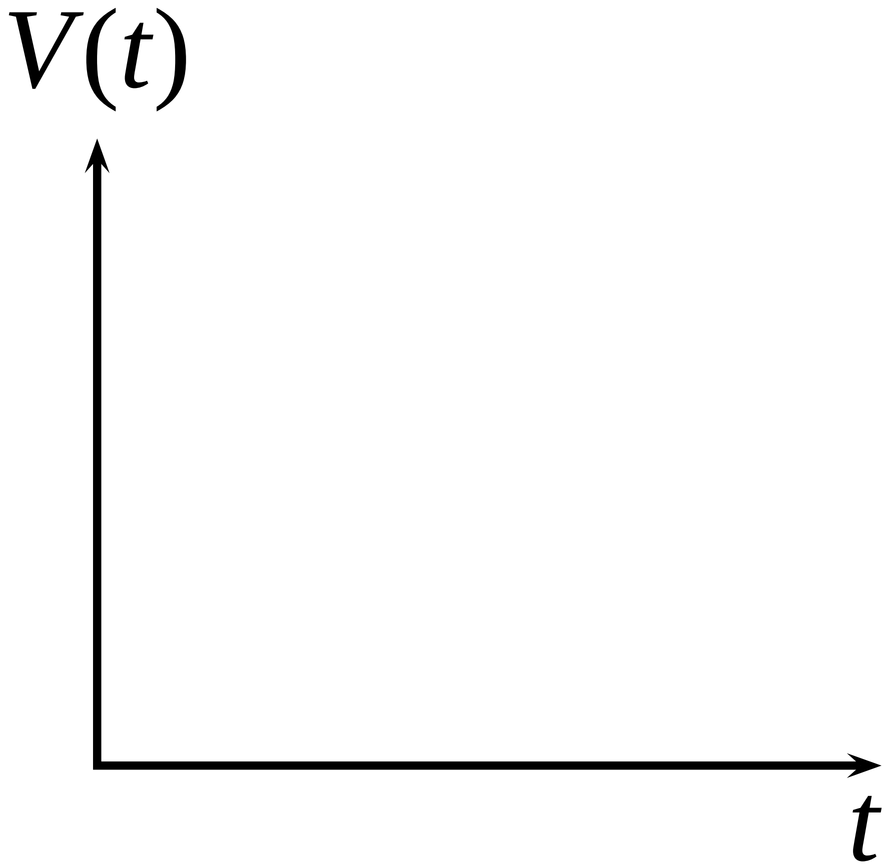


- 全ての x に対して $y = f(x)$
  (あるいは,　　　　　　の形も含む)
- 　　次式,　　　　　関係,　　　　　関係
- 英語では　　　　　という

非線形な関係とは？

- でない関係全て．
- 英語では という





重ね合わせの理

- $f(x)$ に対して，

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

が成立すること．

問 1　$f(x) = ax$ に対して，重ね合わせの理が成立することを示しなさい．

問 2　$f(x) = ax^2$ に対して，重ね合わせの理が成立しないことを示しなさい．

問 3　この世の中に存在する重ね合わせの理が成立しない例を示しなさい．また，その理由を説明しなさい (定性的な理由で良い)．

時間と共に振動する現象を表す方法

差分方程式 (difference equation)，**写像** (map)

$$x_{n+1} = f(x_n)(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

- **初期値** x_0 **を定めると，**x_1 **が決まる．**
- x_1 **が定まると，**x_2 **が決まる．**
- x_n **が定まると，**x_{n+1} **が決まる．**
  $\Longrightarrow$ **という．**
- n **は** **時間．**$\rightarrow$ **時間力学系ともいう** $\rightarrow$

差分方程式の例

- **線形**

$$x_{n+1} = ax_n(\text{但し，}a\text{ は定数})$$

これは簡単に解くことができて， $x_n = a^n x_0$

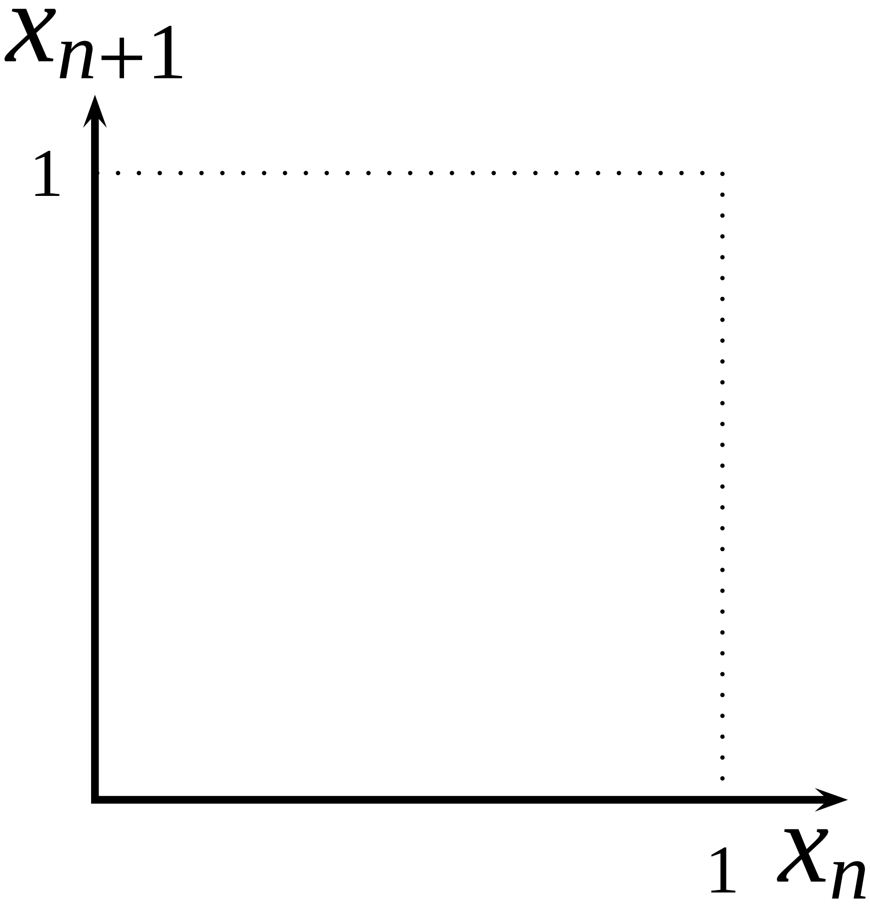
- **ベルヌーイシフト写像 (非線形な例)**

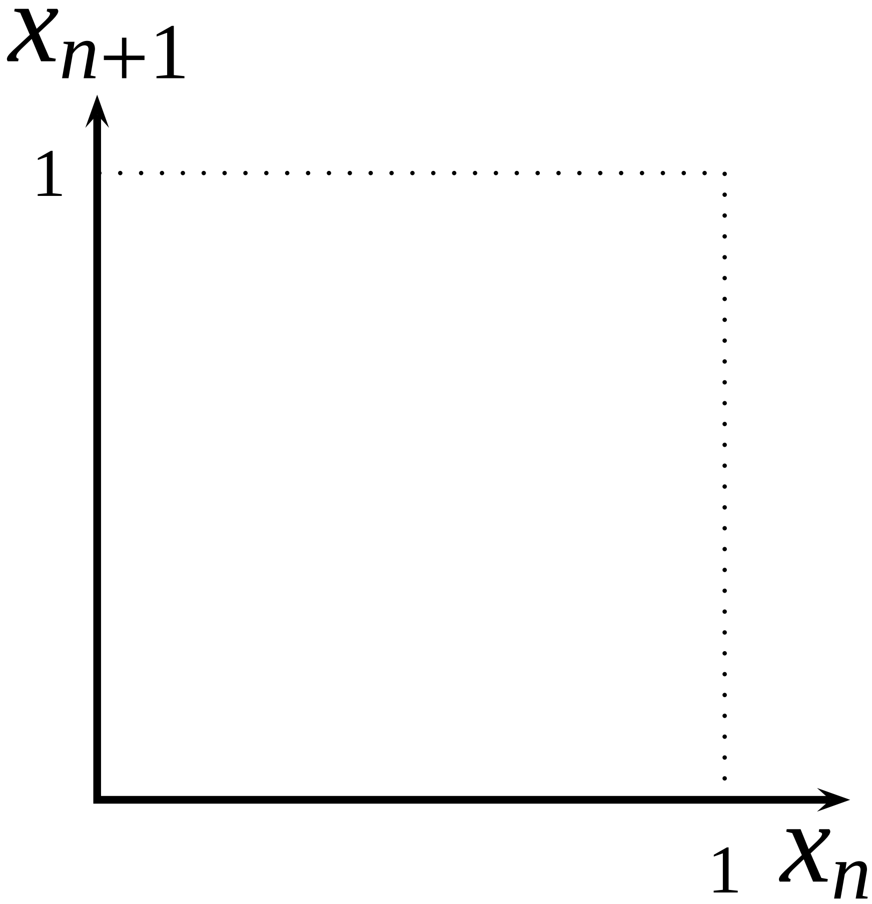
$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & (0 \le x_n \le 1/2) \\ 2(x_n - 1) & (1/2 \le x_n \le 1) \end{cases}$$

- **テント写像 (非線形な例)**

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & (0 \le x_n \le 1/2) \\ 2(1 - x_n) & (1/2 \le x_n \le 1) \end{cases}$$

ベルヌーイシフト写像とテント写像





→ cf. **平成 15 年度 埼玉大学 工学部情報システム工学科**

H15 年度 ICS 前期入試問題

2.　最近、カオス (chaos) という言葉を様々な場面で耳にするようになってきた。情報処理の分野においても種々の応用が期待されている。カオスは通常「混沌」と訳され、この語感からすると、複雑なルールに従うシステムが無秩序かつ大混乱な状態にあるような印象を与えるが、実は、単純なルールに従うシステムにおいてもカオスを観測することができる。
数列を用いた具体例で考えてみよう。図 1 はある数列 $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ を x_0 から x_{40} まで図示したものである。これを見る限り、数列は無秩序で何の規則性も認められないように見えるが、数列のとなり合う 2 項 x_{n-1}, x_n をそれぞれ横座標、縦座標と見なすことによって得られる平面上の点列 $\{(x_{n-1}, x_n)\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots, 40)$ を図示してみると、図 2 に示すように、全ての点は 2 直線から成る関数

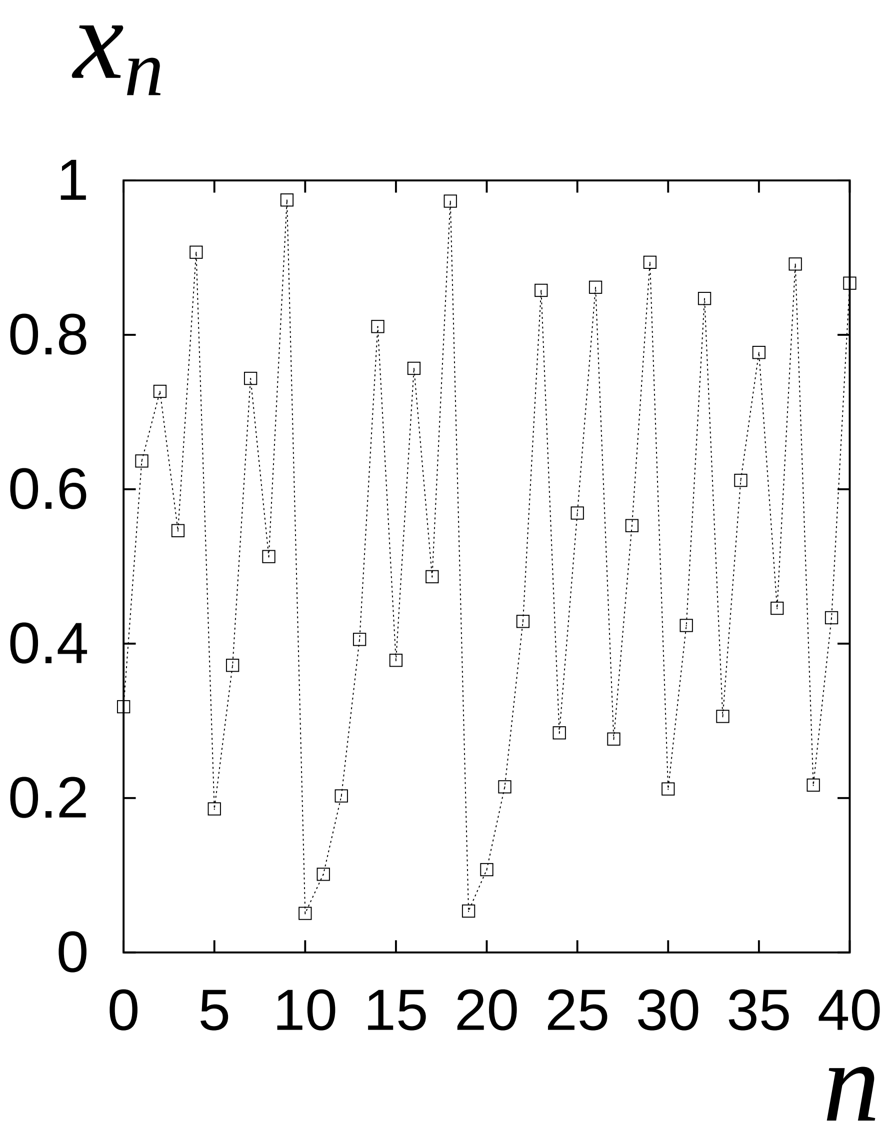
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & (0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \text{のとき}) \\ 2(1-x), & (\frac{1}{2} < x \leqq 1 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1}$$

のグラフの上にのっていることがわかる。図 1 に示した一見無秩序な数列も、実は、初期値を
$x_0 = \dfrac{1}{\pi}$ にとり

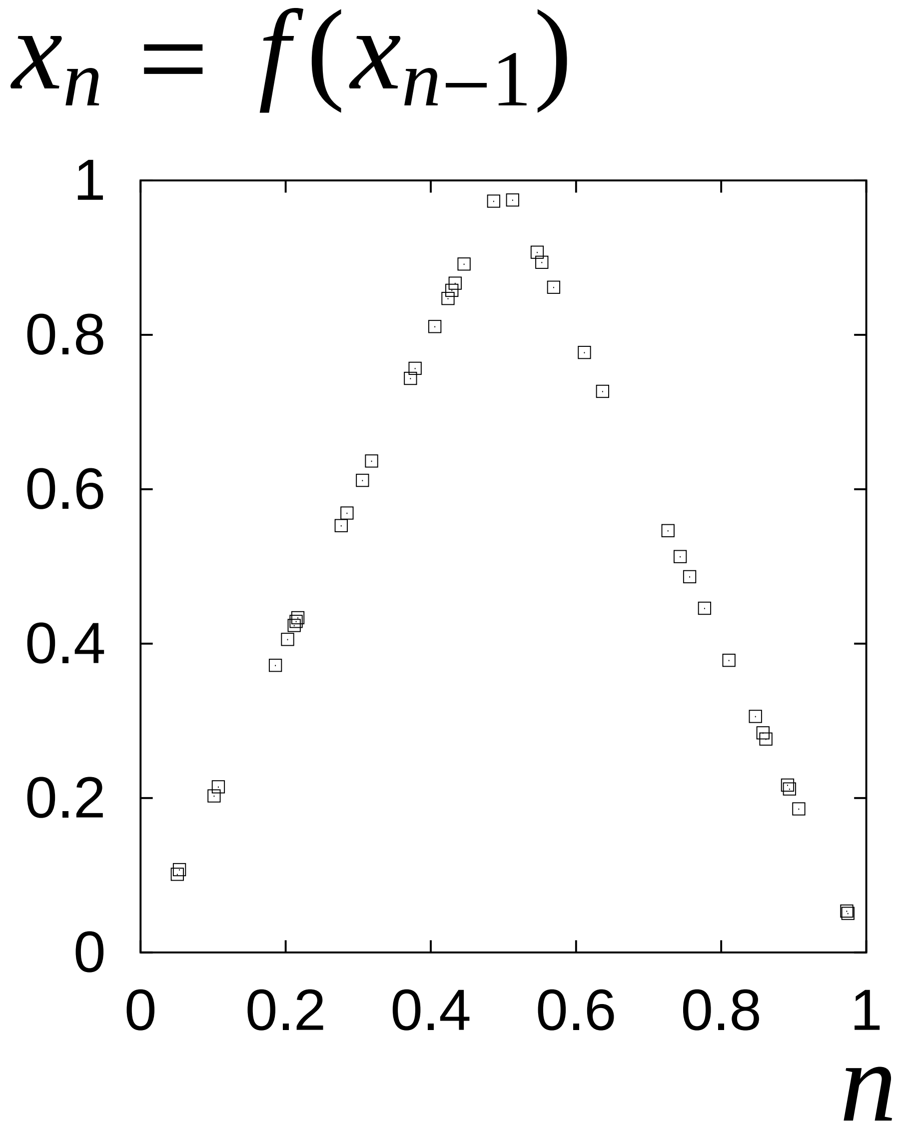
$$x_n = f(x_{n-1}), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2}$$

という単純な漸化式に従って生成したものにすぎないのである。

図1と図2



x_n
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40
n

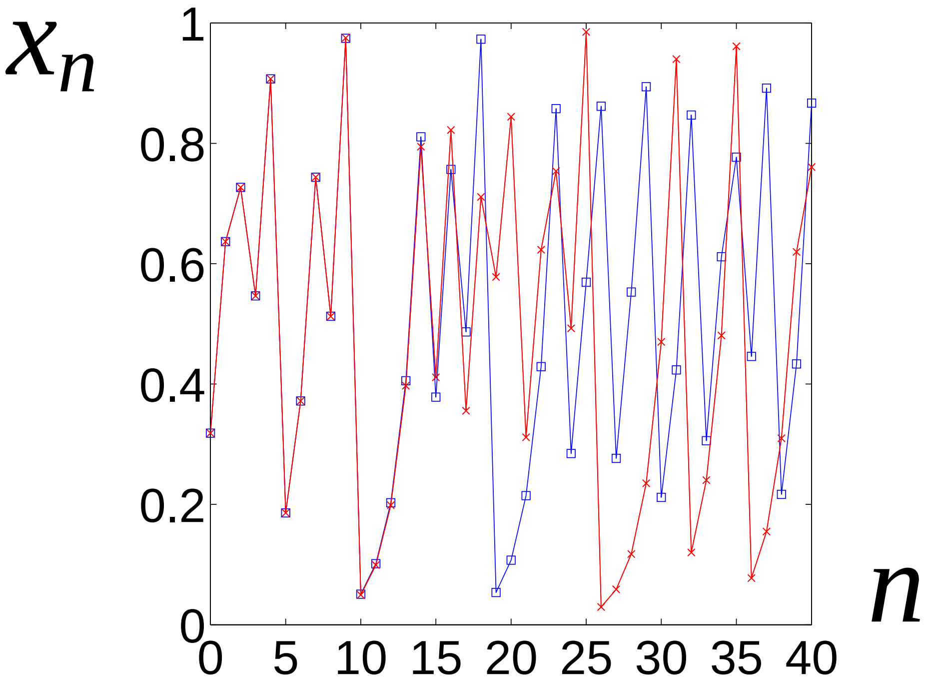


$x_n = f(x_{n-1})$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
n

H15 年度 ICS 前期入試問題

さて、カオスの特徴の一つに「初期値敏感性」と呼ばれるものがある。初期値敏感性とは、一言でいえば、初期値がほんのわずかに異なると、最終的に得られる結果が大きく異なることをいう。漸化式 (2) は初期値敏感性を持ち、カオスの最も単純な例になっている。そのことを実際の数値データで示そう。図 3 は、漸化式 (2) で初期値を $x_0 = \dfrac{1}{\pi}$ と $x_0 = \dfrac{1}{\pi} + 1.0 \times 10^{-6}$ とに選んだ場合に得られる 2 つの数列を重ねて図示したものである。ただし、□ が前者、× が後者の数列である。はじめのうちは、これらの 2 つの数列は同じような振舞いをするが、第 20 項あたりから両者は全く別々の振舞いをすることが見てとれる。第 20 項以降の振舞いだけを見ると、初期値がわずかに 10^{-6} だけ異なる数列とはにわかには信じがたいほどに 2 つの数列の振舞いは異なっている。

(以下，略)



時間と共に振動する現象を表す方法

- ❑ 微分方程式 (differential equation) とは？
  $\Longrightarrow$ 方程式中に，　　　　　　を含むもの．
- ❑ 例

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$$

- ❑ “方程式” なので求めるべきは，　　　である．
- ❑ 但し，求めるべき　　は，　　　　　　　　　である．
- ❑ 実は，皆さんは，既に微分方程式を十分に知っている？→

運動方程式とは?

- 質量 m の物体が，力 F を受けた場合に生じる加速度を a とする．
- 関係

(力) (質量) (加速度)

- これはまさに，微分方程式である．
  $\Longrightarrow$ 加速度は，物体の位置の　　　　　　　　　　　である．

加速度，速度，距離

- あるの物体の時刻 t における位置を $x(t)$ とする．時刻 $t = t_1$ から $t = t_2$ の間の，この物体の "平均" 速度 v は，

$$v =$$

- $t_2 \to t_1$ として，瞬時速度を求めると，

$$v = \qquad\qquad =$$

$\Longrightarrow$ 「速度は位置の　　　　　である.」

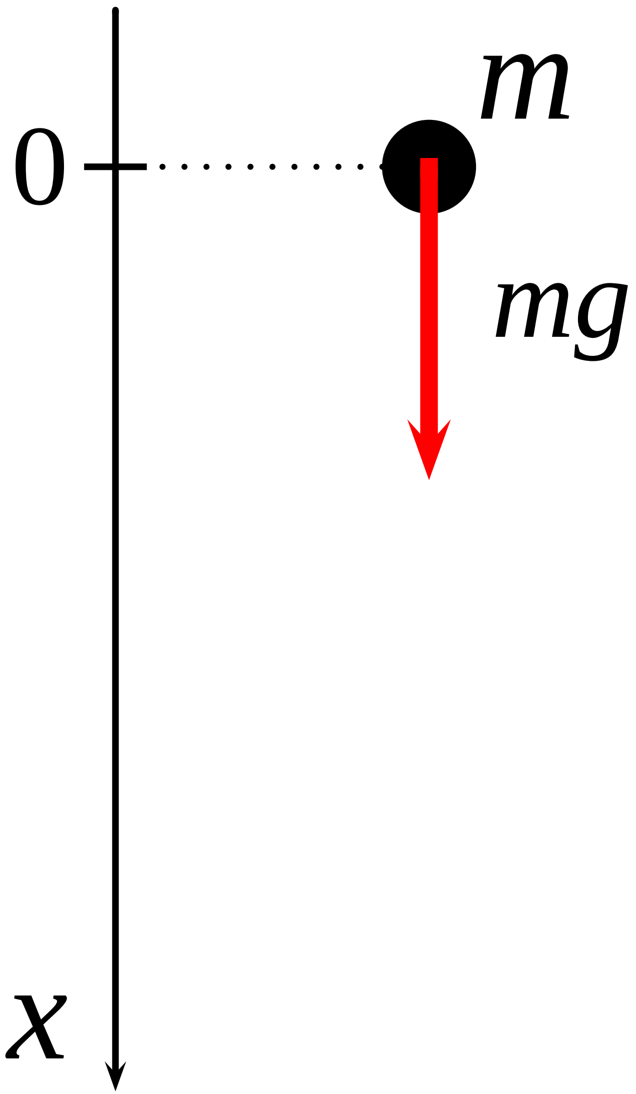
- 同様に，加速度 a は，

$$a = \qquad =$$

$\Longrightarrow$ 「加速度は，時間の　　　　　，位置の　　　　　である.」

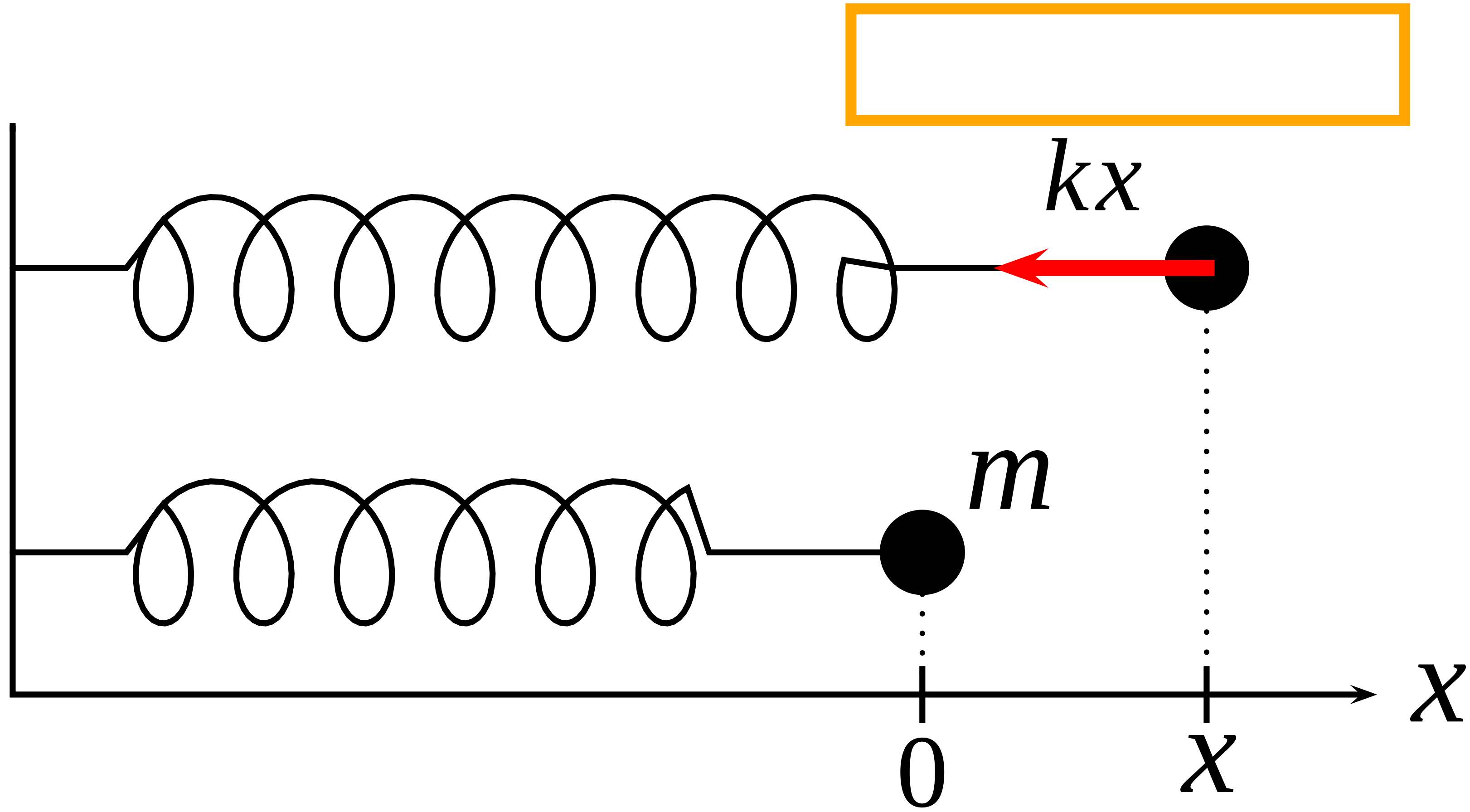
運動の解析

(1)　**自由落下**



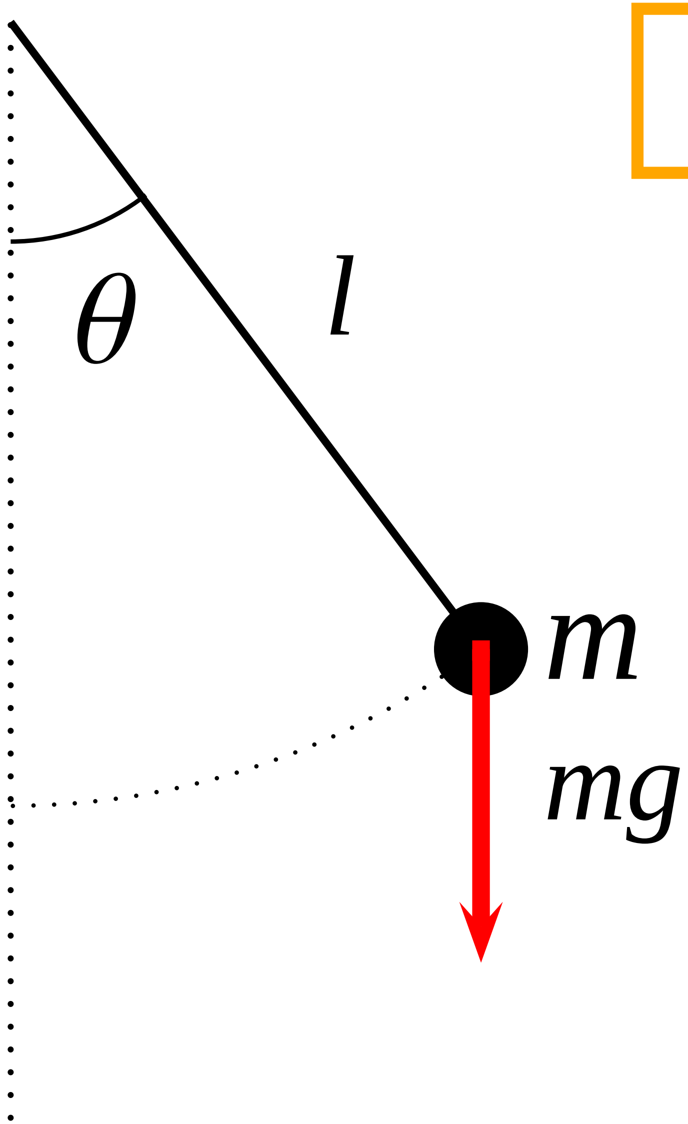
運動の解析

(2) **バネの振動**



運動の解析

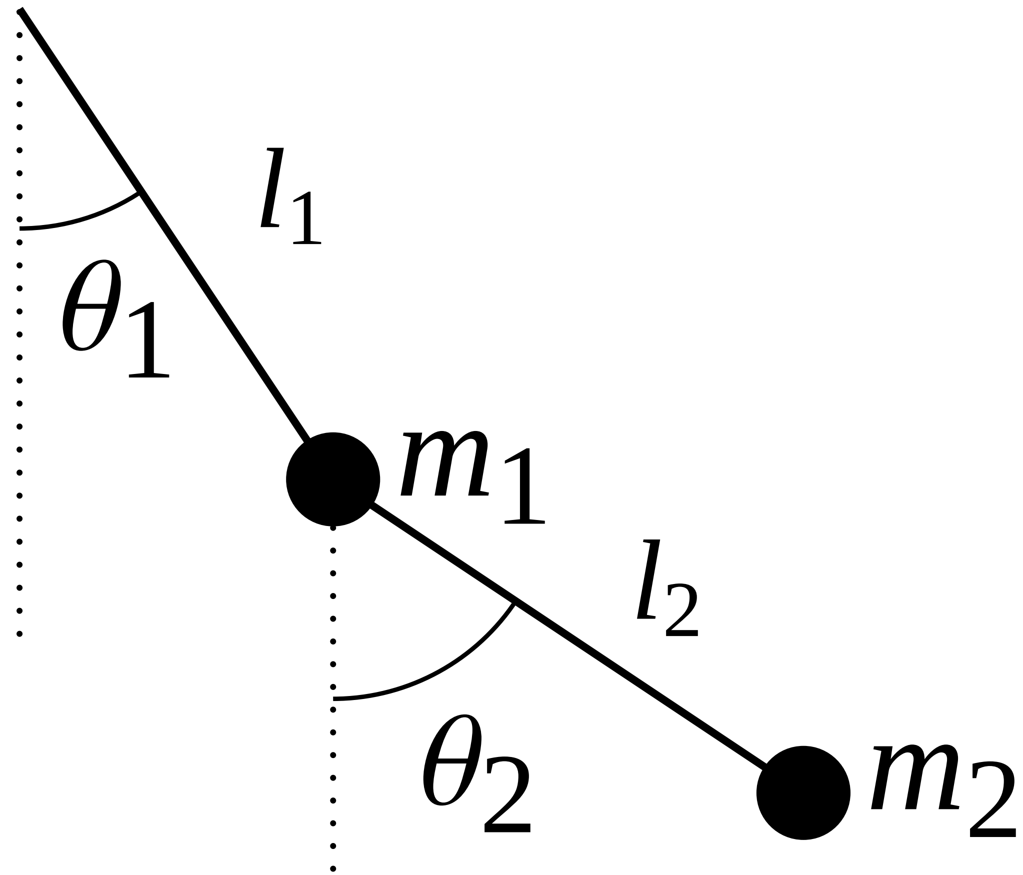
(3) **単振り子**



- θ **が十分に小さいときは,**
- θ **が小さくないときは,**

運動の解析

(4) **二重振り子**



$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_2 \cos(-\theta_2 + \theta_1) + \dot{\theta}_2^{\,2} \sin(-\theta_2 + \theta_1) \right\} + (m_1 + m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \left\{ \ddot{\theta}_1 \cos(-\theta_2 + \theta_1) - \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(-\theta_2 + \theta_1) \right\} + m_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0$$

応用

非線形ダイナミカルシステムはいろいろな分野に現れる．

- 惑星運動
- 電気回路
- 人口問題
- 機械振動
- 化学反応
- 脳科学
- 広告に対する売り上げ
- 美術品の鑑定
- 薬の吸収
- 経済成長のモデル
- 金融工学，デリィバティブ
- ミサイル誘導
- 種の相互作用
- 伝染病の伝搬
- ゲーム，CG
- その他，多数

最後に

- ❑ 数学，物理などの基礎科目
  - どの分野においても，　　　　　　　である．
  - すぐには　　　　　　　．だから，
    ．
  - しかし，　　　　　　　　　　．
  - 仮に内容を忘れたとしても問題ない．
    但し，　　　　　　　　は覚えておく．
- ❑ 逆に，必要になったときにやれば良いもの
  - 例えば，

課題

1.
2. (余裕のある人) 二重振り子の運動方程式を導きなさい．
3. 注意
   - 他人に左右されず，自分の考えで解答すること．
   - 大学生らしい文章で書くこと．
   - 書いた後，よく推敲すること．
   - 丁寧な字で書くこと．
4. その他
   上記の課題以外に，今日の話を聞いて思ったこと・感じたことは，感想の欄に書いてください．