

非線形システム概論 2007

分岐入門

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門

338-8570 さいたま市 桜区 下大久保 255

Tel: 048-858-3577, Fax: 048-858-3716

Email: tohru@ics.saitama-u.ac.jp

URL: <http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru>

非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.1/91

どのようにしてカオスが生まれるか

- 非線形な差分方程式が,
- 例えば, ロジスティック写像

$$x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$$

のパラメータ R を徐々に変化させると, どのようなことが起きるのだろうか?

- 実際に, いろいろな R に対して (実際には R を少しずつ変えていく), 初期値 x_0 を与えた際の, その後の x_1, x_2, x_3, \dots がどのような振る舞いを示すのかを少し詳しく見てみよう.

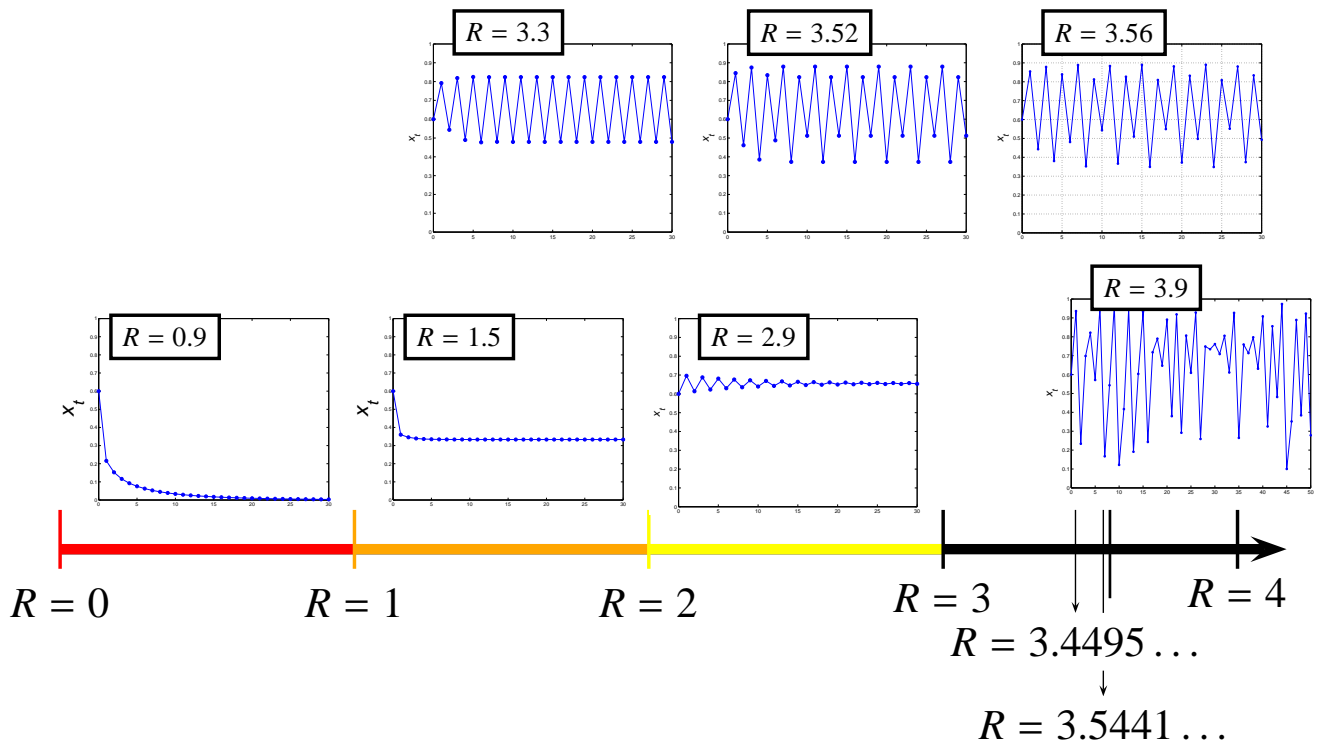


—

=

非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.56/91

分岐 (bifurcation)



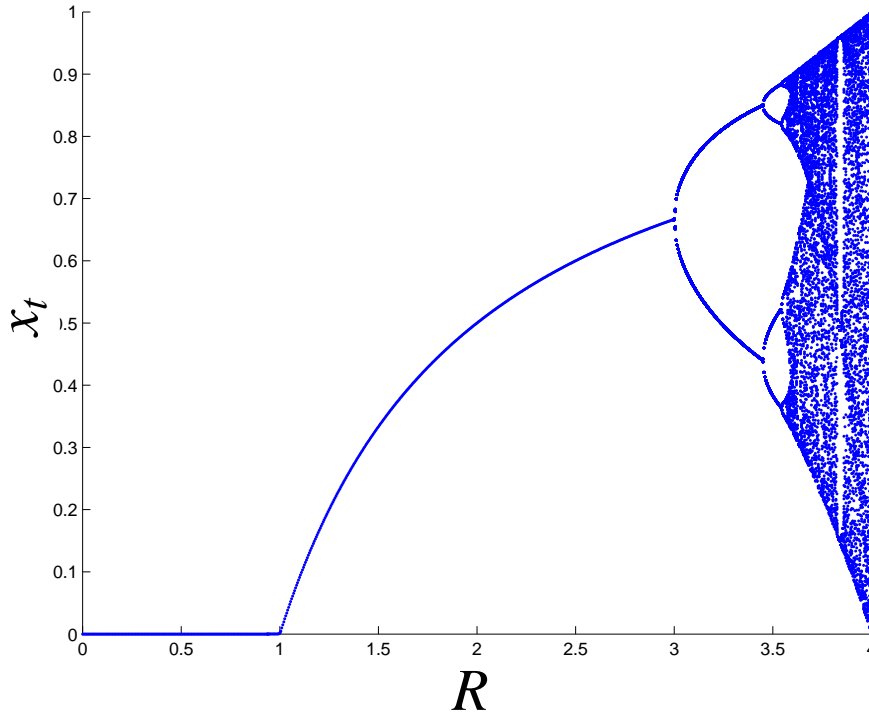
非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.57/91

分岐図とは?

- (例えばロジスティック写像 $x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$ の場合)
パラメータ R が変化したときに、 x_t の振る舞い that 変化する現象が
である。
- パラメータ R が変化することにより、横軸 t 、縦軸 x_t という時系列をプロットしてもよいが、もう少し分かりやすい表現方法はないだろうか?
- そこで、
の様子をまとめて表現したものとして
がよく用いられる。
- パラメータ R を変化させ、その R の値に対して、その都度 x_t を縦軸にプロットしていけば、
を得る。

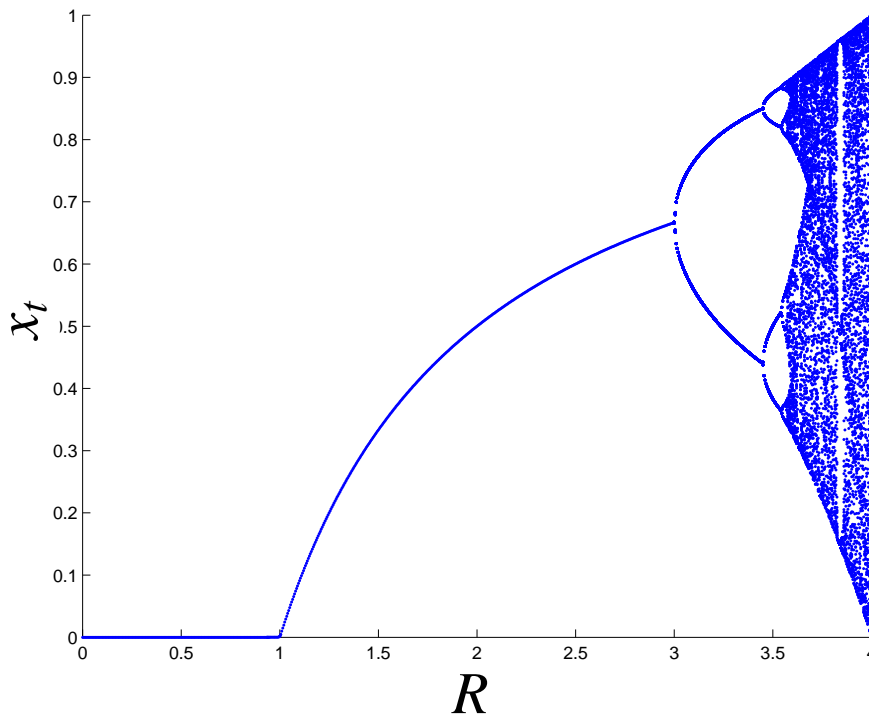
非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.58/91

ロジスティック写像の分岐図



非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.59/91

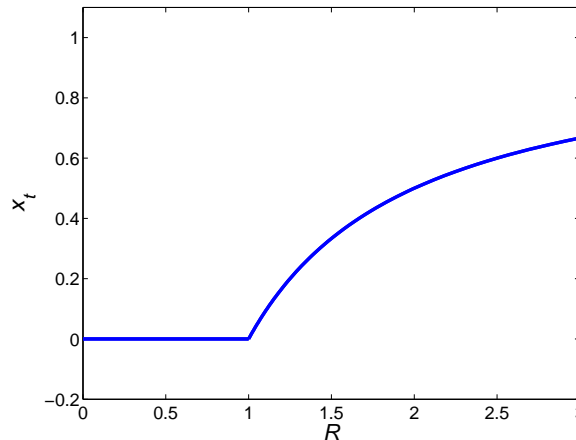
$0 < R < 3$ の部分に注目してみよう



非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.60/91

演習

$0 \leq R \leq 3$ におけるロジスティック写像の分岐図は、なぜ下のような形になるのかを説明しなさい。



- この演習は、の演習と関係しています。
- もう一度、ここでやってみよう。

非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.61/91

演習の略解

- ロジスティック写像の固定点 x^* を求めると

$$x^* = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

- 固定点安定であるためには、なので、まずは、
以下を計算する。

$$f'(x^*) =$$

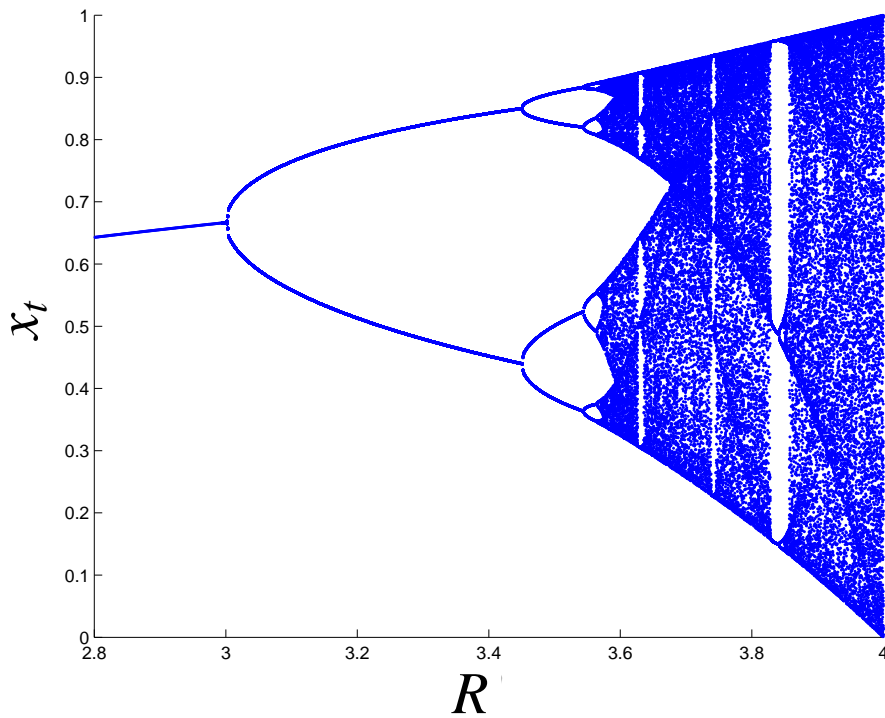
– $f'(\quad)$

– $f'(\quad)$

非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.62/91

$R = 1$ での分岐

$R > 2.8$ 以降を拡大



$R = 3$ では何がおきているか?

□ $x^* = 1 - \frac{1}{R} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ であるから ,

$$\left. \frac{df(x_t)}{dx_t} \right|_{x^*} = R - 2Rx^* = 3 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = -1$$

つまり $R = 3$ では $\frac{df(x_t)}{dx_t} = -1$ となり ,

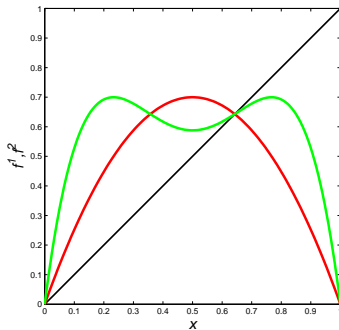
する .

□ 分岐図をみると ,

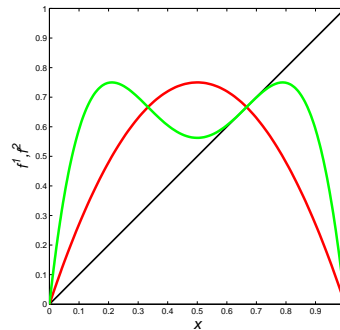
が現れている .

$\Rightarrow f(x_t)$ と $f^2(x_t)$ のグラフを描いてみよう

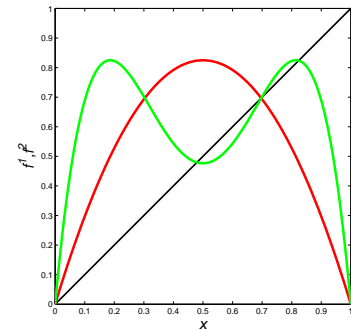
ロジスティック写像 $R = 3$ 付近



$R = 2.8$



$R = 3.0$



$R = 3.3$

□ $R < 3$ では固定点 $x^* = 1 - 1/R$ は .

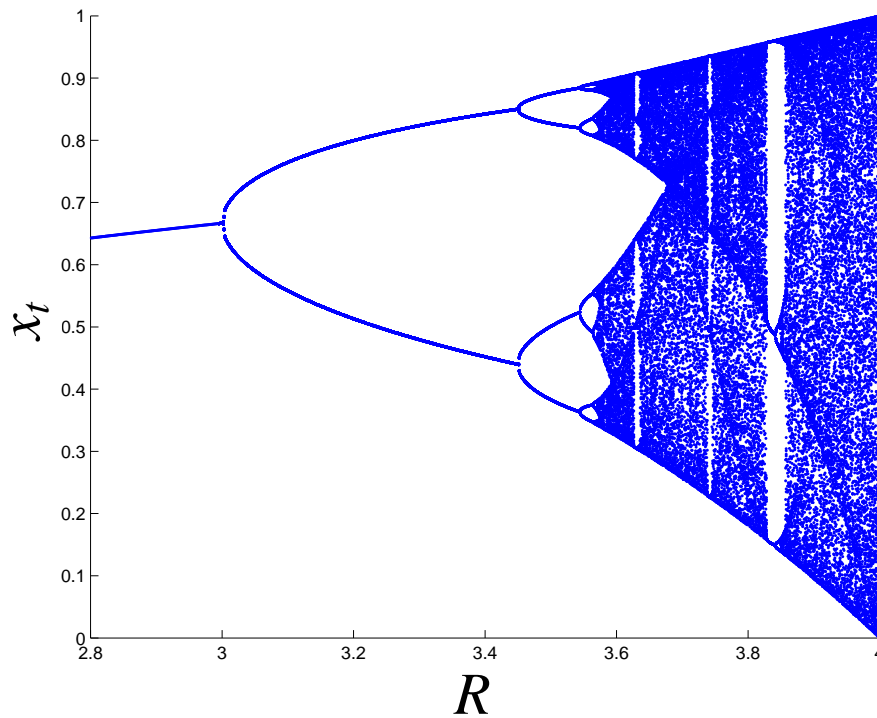
□ $R = 3$ では f^2 が $x^* = 2/3$ において 45 度の直線と .

□ $R > 3$ では f^2 と 45 度の直線が

で交わる .

傾きは?

$R = 3$ では1周期解 (固定点) \Rightarrow 2周期解



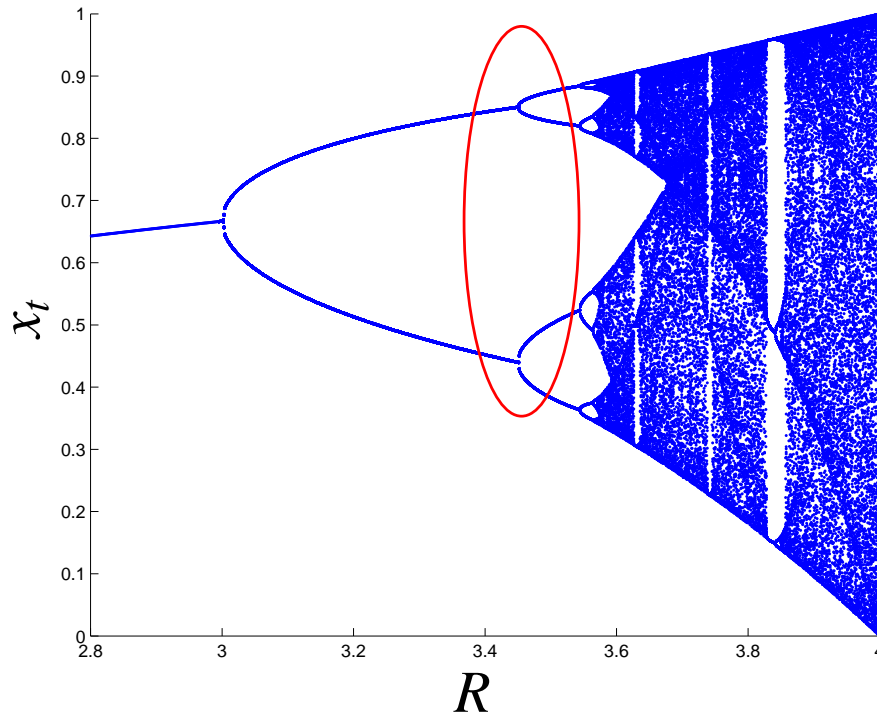
非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.69/91

まとめると ...

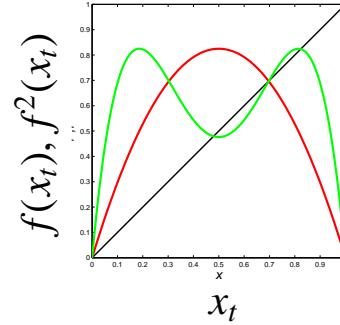
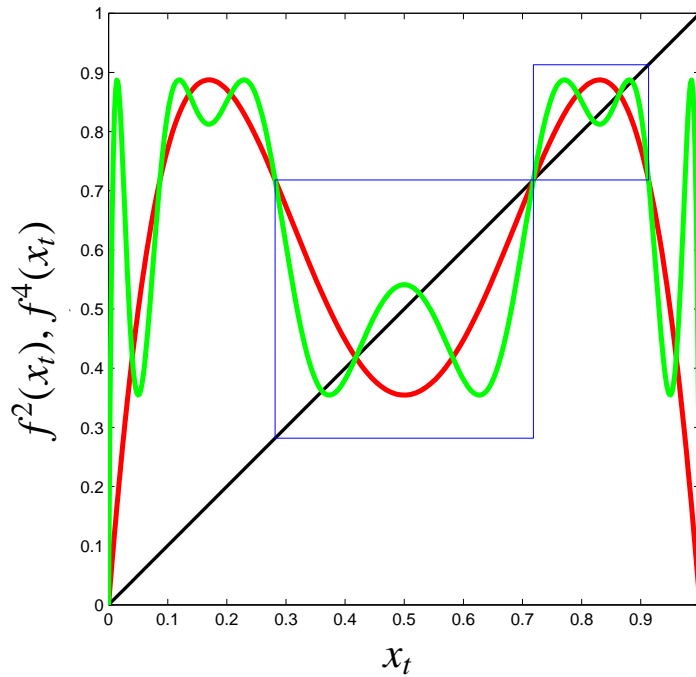
- $R < 3$ では
 - 固定点は x^* である \Rightarrow される .
 - 2周期解は x^* である .
- $R = 3$ では ,
 - 固定点は x^* である .
 - 実際 x^* は $f^2(x^*) = x^*$ である .
 - x^* において f^2 は補助線に $f^2(x^*) = x^*$ \Rightarrow 傾きは $f^2(x^*) > 1$.
- $R > 3$ では ,
 - 固定点は x^* である \Rightarrow される .
 - 不安定化した固定点の回りに , x^* が出現 \Rightarrow される .

非線形システム概論 2007/池口 徹 - p.70/91

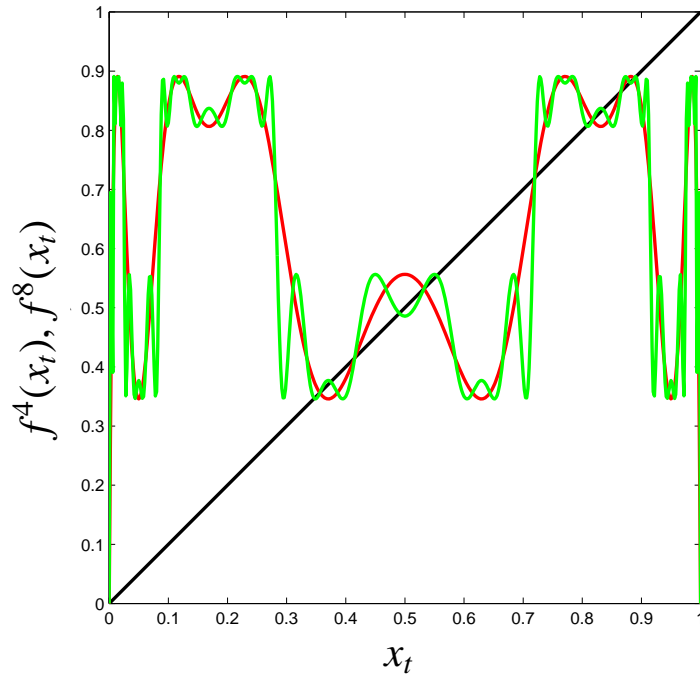
では, さらに R を大きくしていくと?



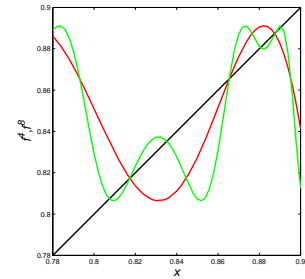
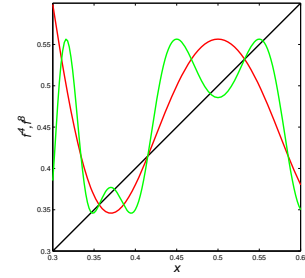
2周期解から4周期解へ



4周期解から8周期解へ



左の拡大図



$2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \dots \rightarrow 2^\infty$

