非線形システム概論 2007

固定点・周期解の安定性(続き)／カオスとは？決定論と確率論

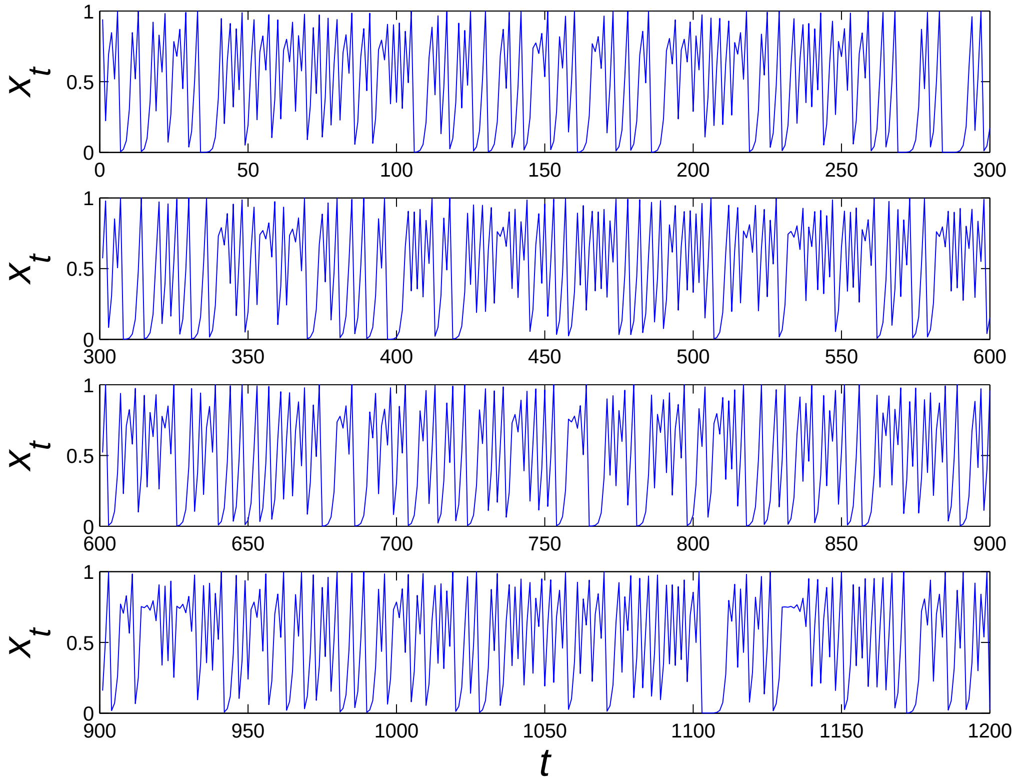
池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門
338–8570 さいたま市 桜区 下大久保 255
Tel: 048–858–3577, Fax: 048–858–3716
Email: tohru@ics.saitama-u.ac.jp
URL: http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/˜tohru

カオスの“定義”

- ❏ Aperiodic
  - – 同じ状態は
  - ☞ ただし，コンピュータシミュレーションが　　　　　　　　　であること
には注意する必要がある．
- ❏ Bounded
  - – 写像を何回繰り返しても，　　　　　　　　　する
(±∞ に発散しない)．
- ❏ Deterministic
  - – 写像を繰り返えす法則は　　　　　　　　いる．
  - ✌ 神はサイコロを振るか．
- ❏ Sensitive Dependence on Initial Conditions
  - – 初期値が少しでも異なると，　　　　　　　　　を示す
  - ☞ このような性質に起因して、　　　　　　　　　となる

非周期性，有界性



決定論的とは？

$$x_{t+1} = f(x_t) = 4x_t(1 - x_t)$$

- ❑ $t = 0$ での値 x_0 (初期値) から x_1 を　　　　決定できる
  確率的な要素は　　　　　　　　　　　.
- ❑ $t = 1$ での値 x_1 から x_2 を決定できる
- ❑ この過程は，次々と繰り返えされる．つまり，

初期値が与えられると，
未来永劫，全てが決定される ⟷ 「　　　　　に従う」

⟶ 　　　　　な現象も再現できる!!

確率論的 (非決定論的) な法則とは?

- さいころ投げ
- コイントス，etc

■■■■■■■■■■■■■■■■■■ …
□□□□□□□□□□□□□□□□□□ …
■□■□■□■□■□■□■□■□■□ …
■□□■□□■□□■□□■□□■□□ …
……………………………
□■□■■■□■■■□□□■■■□□ …
□■□□□■□□■■■■■□□□■□ …
■□■□■□■□■■■■□□■□□■ …
……………………………
$\omega_0\ \omega_1\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4\ \omega_5\ \omega_6\ \cdots\ \omega_{t-1}\ \omega_t\ \omega_{t+1}\ \cdots\quad \cdots$

$\omega_i \in \{$ ■ (表), □ (裏)$\}$

決定論的 → 確率論的

ロジスティック写像 $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$ より得られる x_t $(t = 0, 1, 2, \ldots,)$ の系列に対し，

$0 \leq x_t \leq 0.5$	$\rightarrow$	■ (表)
$0.5 \leq x_t \leq 1$	$\rightarrow$	□ (裏)

という対応を考えると，コイントス (確率的) を繰り返した系列ができる．つまり，

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots$$

が与えられたら，

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \ldots$$

を作ることができる．

($x_t \in \omega_t$ と表すことにする) が存在する．

驚くべきは逆が成立するということ!!!

逆とは？ $\Longrightarrow$

無限記号列

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \ldots$$

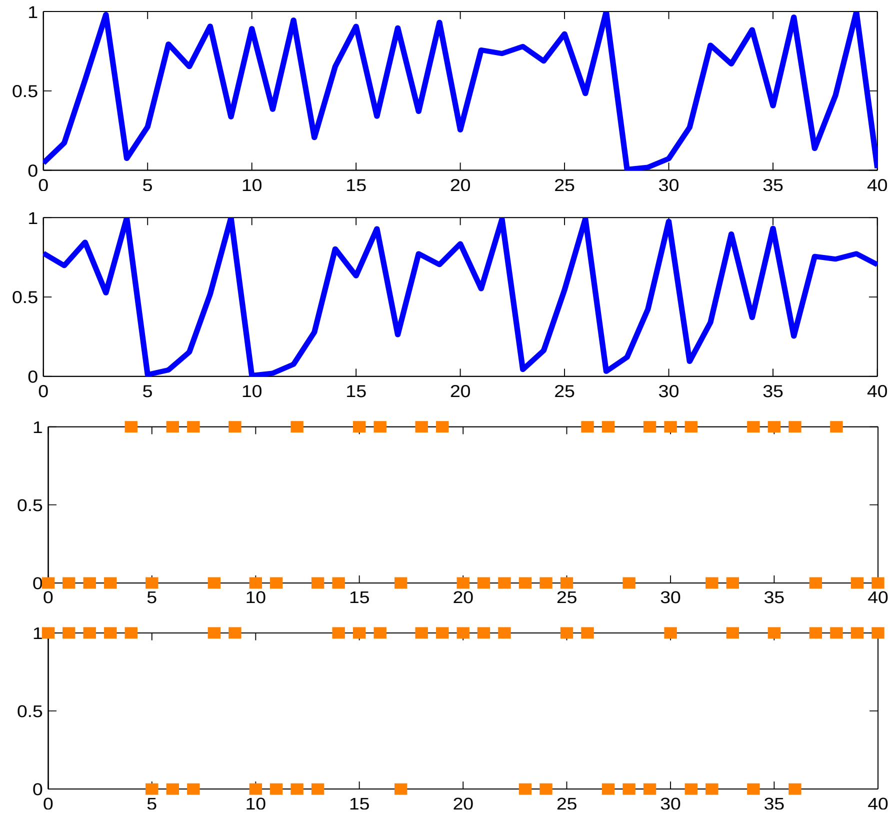
を勝手に取ってくる．

勝手にとってきた (=　　　　　) 無限記号列 (■□のランダムな列) に相当するロジスティック写像から生み出された

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots$$

という系列が必ず存在する (つまり，全ての t について $x_t \in \omega_t$ となるような初期値 x_0 が存在する)．

ロジスティック写像 $\leftrightarrow$ 0, 1 ランダム列



決定論的系列が確率論的系列と対応がつく

ロジスティック写像より得られる決定論的な系列

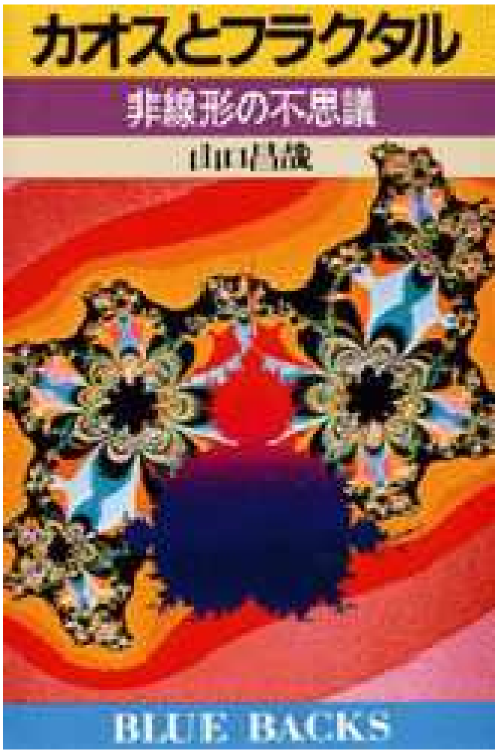
$$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \ldots$$

$\updownarrow$

コイントスより得られる確率的 (非決定論的) な系列

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{t-1}, \omega_t, \omega_{t+1}, \ldots$$

参考資料



山口 昌哉
「カオスとフラクタル
– 非線形の不思議–」
講談社ブルーバックス，
1986．

証明は pp.36–44 **に載っている．**

フォン・ノイマンもカオスを知っていた!

403. S. M. Ulam and John von Neumann: *On combination of stochastic and deterministic processes.* Preliminary report.

A computational procedure for the study of various differential equations—ordinary or partial—is investigated. It consists of a statistical model of the corresponding physical problem and involves a process which is a combination of deterministic and stochastic processes (see Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 51-9-165). This procedure is analogous to the playing of a series of "solitaire" card games and is performed on a computing machine. It requires, among others, the use of with a given distribution. Various distributions of such numbers can, however, be obtained by processes. For example, starting with almost every x_1 (in the sense of Lebesgue measure) and *iterating* the function one obtains a sequence of numbers on (0, 1) with a computable algebraic distribution. By playing suitable *games* with numbers "drawn" in this fashion, one can obtain various other distributions, either given explicitly or satisfying given differential or integral equations. (Received September 3, 1947.)

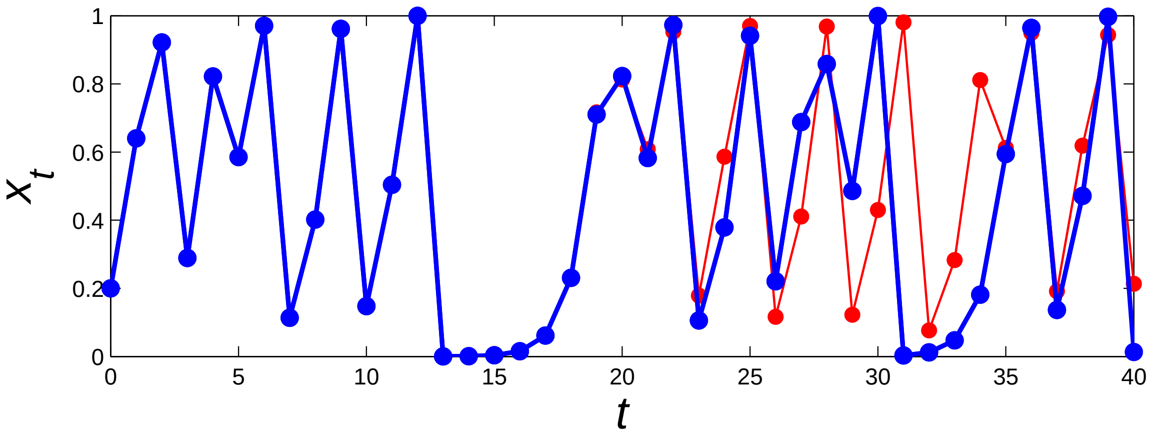
初期値鋭敏依存性

ロジスティック写像 $x_{t+1} = 4x_t(1 - x_t)$

$$x_0 = \begin{cases} 0.1 \\ 0.1 + 10^{-8} \end{cases}$$

❏ **微小な誤差が　　　　　　に拡大**

$\longrightarrow$ **決定論的であるが**



カオスの特徴

ロジスティック写像のような**決定論的非線形ダイナミクス**

- な動きを示す．
- であるにも関わらず，
  な現象を　できる．
- ルールが定まっているのに　．

カオス研究の源流と発展

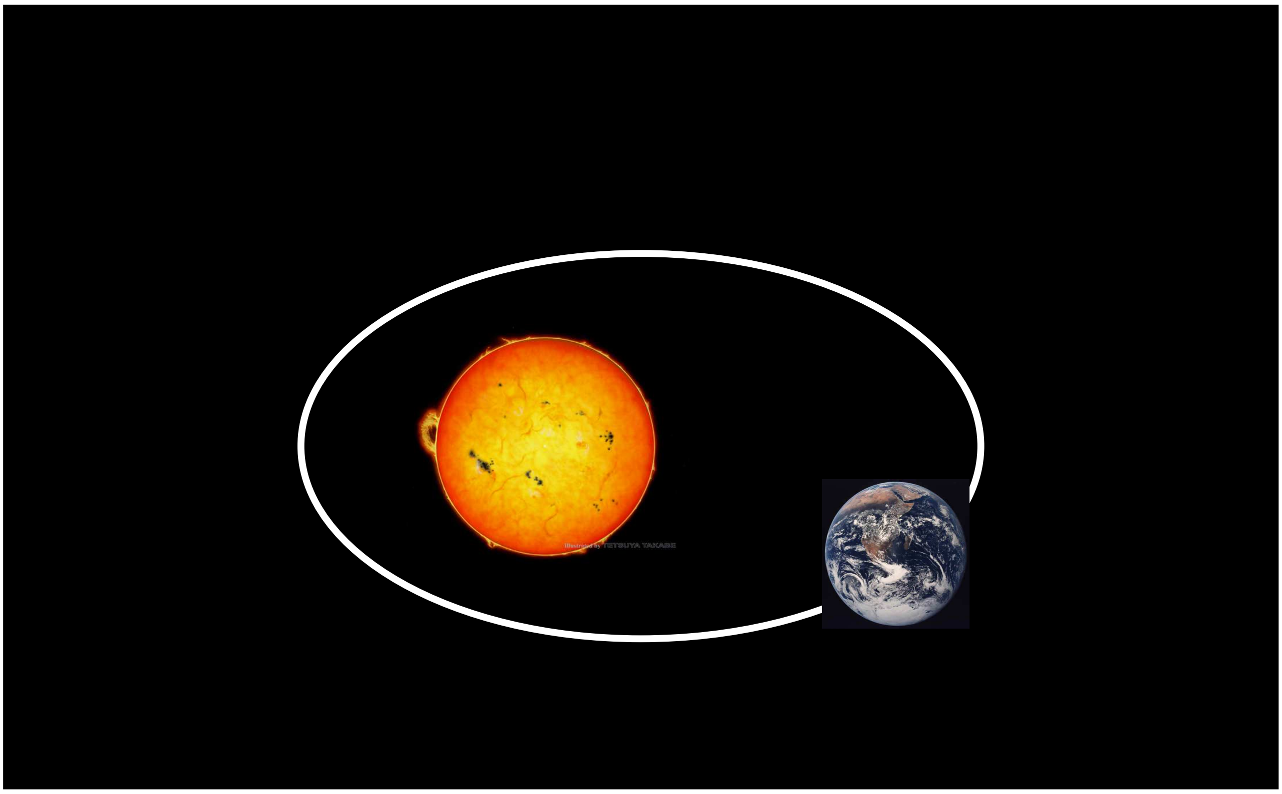
1

2

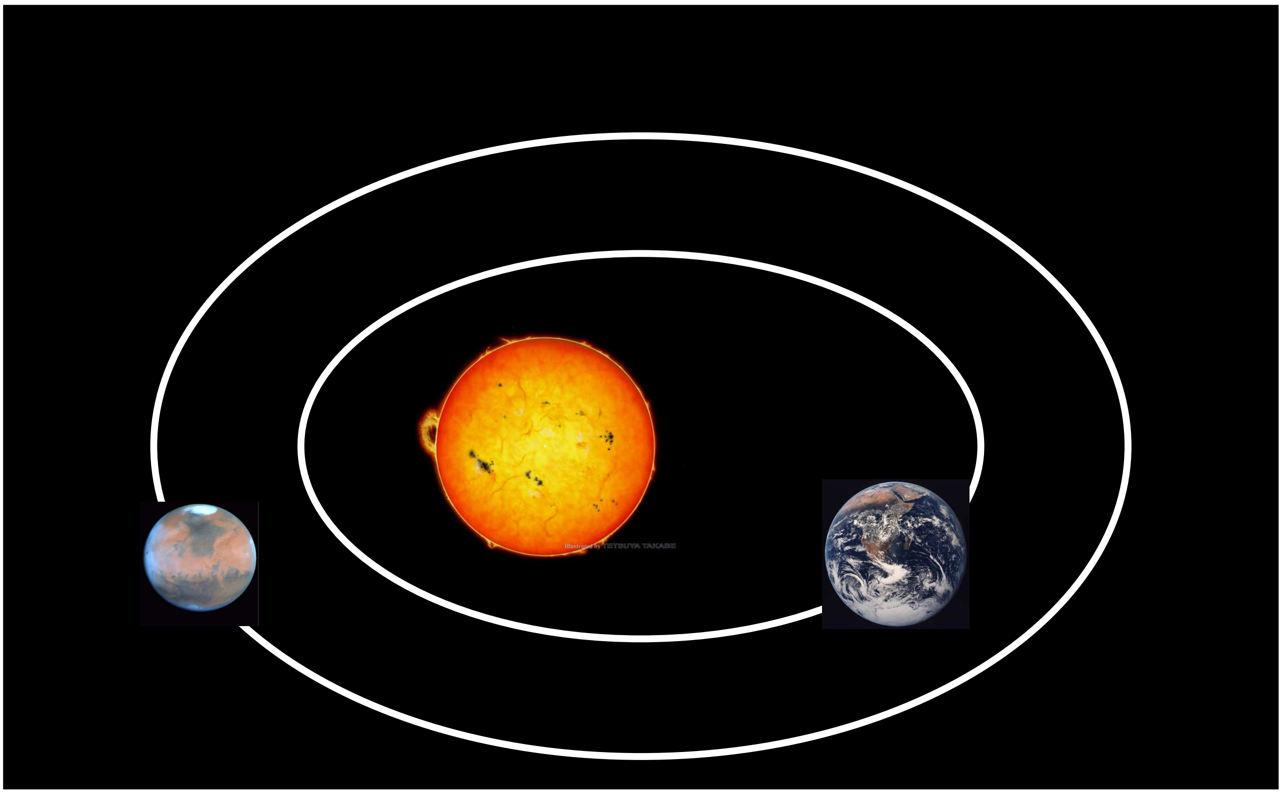
3

4

2体問題



2体問題



20 世紀の三大発見

- ❑ ニュートン力学的世界観を打ち破る
  - – 相対性理論 ⇒ ⇒
  - – 量子力学 ⇒ ⇒
  - – カオス ⇒
- ❑ しかし，カオスは している．
  例: 単振り子から二重振り子へ
  - – 小振幅時の単振り子 (2 自由度) —- 解析的に求解可能，周期解

$$m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = -mg\theta \Leftrightarrow ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

  - – 単振り子 (2 自由度) —- 解析的に求解可能，周期解
  - – 二重振り子 (4 自由度) —- 解析的に求解不可能，カオス解

参考資料紹介

- ❑ James Gleick, “Chaos, Making a New Science,” Penguin Books, 1987; 大貫昌子訳，上田睆亮 監修: カオス 新しい科学をつくる，新潮文庫，