非線形システム概論 2007
線形な差分方程式と非線形な差分方程式

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門
338–8570 さいたま市 桜区 下大久保 255
Tel: 048–858–3577, Fax: 048–858–3716
Email: tohru@ics.saitama-u.ac.jp
URL: http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

ある値に収束するって?

- 同じ点を繰り返すということ．これを，式で表現すれば
- $x_{t+1} = x_t$ となる点を　　　　　　　　　　　という．
- ある差分方程式

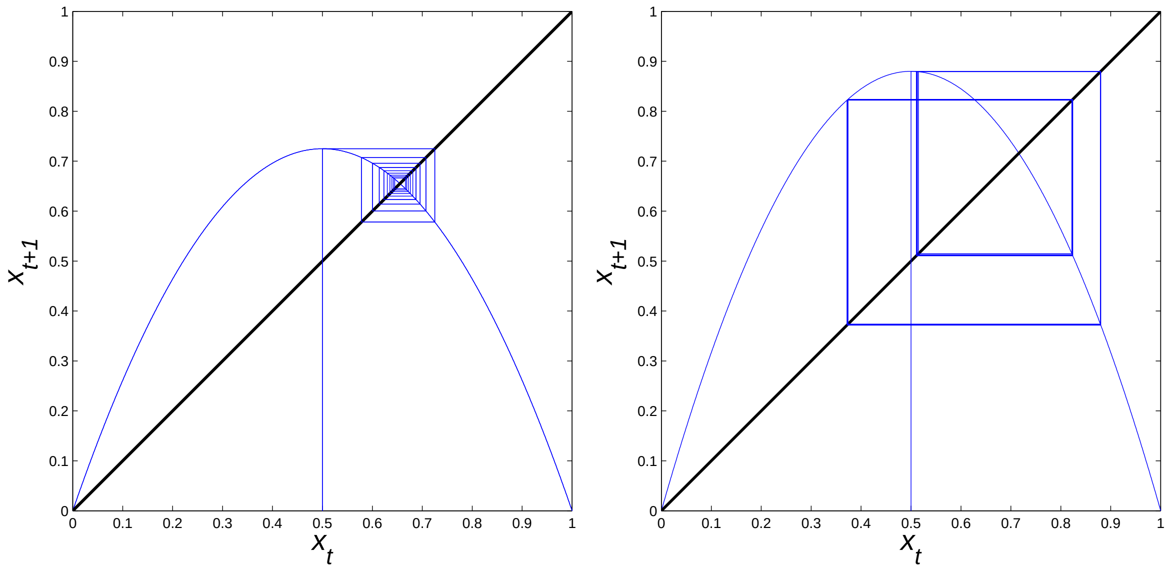
$$x_{t+1} = f(x_t)$$

の固定点を x^* とすると，固定点 x^* は，

を満たす．

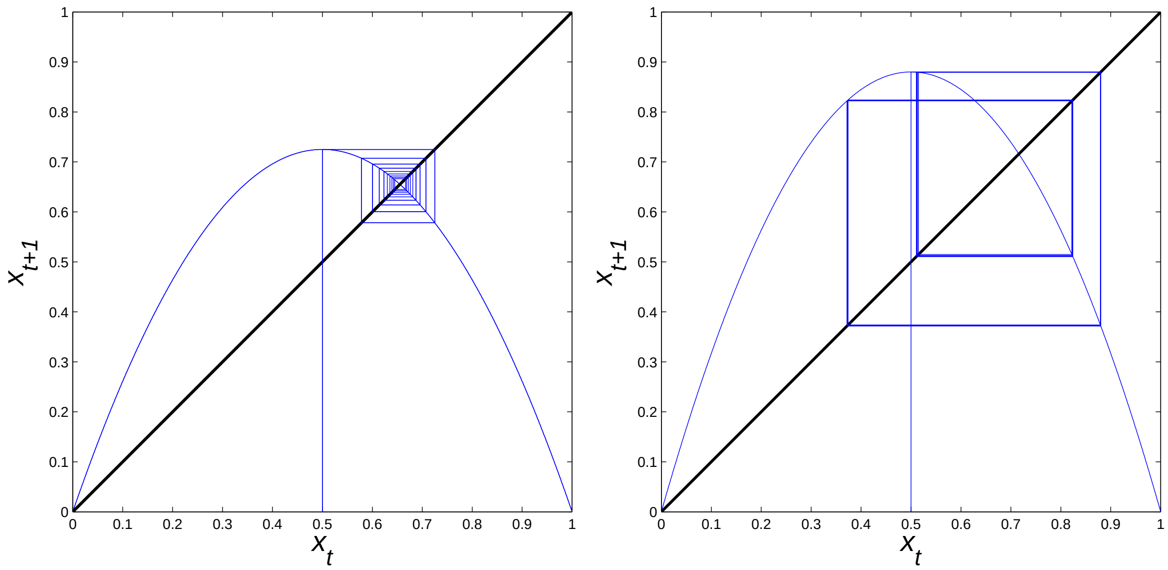
固定点を図式解法で求めると?

以下の各場合について，固定点はどこか?



固定点を図式解法で求めると?

共通点は?違いは?



演習: 固定点を求めてみよう

❏ 線形な差分方程式の固定点は?

$$x_{t+1} = Rx_t$$

❏ ロジスティック写像 (非線形な差分方程式の例) の固定点は?

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

固定点について考えるべきこと

1. 固定点は存在するか?
2. 初期条件 x_0 がある固定点にたまたま近いとして，その初期条件から始まった $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ は， その固定点に近づくのだろうか?

   ⇒ という．

☞ 発展

❏ 「与えた初期条件に関係なく，その固定点に収束するか」という も考えることができる．

⇒ .

❏ 線形な差分方程式の場合

⇒

❏ 非線形差分方程式の場合

⇒ 固定点の数は .

線形な差分方程式の固定点の局所安定性を考える

$$y_{t+1} = my_t$$

[演習]

1. この差分方程式の固定点 y^* を求めよ．
2. 固定点 y_t^* の安定性を図式解法を用いて議論せよ．
   m の値により，　　通りに分けて議論すれば良い．

それでは非線形な差分方程式の固定点の局所安定性は?

- 微小区間を考えれば，非線形な関数でも，　　　　　　．
- 今は，固定点が対象なので，　　　　　　　　点で議論すれば良い．
  1. 固定点 x^* を求める．
  2. x^* において，$f(x^*)$ の傾き m を求める．

     [注意] 非線形な場合 x^* の数は　　　　　　．
  3. m の値で x^* の安定性が決まる．

m の値による場合分け

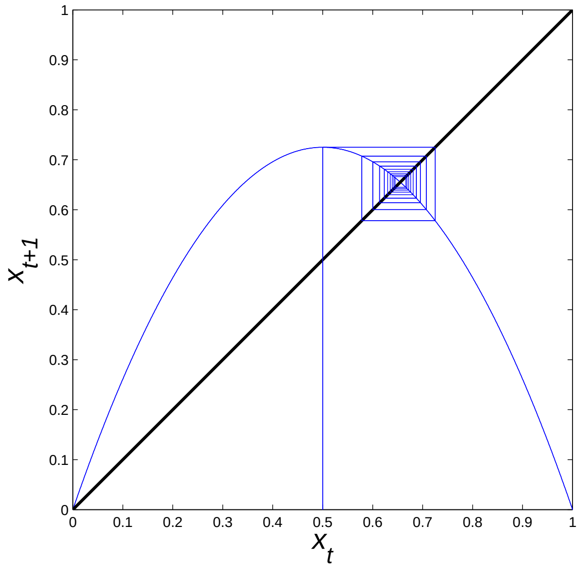
$$
\begin{aligned}
1 < m \quad &\Rightarrow \\
0 < m < 1 \quad &\Rightarrow \\
-1 < m < 0 \quad &\Rightarrow \\
m < -1 \quad &\Rightarrow
\end{aligned}
$$

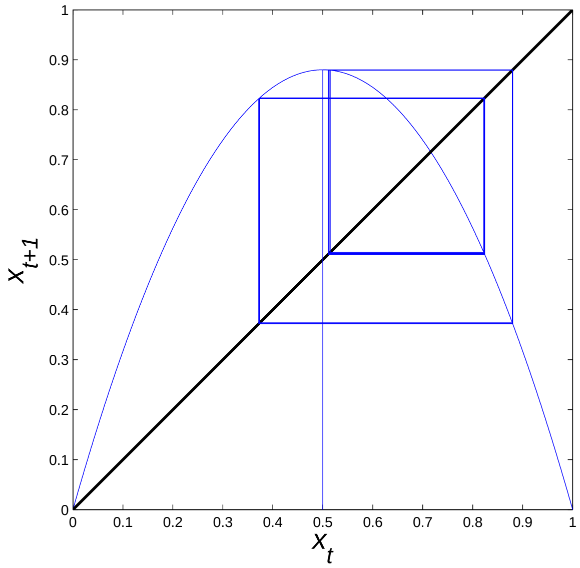
ロジスティック写像の固定点の安定性は?

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

- **[演習] 固定点** x^* **を求めよ** $\Rightarrow$
  -
  -
- **[演習] 安定性は**?

安定な固定点と不安定な固定点





$R = 2.9$ $R = 3.52$

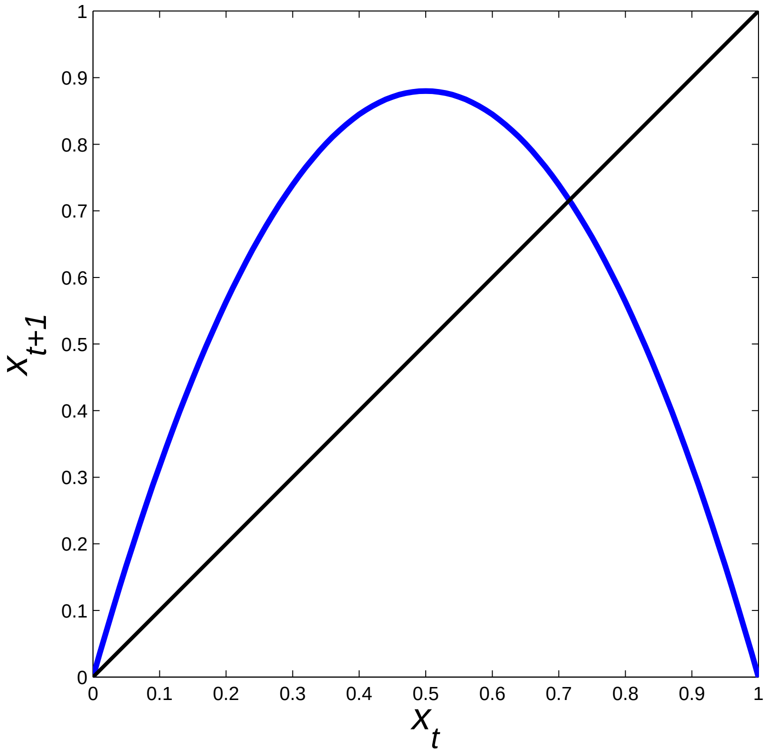
周期解とその安定性

- **定義**
  - $x_{t+n} = x_t \ \rightarrow$
  - $x_{t+j} \neq x_t, j = 1, 2, \cdots, n-1 \ \rightarrow$

例: **ロジスティック写像の** 2 **周期点は**?

$$x_{t+2} \quad = \qquad\qquad\qquad\qquad = f^2(x_t)$$

図式解法を用いると …



演習: 因数分解にチャレンジ！

$$R^3x^4 - 2R^3x^3 + R^2(1+R)x^2 + (1-R^2)x = 0$$

周期解の安定性

$$x_{t+2} = f(f(x_t))$$

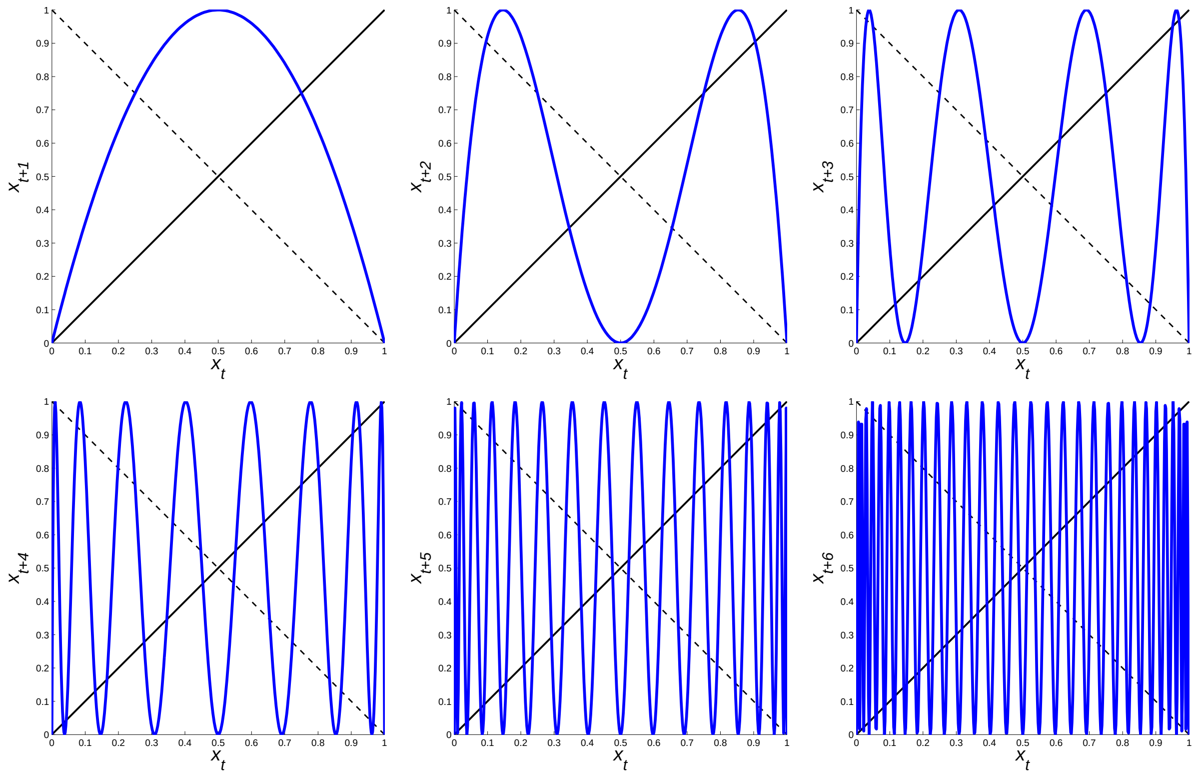
を満たす点を $x^\dagger$ とすると，

図式解法を用いると一次元写像 $x_{t+1} = f(x_t)$ の···

- n 周期解は，　　　と　　　　　　　となる．
- n 周期解の安定性を考えるならば，

　　を考えれば良い．
- 上記の m は，図式解法では，補助直線と $f^{(n)}(x_t)$ との交点における　　　　　　　である．
- プログラミングによる数値実験において固定点や周期解が観測されたら，　　　である．
- 逆に，不安定な固定点・周期解は，数値計算でも　　　　　．

$R = 4$ のときに n 周期解を考える



$R = 4$ のときに n 周期解を考える

ロジスティック写像の場合，$R = 4$ において，
する．

↓

全ての n 周期解が　　　　である．
つまり，　　　　　　　　　　　．

↓

これが　　　　　　　だ!