

非線形システム概論 2006

線形な差分方程式と非線形な差分方程式

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門

338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

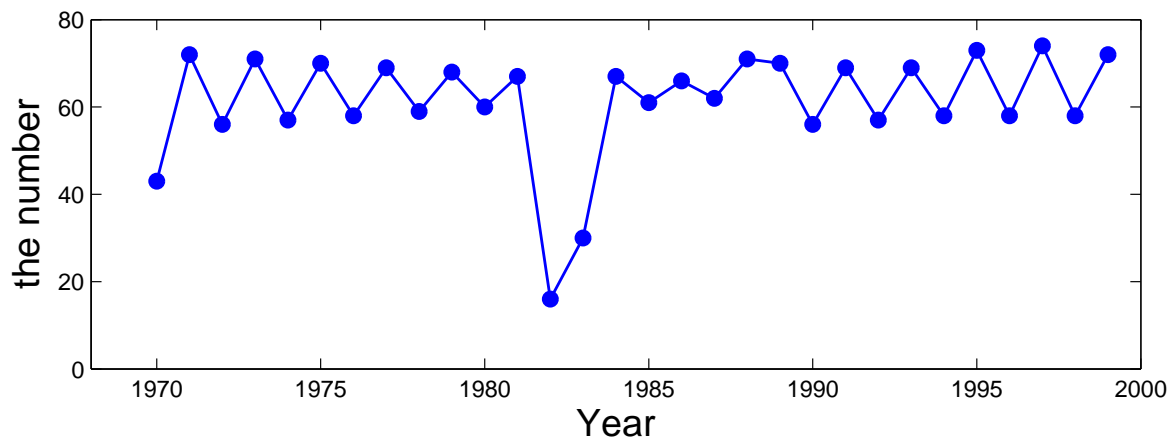
Tel : 048-858-3577, Fax : 048-858-3716

Email : tohru@nls.ics.saitama-u.ac.jp

URL : <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru>

非線形システム概論 2006/池口 徹 - p.1/21

ある時系列データ (ハエの個体数)



- 何か重要な生物学的情報があるだろうか？
- 仮にそのような情報が存在するとして，
 - － その情報をどのようにして扱えば良いのか？
 - － その情報を時系列データから抽出することができるだろうか？

非線形システム概論 2006/池口 徹 - p.2/21

線形な差分方程式の振る舞い

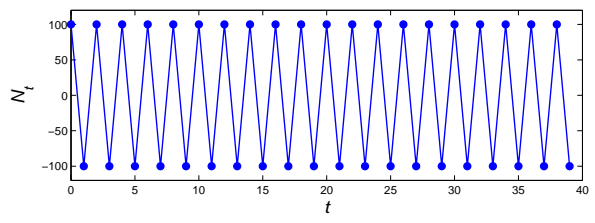
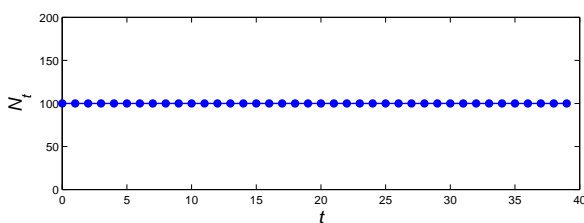
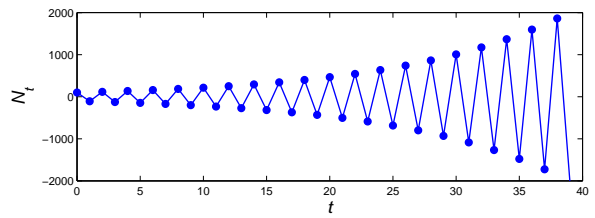
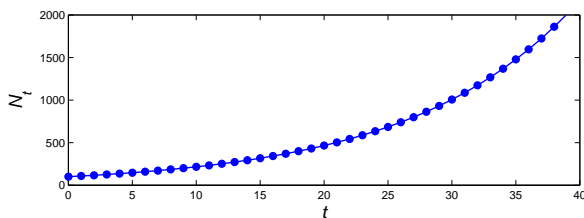
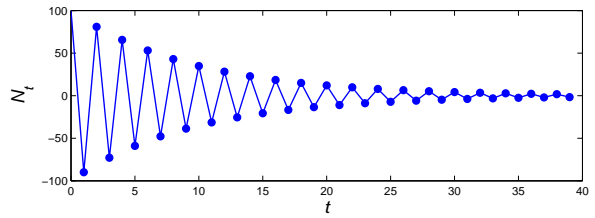
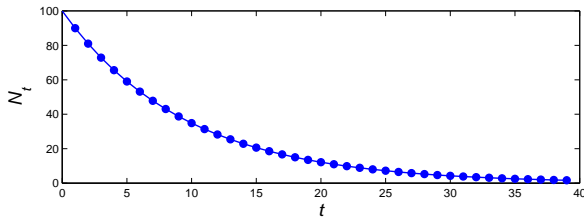
□ $R > 0$

- ・ $0 < R < 1$
- ・ $1 < R$
- ・ $R = 1$

□ $R < 0$

- ・ $-1 < R < 0$
- ・ $R < -1$
- ・ $R = -1$

線形な差分方程式の振る舞い



非線形な差分方程式を扱うために!

注意!

非線形な差分方程式の解を解析的に解を求めることは、一般的に困難である。

そこで、以下の手法が重要となる

- ⇒ の場合に特に威力を発揮。
- ⇒ の場合でも使える。

これらの手法を身につけるために、
線形な差分方程式で説明しよう!

図式解法

- $N_0 = 0.7, R = 1.9$ とすると …

数値的な繰り返し計算

- $N_0 = 100, R = 0.9$ とすると …

演習問題

1. 線形な差分方程式の振る舞いは、何通りに分類することが出来るか。
⇒

2. 線形な差分方程式

$$x_{t+1} = 0.9x_t$$

を考える。

- (a) 初期値を $x_0 = 3.2$ としたときの、この差分方程式の解の振る舞いを図式解法を用いて表現せよ。
- (b) 初期値を $x_0 = -3.2$ としたときには、どうなるか？
- (c) この差分方程式の解の振る舞いは、最終的にはどうなるか？
3. ハエの個体数変化を線形な差分方程式 $N_{t+1} = RN_t$ でモデル化しようと考えた場合、
- (a) モデル化できるといって良いか？
- (b) もし良いとする場合、その理由は？
- (c) もし良くないとする場合、その理由は？
- (d) もし良くないとする場合、次にはどのような f を用いるべきか？

八工の個体数変動は線形か？

- 八工の個体数の変動は，
 1. 減衰する，
 2. 発散する，
 3. 一定の値となる，
 4. 正負を繰り返しながら減衰する，
 5. 正負を繰り返しながら発散する，
 6. 正負を繰り返しながら発散する，の
- 即ち，線形な差分方程式で，モデル化すること
- なぜ のだろうか？
個体数が少ない時と多い時とで，増加率 (R) が異なっているからでは？
⇒

モデルの改良

$$N_{t+1} = RN_t$$

- この式の意味は？
- R の意味は？
- 問題点は？
 1. N_t が大きくなると，
 2. N_t が大きくなると，
- これらを考えて以下のように改良しよう．

これって非線形?

$$N_{t+1} = (R - bN_t)N_t = RN_t - bN_t^2$$

- これは な差分方程式
- どころが →

注意!
線形・非線形に関係なく,
と分かりやすくなることもある.

- とすると

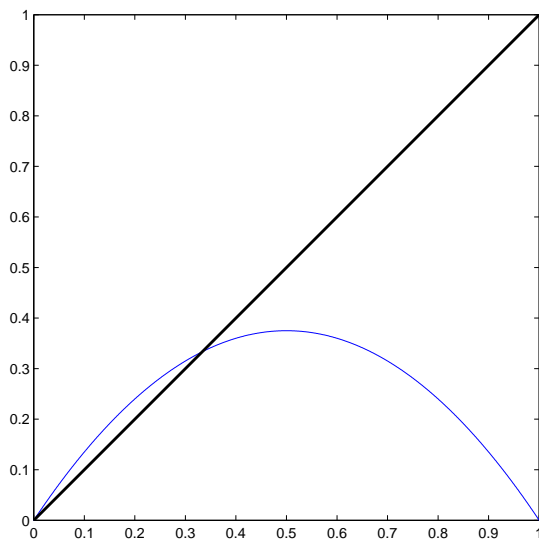
となる. これは,

と呼ばれている.

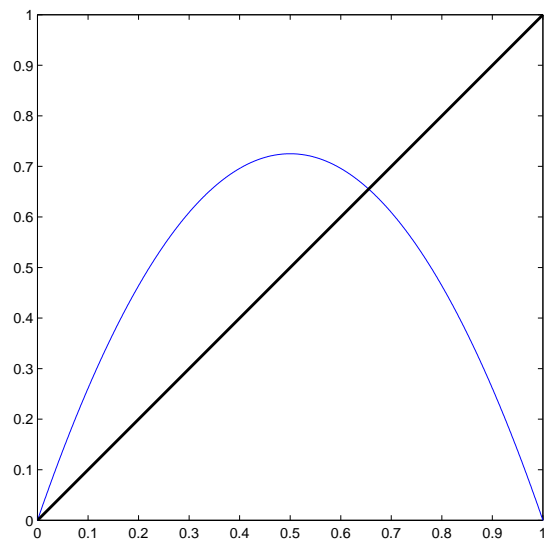
ロジスティック写像と図式解法 (1)

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

$R = 1.5$



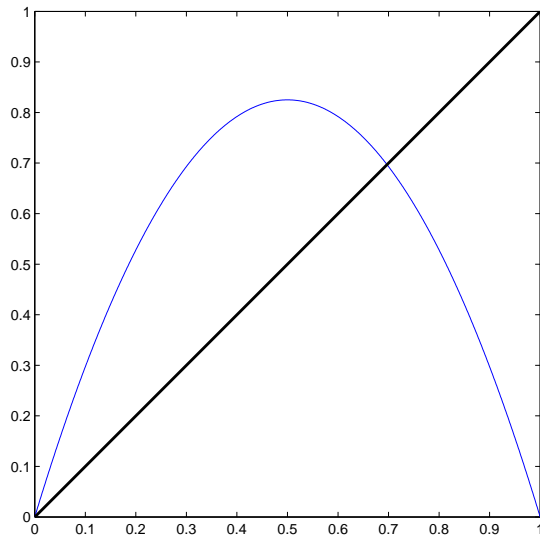
$R = 2.9$



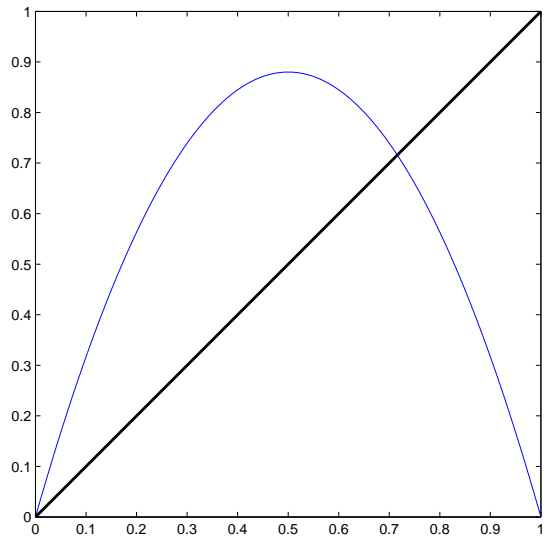
ロジスティック写像と図式解法 (2)

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

$R = 3.3$



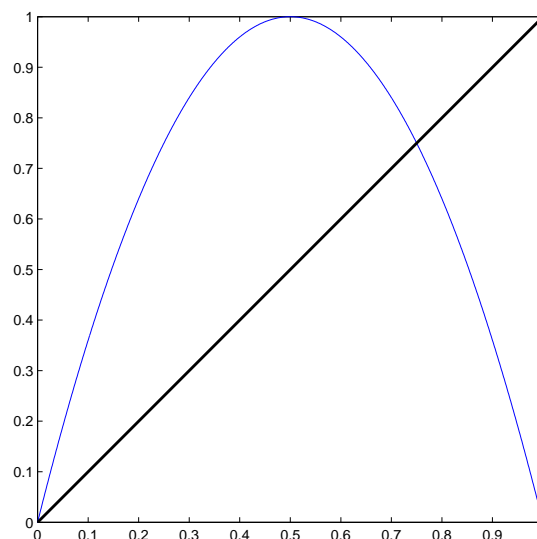
$R = 3.52$



ロジスティック写像と図式解法 (3)

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

$R = 4.0$



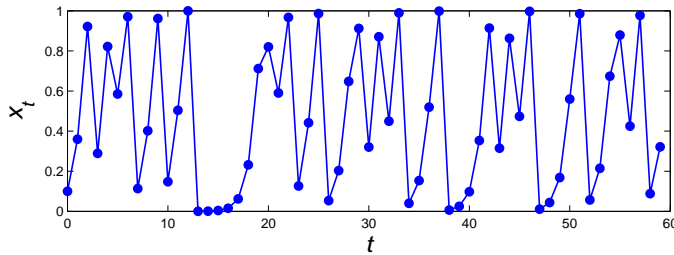
時系列としてみると …

演習

1. 線形な差分方程式の振る舞いは，どのように分類することができたか．
2. 非線形な差分方程式の示す振る舞いと，線形な差分方程式の示す振る舞いと
の「違い」は何か．

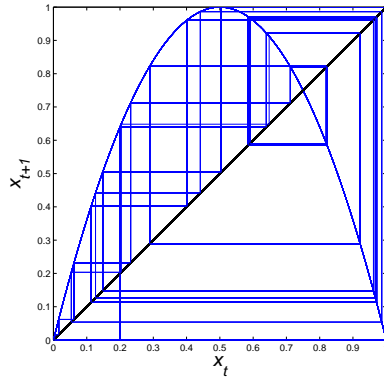
R = 4 としたときの振る舞い

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t) = 4x_t(1 - x_t)$$



どのような振る舞い?

- irregular oscillation
- not exponential growth or decay
- nor a steady state



振る舞いとしては …



のではあるが …
それを調べる前に以下を考えよう

- ある値に とその
- いくつかの値を繰り返す とその