非線形システム概論 2007

多次元力学系入門

池口 徹

埼玉大学 大学院 理工学研究科研究部 数理電子情報部門
338–8570 さいたま市 桜区 下大久保 255
Tel : 048–858–3577, Fax : 048–858–3716
Email : tohru@nls.ics.saitama-u.ac.jp
URL : http://www.nls.ics.saitama-u.ac.jp/~tohru

固有値，固有ベクトルの意味

- **固有値 λ，固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ の定義**
  正則な行列 A に対して

- **差分方程式 $\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$ のダイナミクスとの関係**
  $\Longrightarrow$ **仮に $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{p}$ としたらどうなるか？**
  - $\boldsymbol{x}(1) =$
  - $\boldsymbol{x}(2) =$
  - $\boldsymbol{x}(3) =$
  - $\boldsymbol{x}(t) =$
  -

固有値，固有ベクトルの意味

- ❏ $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{p}$ としたら，$\boldsymbol{x}(t) = \lambda^t \boldsymbol{p}$ となった．その意味は？
  - 差分方程式 $\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$ について，
    $\boldsymbol{p}$ (A の固有ベクトル) を初期値として与えると，
    $\boldsymbol{x}(t)$ は　の方向に　である．
    (　)
  - 　のは　の時，　のは　の時．

例題1

- ❏ 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{10}{15} \end{pmatrix}$ としたときに，2 次元の線形差分方程式 $\boldsymbol{x}(t+1) = A\boldsymbol{x}(t)$ の振る舞いを考えよう．
  1. この差分方程式の固定点 x^* は，　である．
  2. 写像行列 A の固有値を λ_1, λ_2，固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とすると，

     $\boldsymbol{p}_1 =$　$\boldsymbol{p}_2 =$　$\lambda_1 =$　$\lambda_2 =$

- ❏ 例えば，$\boldsymbol{x}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を与えるとどうなるか？

  $\boldsymbol{x}(1) =$　$=$　$=$　, $\boldsymbol{x}(2) =$　$=$　$=$　,

  $\boldsymbol{x}(3) =$　$=$　$=$　, $\boldsymbol{x}(4) =$　, . . . , $\boldsymbol{x}(t) =$

  今，$\lambda_1 =$　なので，$\boldsymbol{x}(t)$

  [注] これは，$\boldsymbol{x}(0) =$　(k_1 は定数) としても同じことになる．

固有値，固有ベクトルを求めるには

- **定義より，**
- **移項すると，**

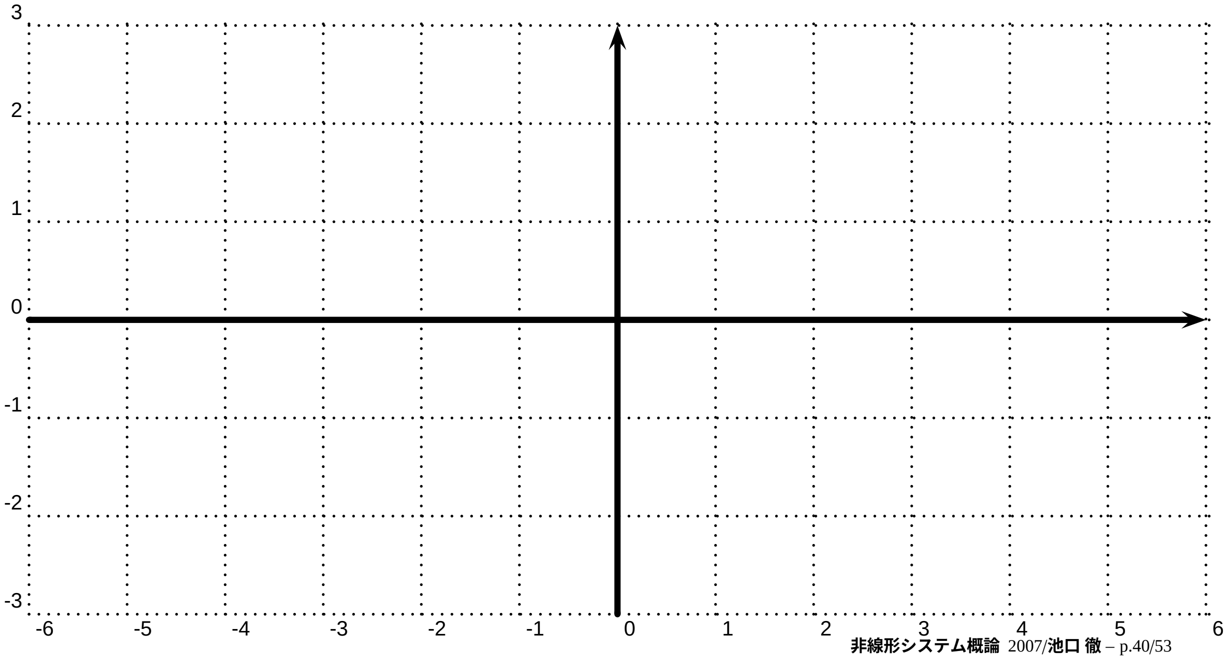
  但し，I は単位行列
- **従って，**
- **これを　　　　　　　　という．**

  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **とすると**

例題1(その2)

- **例えば，** $\boldsymbol{x}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(= \boldsymbol{p}_2)$ **を与えるとどうなるか？** $\Longrightarrow \boldsymbol{x}(t) =$

  $\lambda_2 =$　　　　　　**なので，** $\boldsymbol{x}(t)$　　　　　　, $(\boldsymbol{x}(0) =$　　　　　$(k_2$ **は定数) としても同じ)**



例題1(その3)

- 例えば，$x(0) =$ 　　　　　　　を与えるとどうなるか？

  $\boldsymbol{x}(1) =$ 　　　$=$ 　　　　　　$=$ 　　　　　　$, =$

  $\boldsymbol{x}(2) =$ 　　　$=$ 　　　　　　　　$=$

  　　　　　　$=$

  $\boldsymbol{x}(3) =$ 　　　$=$

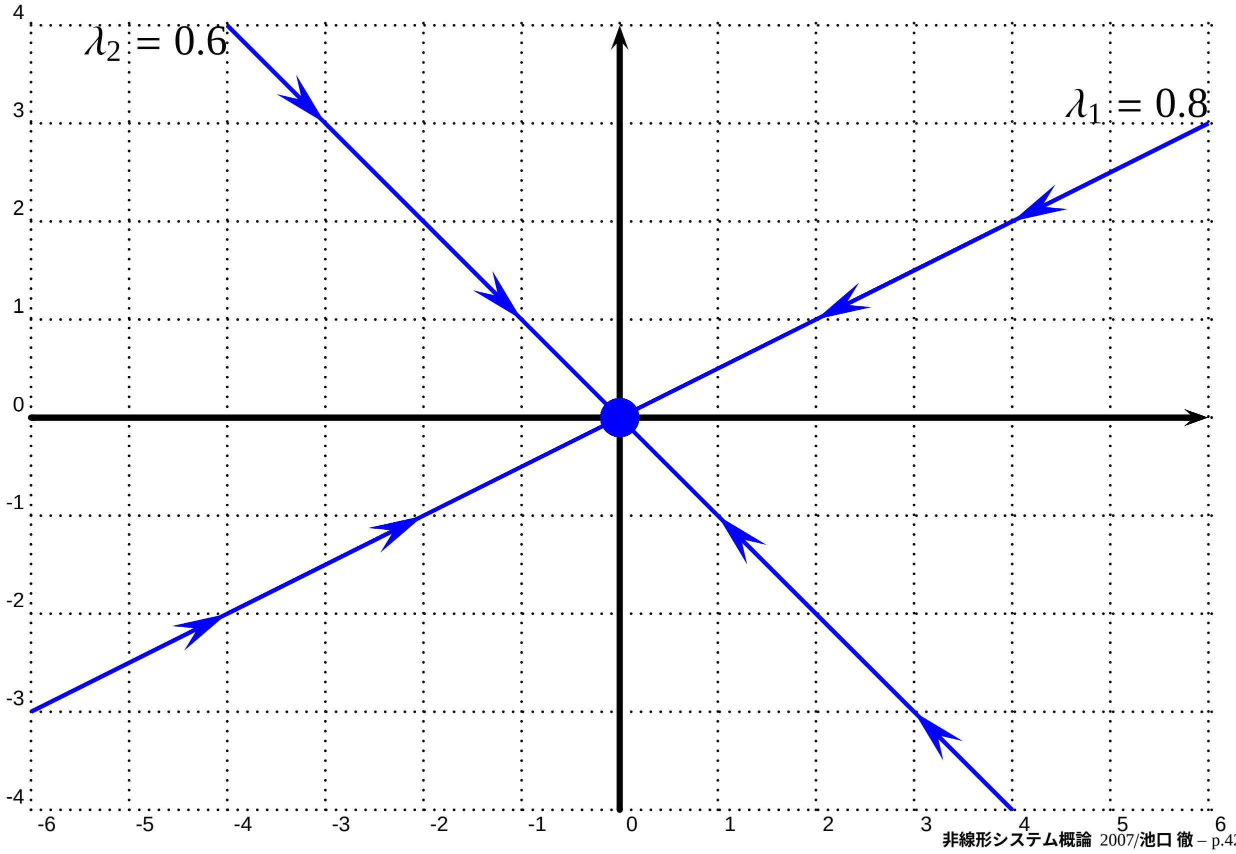
  $\boldsymbol{x}(4) =$ 　　　$=$

  ……………………………………………………………

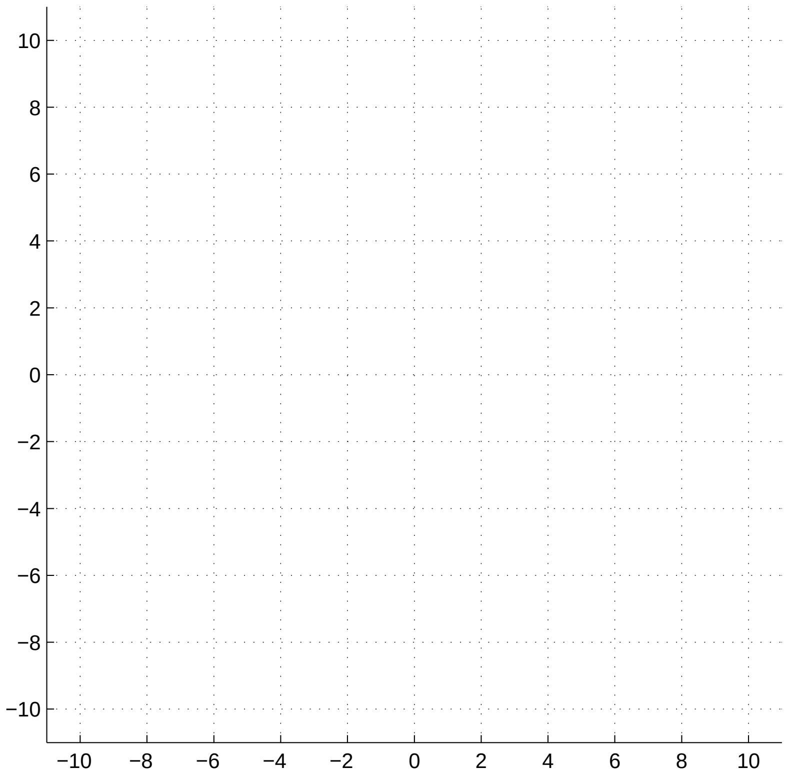
  $\boldsymbol{x}(t) =$ 　　　　$=$

- 今，$\lambda_1 =$ 　　　$\lambda_2 =$ 　　　なので，$x(t)$ 　　　　　ということ．
- つまり，固有値が共に１よりも小さいとき，　　　　　は

$\lambda_1 < 1, \lambda_2 < 1$ の場合

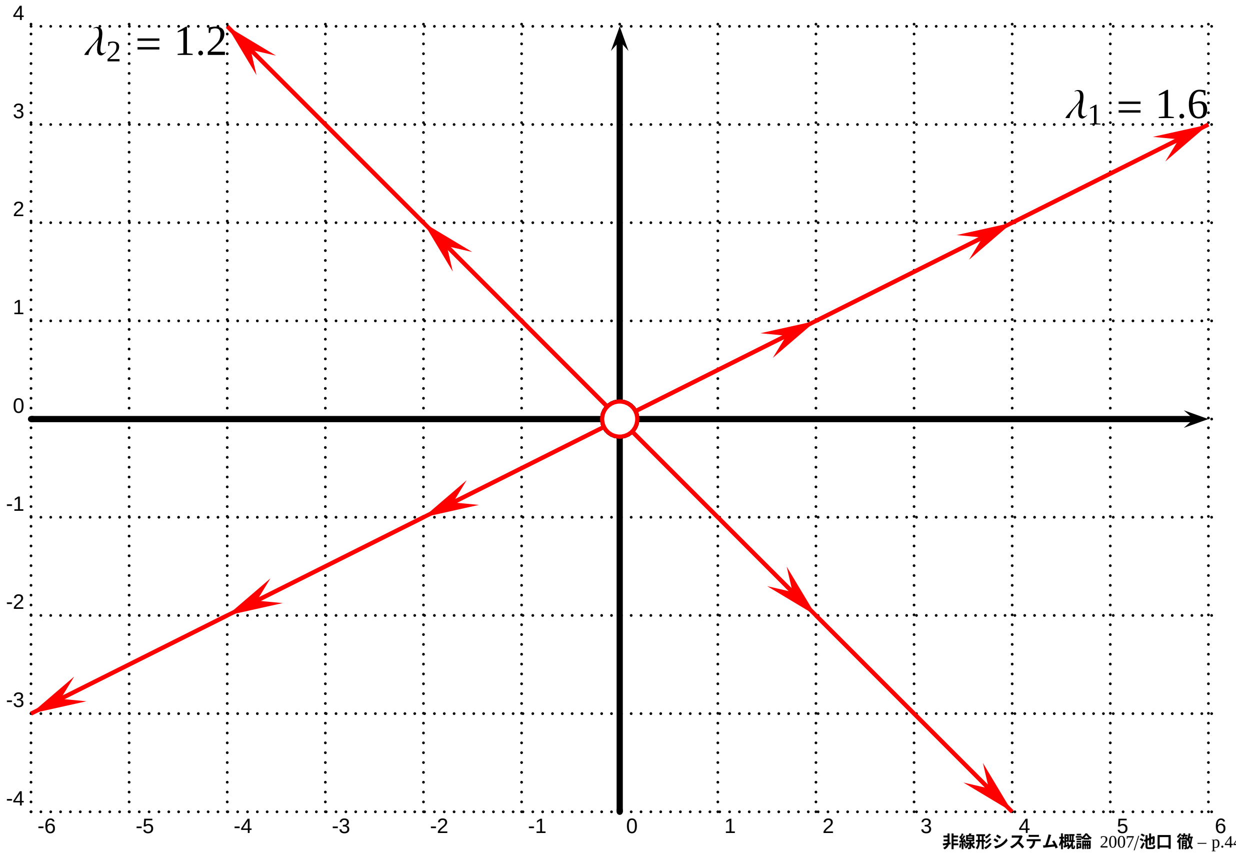


例題1

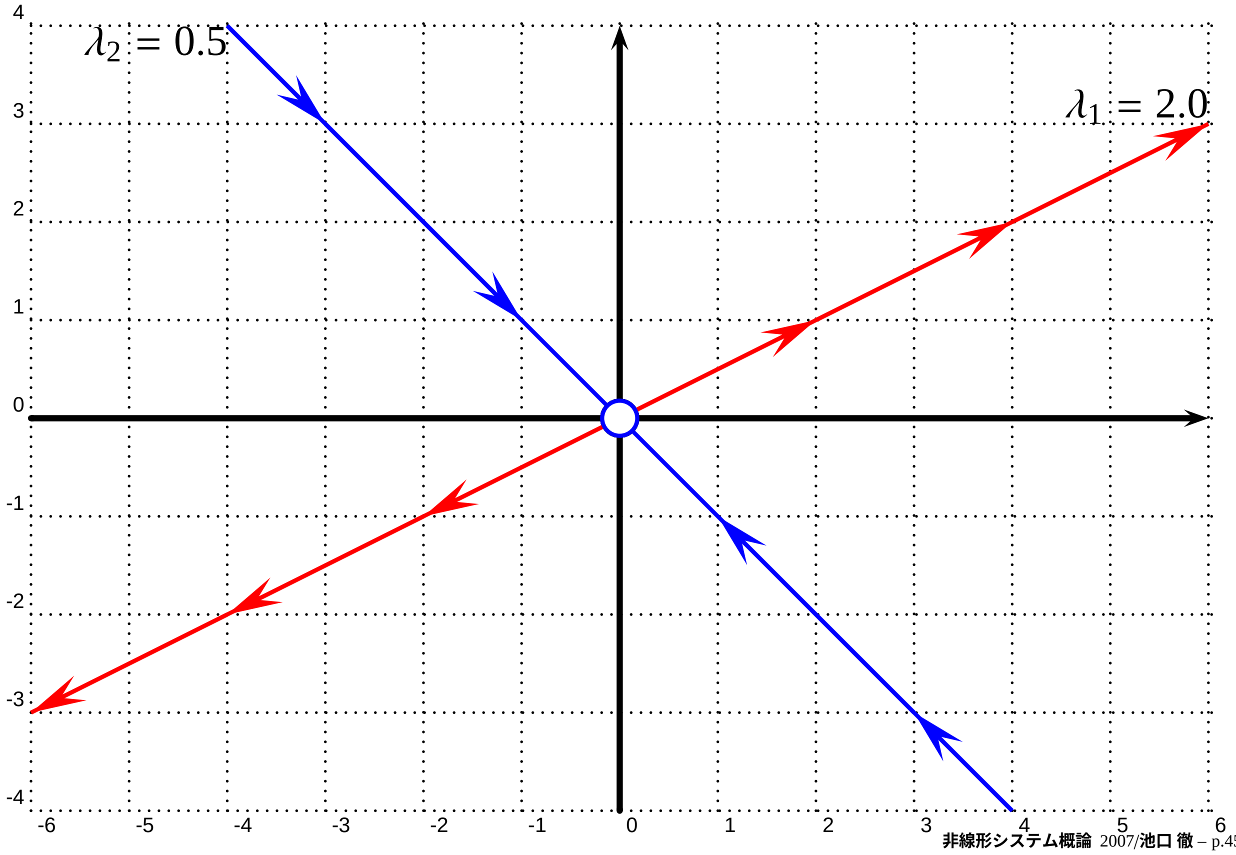


t	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0	10	10
1	8.66667	7.33333
2	7.33333	5.46667
3	6.10667	4.13333
4	5.02933	3.16267
5	4.10987	2.44373
6	3.33973	1.90315
7	2.70289	1.49141
8	2.18097	1.17447
9	1.75598	0.928377
10	1.4115	0.735983
11	1.13323	0.584756
12	0.909004	0.465386
13	0.728654	0.370857
14	0.583794	0.295815
15	0.467558	0.23613
16	0.37436	0.18859
17	0.299676	0.150684
18	0.239853	0.120435
19	0.19195	0.0962799
20	0.153601	0.0769833
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
45	0.000580748	0.000290375
46	0.000464599	0.0002323
47	0.000371679	0.00018584
48	0.000297343	0.000148672
49	0.000237875	0.000118937
50	0.0001903	9.51499e-05

p_1, p_2 同じ，$\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 1$ の場合



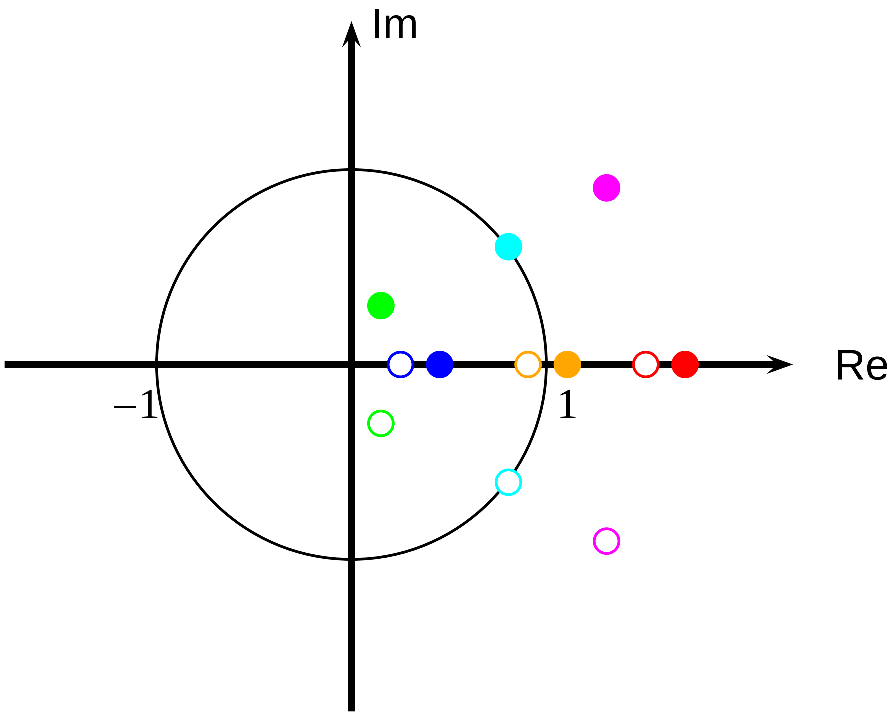
p_1, p_2 同じ，$\lambda_1 > 1, \lambda_2 < 1$ の場合



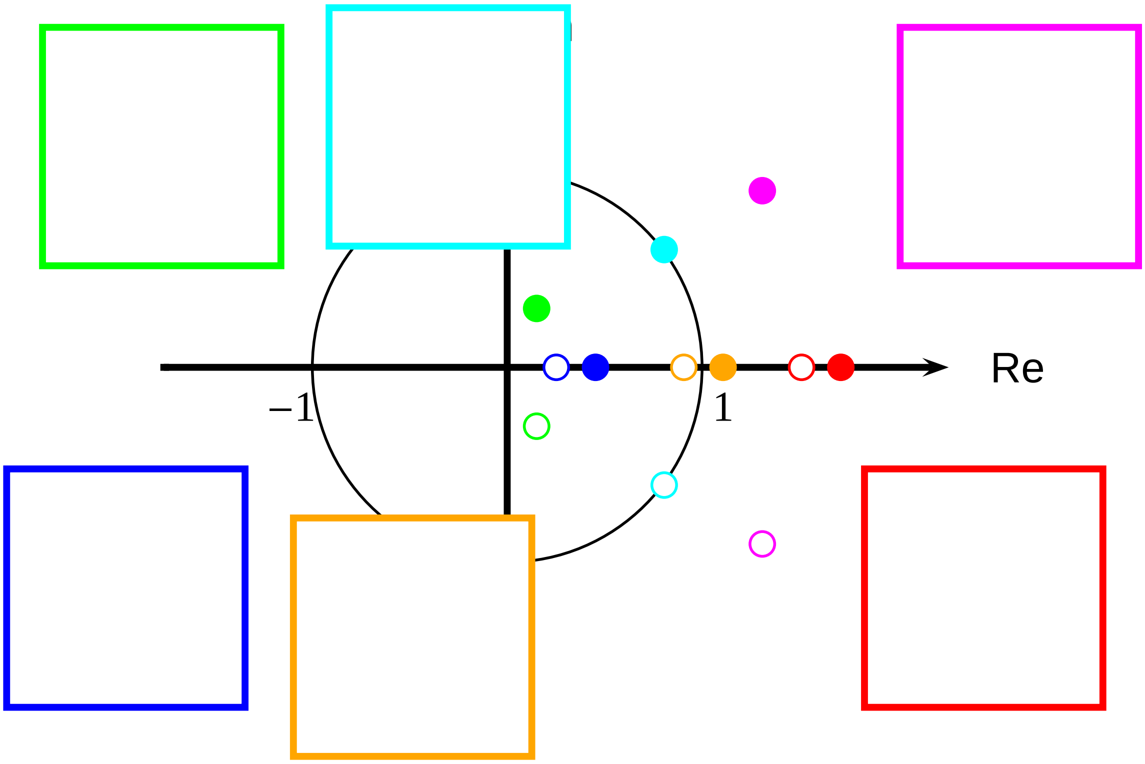
特性方程式の解のパターン

- ❑ **実数解**
  - **相異なる二つの実数解** λ_1, λ_2
    - ◯ $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$
    - ◯ $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| > 1$
    - ◯ $|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1$
  - **重解** λ
    - ◯ $|\lambda| > 1$
    - ◯ $|\lambda| < 1$
- ❑ **複素数** $\rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \sigma \pm i\omega$ **より**
  - $\sigma^2 + \omega^2 < 1$
  - $\sigma^2 + \omega^2 = 1$
  - $\sigma^2 + \omega^2 > 1$

2次元線形差分力学系の振る舞い



2次元線形差分力学系の振る舞い



まとめると ···

2 次元の非線形な差分方程式のダイナミクスを調べる
$x(t+1) = f(x(t))$

固定点，周期解 ··· 安定？ 不安定？

固定点 x^* 回りで　　　　された 2 次元の差分方程式

ヤコビ行列 $Df(x^*)$ の　　　　を解けば，
$x(t+1) = f(x(t))$ の　　　　での挙動が分かる

非線形ダイナミカルシステムの解析

- 非線形ダイナミカルシステムの応答がカオスとなるとき，
  - 　　　　　　　　　　が存在．
  - 固定点・周期点の安定性，不安定性を議論するための線形化された差分方程式

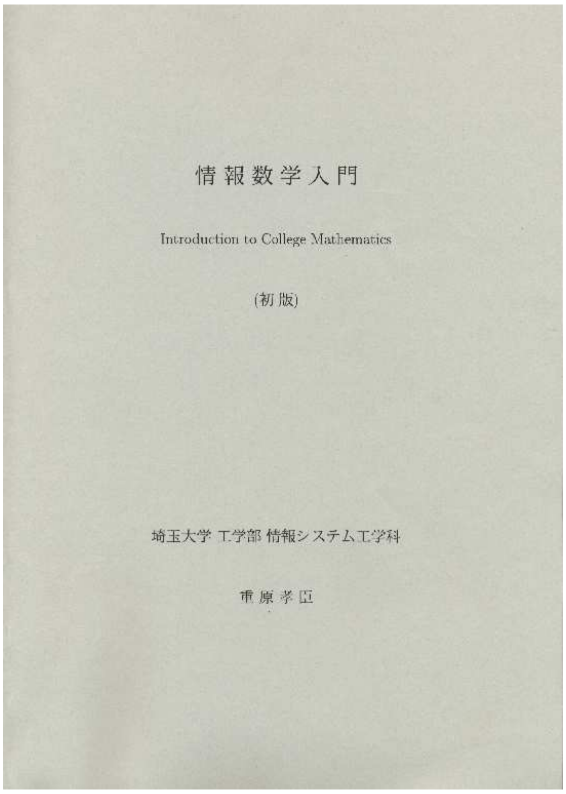
$$\epsilon(t+1) = Df(x^*)\epsilon(t)$$

  - $t \to \infty$ のとき，$\epsilon(0)$ がどのように変化するのかは，

$$\lim_{N\to\infty} \epsilon(N) = \lim_{N\to\infty}\left(\prod_{t=0}^{N-1} Df(x(t))\right)^{1/N} \epsilon(0)$$

を考えることになるが，ちょっとアドバンストなので，

参考書籍紹介

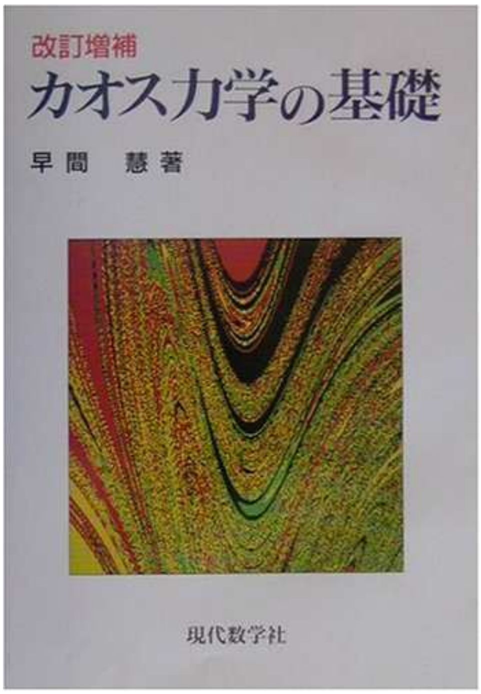


重原 孝臣 著,
"情報数学入門," 初版,
埼玉大学 工学部 情報システム工学科, 2005 年.

参考書籍紹介

平岡 和幸, 堀 玄 著,
"プログラミングのための線形代数,"
オーム社, 2004 年.

参考書籍紹介



早間 慧 著,
(改訂増補) カオス力学の基礎，
現代数学社，

参考書籍紹介

徳永隆治 著
フラクタルと画像処理
–差分力学系の基礎と応用–，
コロナ社，2002．